

TEORÍA DE LA COMUNICACIÓN PROBLEMAS

Recopilados por Carlos Rueda Frías

30 de noviembre de 2014



Usted es libre de:

Compartir — copiar y redistribuir el material en cualquier medio o formato

Adaptar — remezclar, transformar y crear a partir del material

El licenciador no puede revocar estas libertades mientras cumpla con los términos de la licencia.

Bajo las condiciones siguientes:



Reconocimiento — You must give appropriate credit, provide a link to the license, and indicate if changes were made. You may do so in any reasonable manner, but not in any way that suggests the licensor endorses you or your use.



NoComercial — No puede utilizar el material para una finalidad comercial.

No hay restricciones adicionales — No puede aplicar términos legales o medidas tecnológicas que legalmente restrinjan realizar aquello que la licencia permite.

Índice general

I	INTRODUCCIÓN	19
II	ENUNCIADOS	23
1.	MODELO	25
2.	SEÑALES	27
	Problema 2.1	27
	Problema 2.2	27
	Problema 2.3	27
	Problema 2.4	28
	Problema 2.5	28
	Problema 2.6	28
	Problema 2.7	28
	Problema 2.8	29
	Problema 2.9	29
	Problema 2.10	29
	Problema 2.11	30
	Problema 2.12 (Abril de 1992)	30
	Problema 2.13 (Abril de 1992)	31
3.	RUIDO	33
	Problema 3.1	33
	Problema 3.2 (Abril de 1992)	33

Problema 3.3 (Febrero de 1993)	34
Problema 3.4 (Febrero de 1997)	34
Problema 3.5 (Junio de 1998)	35
Problema 3.6 (Septiembre de 1998)	36
Problema 3.7 (Junio de 2002)	37
Problema 3.8 (Junio de 2003)	37
Problema 3.9 (Febrero de 2004)	38
Problema 3.10 (Junio de 2004)	39
Problema 3.11 (Septiembre de 2004)	40
Problema 3.12 (Noviembre de 2004)	40
Problema 3.13 (Septiembre de 2005)	40
Problema 3.14 (Febrero de 2006)	41
Problema 3.15 (Septiembre de 2006)	41
Problema 3.16 (Junio de 2007)	42
Problema 3.17 (Enero de 2010)	42
Problema 3.18 (Junio de 2010)	43
Problema 3.19 (Julio de 2010)	43
Problema 3.20 (Mayo de 2011)	44
Problema 3.21 (Junio de 2011)	44
Problema 3.22 (Julio de 2011)	45
Problema 3.23 (Julio de 2011)	45
Problema 3.24 (Enero de 2012)	46
Problema 3.25 (Junio de 2012)	47
Problema 3.26 (Abril de 2013)	47

4. DISTORSIÓN 49

Problema 4.1	49
Problema 4.2	49
Problema 4.3	50
Problema 4.4 (Septiembre de 2002)	51
Problema 4.5 (Junio de 2004)	52
Problema 4.6 (Septiembre de 2004)	52
Problema 4.7 (Septiembre de 2005)	53
Problema 4.8 (Junio de 2006)	53
Problema 4.9 (Junio de 2007)	54
Problema 4.10 (Septiembre de 2007)	54
Problema 4.11 (Septiembre de 2008)	55
Problema 4.12 (Junio de 2009)	55
Problema 4.13 (Enero de 2010)	56

Problema 4.14 (Junio de 2010)	56
Problema 4.15 (Julio de 2010)	57
Problema 4.16 (Diciembre de 2010)	58
Problema 4.17 (Junio de 2011)	58
Problema 4.18 (Julio de 2011)	58
Problema 4.19 (Enero de 2012)	59
Problema 4.20 (Junio de 2012)	60
Problema 4.21 (Julio de 2012)	60
Problema 4.22 (Abril de 2013)	61

5. MODULACIÓN ANALÓGICA 63

Problema 5.1	63
Problema 5.2 (Abril de 1992)	64
Problema 5.3 (Septiembre de 1992)	64
Problema 5.4 (Febrero de 1993)	65
Problema 5.5 (Febrero de 1993)	66
Problema 5.6 (Junio de 1993)	66
Problema 5.7 (Junio de 1993)	68
Problema 5.8 (Septiembre de 1993)	68
Problema 5.9 (Septiembre de 1993)	69
Problema 5.10 (Febrero de 1994)	70
Problema 5.11 (Junio de 1994)	71
Problema 5.12 (Junio de 1994)	72
Problema 5.13 (Junio de 1994)	73
Problema 5.14 (Septiembre de 1994)	74
Problema 5.15 (Febrero de 1995)	75
Problema 5.16 (Junio de 1995)	76
Problema 5.17 (Septiembre de 1995)	77
Problema 5.18 (Junio de 1996)	78
Problema 5.19 (Septiembre de 1996)	79
Problema 5.20 (Febrero de 1997)	80
Problema 5.21 (Junio de 1997)	81
Problema 5.22 (Septiembre de 1997)	82
Problema 5.23 (Diciembre de 1997)	84
Problema 5.24 (Junio de 1998)	85
Problema 5.25 (Septiembre de 1998)	86
Problema 5.26 (Septiembre de 1999)	87
Problema 5.27 (Junio de 2000)	88

Problema 5.28 (Septiembre de 2000)	89
Problema 5.29 (Junio de 2002)	90
Problema 5.30 (Junio de 2002)	91
Problema 5.31 (Enero de 2003)	92
Problema 5.32 (Junio de 2003)	92
Problema 5.33 (Septiembre de 2003)	93
Problema 5.34 (Febrero de 2004)	94
Problema 5.35 (Junio de 2004)	95
Problema 5.36 (Noviembre de 2004)	95
Problema 5.37 (Noviembre de 2004)	96
Problema 5.38 (Junio de 2005)	97
Problema 5.39 (Febrero de 2006)	98
Problema 5.40 (Febrero de 2006)	99
Problema 5.41 (Junio de 2006)	99
Problema 5.42 (Septiembre de 2006)	100
Problema 5.43 (Enero de 2007)	101
Problema 5.44 (Junio de 2007)	102
Problema 5.45 (Septiembre de 2007)	104
Problema 5.46 (Septiembre de 2007)	104
Problema 5.47 (Febrero de 2008)	105
Problema 5.48 (Febrero de 2008)	106
Problema 5.49 (Junio de 2008)	106
Problema 5.50 (Septiembre de 2008)	108
Problema 5.51 (Septiembre de 2008)	108
Problema 5.52 (Enero de 2009)	109
Problema 5.53 (Junio de 2009)	110
Problema 5.54 (Junio de 2009)	111
Problema 5.55 (Septiembre de 2009)	112
Problema 5.56 (Junio de 2010)	113
Problema 5.57 (Julio de 2010)	114
Problema 5.58 (Diciembre de 2010)	115
Problema 5.59 (Diciembre de 2010)	116
Problema 5.60 (Mayo de 2011)	117
Problema 5.61 (Mayo de 2011)	117
Problema 5.62 (Junio de 2011)	118
Problema 5.63 (Julio de 2011)	119
Problema 5.64 (Julio de 2011)	120
Problema 5.65 (Julio de 2011)	121

Problema 5.66 (Enero de 2012)	123
Problema 5.67 (Junio de 2012)	124
Problema 5.68 (Junio de 2012)	125
Problema 5.69 (Junio de 2012)	126
Problema 5.70 (Julio de 2012)	126
Problema 5.71 (Julio de 2012)	128
Problema 5.72 (Enero de 2013)	129
Problema 5.73 (Enero de 2013)	130
Problema 5.74 (Abril de 2013)	131
Problema 5.75 (Junio de 2013)	131
Problema 5.76 (Julio de 2013)	132
Problema 5.77 (Julio de 2013)	134

6. CONVERSIÓN A/D, MIC **137**

Problema 6.1	137
Problema 6.2 (Septiembre de 1996)	138
Problema 6.3 (Junio de 2002)	139
Problema 6.4 (Septiembre de 2002)	140
Problema 6.5 (Junio de 2004)	141
Problema 6.6 (Junio de 2006)	142
Problema 6.7 (Junio de 2007)	142
Problema 6.8 (Enero de 2008)	142
Problema 6.9 (Junio de 2010)	143
Problema 6.10 (Julio de 2010)	143
Problema 6.11 (Enero de 2012)	144
Problema 6.12 (Junio de 2012)	144
Problema 6.13 (Julio de 2013)	145

7. TX DIG. BB CON FILTRADO **147**

Problema 7.1	147
Problema 7.2 (Septiembre de 1993)	147
Problema 7.3 (Junio de 1994)	149
Problema 7.4 (Junio de 1994)	150
Problema 7.5 (Septiembre de 1995)	151
Problema 7.6 (Febrero de 1996)	153
Problema 7.7 (Diciembre de 1996)	153
Problema 7.8 (Junio de 1999)	154
Problema 7.9 (Septiembre de 2001)	156
Problema 7.10 (Junio de 2003)	157

Problema 7.11 (Septiembre de 2004)	158
Problema 7.12 (Julio de 2011)	159
Problema 7.13 (Julio de 2012)	159
Problema 7.14 (Enero de 2013)	160
Problema 7.15 (Junio de 2013)	161
8. TX DIG. BB CON RUIDO	163
Problema 8.1 (Junio de 1996)	163
Problema 8.2 (Junio de 1997)	164
Problema 8.3 (Septiembre de 1997)	165
Problema 8.4 (Junio de 1998)	167
Problema 8.5 (Septiembre de 1998)	168
Problema 8.6 (Junio de 2001)	168
Problema 8.7 (Febrero de 2004)	170
Problema 8.8 (Junio de 2004)	170
Problema 8.9 (Noviembre de 2004)	171
Problema 8.10 (Junio de 2008)	171
Problema 8.11 (Enero de 2012)	172
Problema 8.12 (Junio de 2012)	172
Problema 8.13 (Julio de 2012)	173
Problema 8.14 (Junio de 2013)	173
9. MODULACIÓN DIGITAL	175
Problema 9.1	175
Problema 9.2	176
Problema 9.3 (Febrero de 1994)	177
Problema 9.4 (Junio de 1994)	178
Problema 9.5 (Junio de 1995)	180
Problema 9.6 (Septiembre de 1995)	181
Problema 9.7 (Febrero de 1996)	182
Problema 9.8 (Junio de 1996)	183
Problema 9.9 (Septiembre de 1996)	185
Problema 9.10 (Febrero de 1997)	187
Problema 9.11 (Junio de 1997)	188
Problema 9.12 (Septiembre de 1997)	189
Problema 9.13 (Junio de 1998)	190
Problema 9.14 (Noviembre de 1998)	190
Problema 9.15 (Junio de 1999)	191
Problema 9.16 (Septiembre de 1999)	193

Problema 9.17 (Junio de 2000)	193
Problema 9.18 (Septiembre de 2000)	195
Problema 9.19 (Junio de 2001)	196
Problema 9.20 (Septiembre de 2001)	197
Problema 9.21 (Septiembre de 2001)	198
Problema 9.22 (Junio de 2002)	199
Problema 9.23 (Septiembre de 2002)	200
Problema 9.24 (Junio de 2003)	201
Problema 9.25 (Septiembre de 2003)	202
Problema 9.26 (Junio de 2004)	203
Problema 9.27 (Septiembre de 2004)	204
Problema 9.28 (Septiembre de 2004)	205
Problema 9.29 (Noviembre de 2004)	206
Problema 9.30 (Febrero de 2006)	206
Problema 9.31 (Febrero de 2006)	207
Problema 9.32 (Junio de 2006)	208
Problema 9.33 (Septiembre de 2006)	208
Problema 9.34 (Septiembre de 2006)	210
Problema 9.35 (Septiembre de 2006)	210
Problema 9.36 (Enero de 2007)	211
Problema 9.37 (Enero de 2007)	212
Problema 9.38 (Junio de 2007)	212
Problema 9.39 (Junio de 2007)	213
Problema 9.40 (Septiembre de 2007)	214
Problema 9.41 (Septiembre de 2007)	214
Problema 9.42 (Septiembre de 2007)	215
Problema 9.43 (Febrero de 2008)	216
Problema 9.44 (Junio de 2008)	216
Problema 9.45 (Septiembre de 2008)	217
Problema 9.46 (Septiembre de 2008)	217
Problema 9.47 (Septiembre de 2008)	218
Problema 9.48 (Enero de 2009)	218
Problema 9.49 (Enero de 2009)	219
Problema 9.50 (Enero de 2009)	219
Problema 9.51 (Junio de 2009)	220
Problema 9.52 (Junio de 2009)	222
Problema 9.53 (Septiembre de 2009)	222
Problema 9.54 (Septiembre de 2009)	222

Problema 9.55 (Enero de 2010)	223
Problema 9.56 (Enero de 2010)	223
Problema 9.57 (Enero de 2010)	223
Problema 9.58 (Junio de 2010)	224
Problema 9.59 (Junio de 2010)	225
Problema 9.60 (Julio de 2010)	226
Problema 9.61 (Julio de 2010)	226
Problema 9.62 (Diciembre de 2010)	228
Problema 9.63 (Diciembre de 2010)	229
Problema 9.64 (Diciembre de 2010)	229
Problema 9.65 (Mayo de 2011)	230
Problema 9.66 (Mayo de 2011)	231
Problema 9.67 (Mayo de 2011)	231
Problema 9.68 (Junio de 2011)	232
Problema 9.69 (Junio de 2011)	232
Problema 9.70 (Junio de 2011)	233
Problema 9.71 (Julio de 2011)	234
Problema 9.72 (Julio de 2011)	235
Problema 9.73 (Julio de 2011)	236
Problema 9.74 (Julio de 2011)	237
Problema 9.75 (Enero de 2012)	237
Problema 9.76 (Junio de 2012)	239
Problema 9.77 (Junio de 2012)	239
Problema 9.78 (Julio de 2012)	240
Problema 9.79 (Enero de 2013)	241
Problema 9.80 (Enero de 2013)	242
Problema 9.81 (Abril de 2013)	244
Problema 9.82 (Abril de 2013)	245
Problema 9.83 (Junio de 2013)	246
Problema 9.84 (Julio de 2013)	248
 III SOLUCIONES	 251
 1. MODELO	 255
 2. SEÑALES	 257
Problema 2.1	257
Problema 2.2	258

Problema 2.3	258
Problema 2.4	258
Problema 2.5	259
Problema 2.6	260
Problema 2.7	260
Problema 2.8	261
Problema 2.9	262
Problema 2.10	262
Problema 2.11	264
Problema 2.12 (Abril de 1992)	264
Problema 2.13 (Abril de 1992)	266

3. RUIDO 269

Problema 3.1	269
Problema 3.2 (Abril de 1992)	270
Problema 3.3 (Febrero de 1993)	270
Problema 3.4 (Febrero de 1997)	271
Problema 3.5 (Junio de 1998)	272
Problema 3.6 (Septiembre de 1998)	273
Problema 3.7 (Junio de 2002)	275
Problema 3.8 (Junio de 2003)	276
Problema 3.9 (Febrero de 2004)	276
Problema 3.10 (Junio de 2004)	278
Problema 3.11 (Septiembre de 2004)	278
Problema 3.12 (Noviembre de 2004)	279
Problema 3.13 (Septiembre de 2005)	279
Problema 3.14 (Febrero de 2006)	280
Problema 3.15 (Septiembre de 2006)	281
Problema 3.16 (Junio de 2007)	282
Problema 3.17 (Enero de 2010)	283
Problema 3.18 (Junio de 2010)	283
Problema 3.19 (Julio de 2010)	284
Problema 3.20 (Mayo de 2011)	285
Problema 3.21 (Junio de 2011)	286
Problema 3.22 (Julio de 2011)	287
Problema 3.23 (Julio de 2011)	288
Problema 3.24 (Enero de 2012)	289
Problema 3.25 (Junio de 2012)	289
Problema 3.26 (Abril de 2013)	290

4. DISTORSIÓN 291

Problema 4.1	291
Problema 4.2	292
Problema 4.3	293
Problema 4.4 (Septiembre de 2002)	296
Problema 4.5 (Junio de 2004)	298
Problema 4.6 (Septiembre de 2004)	299
Problema 4.7 (Septiembre de 2005)	300
Problema 4.8 (Junio de 2006)	301
Problema 4.9 (Junio de 2007)	302
Problema 4.10 (Septiembre de 2007)	303
Problema 4.11 (Septiembre de 2008)	304
Problema 4.12 (Junio de 2009)	305
Problema 4.13 (Enero de 2010)	305
Problema 4.14 (Junio de 2010)	306
Problema 4.15 (Julio de 2010)	307
Problema 4.16 (Diciembre de 2010)	308
Problema 4.17 (Junio de 2011)	308
Problema 4.18 (Julio de 2011)	309
Problema 4.19 (Enero de 2012)	311
Problema 4.20 (Junio de 2012)	312
Problema 4.21 (Julio de 2012)	313
Problema 4.22 (Abril de 2013)	314
 5. MODULACIÓN ANALÓGICA	 315
Problema 5.1	315
Problema 5.2 (Abril de 1992)	317
Problema 5.3 (Septiembre de 1992)	319
Problema 5.4 (Febrero de 1993)	321
Problema 5.5 (Febrero de 1993)	322
Problema 5.6 (Junio de 1993)	323
Problema 5.7 (Junio de 1993)	324
Problema 5.8 (Septiembre de 1993)	326
Problema 5.9 (Septiembre de 1993)	326
Problema 5.10 (Febrero de 1994)	328
Problema 5.11 (Junio de 1994)	330
Problema 5.12 (Junio de 1994)	332
Problema 5.13 (Junio de 1994)	334
Problema 5.14 (Septiembre de 1994)	335
Problema 5.15 (Febrero de 1995)	336

Problema 5.16 (Junio de 1995)	339
Problema 5.17 (Septiembre de 1995)	341
Problema 5.18 (Junio de 1996)	343
Problema 5.19 (Septiembre de 1996)	345
Problema 5.20 (Febrero de 1997)	346
Problema 5.21 (Junio de 1997)	348
Problema 5.22 (Septiembre de 1997)	349
Problema 5.23 (Diciembre de 1997)	350
Problema 5.24 (Junio de 1998)	352
Problema 5.25 (Septiembre de 1998)	353
Problema 5.26 (Septiembre de 1999)	355
Problema 5.27 (Junio de 2000)	356
Problema 5.28 (Septiembre de 2000)	358
Problema 5.29 (Junio de 2002)	359
Problema 5.30 (Junio de 2002)	360
Problema 5.31 (Enero de 2003)	361
Problema 5.32 (Junio de 2003)	363
Problema 5.33 (Septiembre de 2003)	364
Problema 5.34 (Febrero de 2004)	365
Problema 5.35 (Junio de 2004)	366
Problema 5.36 (Noviembre de 2004)	367
Problema 5.37 (Noviembre de 2004)	368
Problema 5.38 (Junio de 2005)	369
Problema 5.39 (Febrero de 2006)	371
Problema 5.40 (Febrero de 2006)	372
Problema 5.41 (Junio de 2006)	373
Problema 5.42 (Septiembre de 2006)	374
Problema 5.43 (Enero de 2007)	375
Problema 5.44 (Junio de 2007)	377
Problema 5.45 (Septiembre de 2007)	378
Problema 5.46 (Septiembre de 2007)	379
Problema 5.47 (Febrero de 2008)	381
Problema 5.48 (Febrero de 2008)	382
Problema 5.49 (Junio de 2008)	382
Problema 5.50 (Septiembre de 2008)	384
Problema 5.51 (Septiembre de 2008)	385
Problema 5.52 (Enero de 2009)	386
Problema 5.53 (Junio de 2009)	387

Problema 5.54 (Junio de 2009)	388
Problema 5.55 (Septiembre de 2009)	389
Problema 5.56 (Junio de 2010)	391
Problema 5.57 (Julio de 2010)	392
Problema 5.58 (Diciembre de 2010)	394
Problema 5.59 (Diciembre de 2010)	395
Problema 5.60 (Mayo de 2011)	396
Problema 5.61 (Mayo de 2011)	397
Problema 5.62 (Junio de 2011)	398
Problema 5.63 (Julio de 2011)	400
Problema 5.64 (Julio de 2011)	400
Problema 5.65 (Julio de 2011)	402
Problema 5.66 (Enero de 2012)	404
Problema 5.67 (Junio de 2012)	405
Problema 5.68 (Junio de 2012)	407
Problema 5.69 (Junio de 2012)	408
Problema 5.70 (Julio de 2012)	409
Problema 5.71 (Julio de 2012)	411
Problema 5.72 (Enero de 2013)	412
Problema 5.73 (Enero de 2013)	413
Problema 5.74 (Abril de 2013)	414
Problema 5.75 (Julio de 2013)	416
Problema 5.76 (Julio de 2013)	418
Problema 5.77 (Julio de 2013)	420
 6. CONVERSIÓN A/D, MIC	 423
Problema 6.1	423
Problema 6.2 (Septiembre de 1996)	426
Problema 6.3 (Junio de 2002)	428
Problema 6.4 (Septiembre de 2002)	430
Problema 6.5 (Junio de 2004)	432
Problema 6.6 (Junio de 2006)	433
Problema 6.7 (Junio de 2007)	433
Problema 6.8 (Enero de 2008)	434
Problema 6.9 (Junio de 2010)	435
Problema 6.10 (Julio de 2010)	435
Problema 6.11 (Enero de 2012)	436
Problema 6.12 (Junio de 2012)	437

Problema 6.13 (Julio de 2013)	438
---	-----

7. TX DIG. BB CON FILTRADO 439

Problema 7.1	439
Problema 7.2 (Septiembre de 1993)	440
Problema 7.3 (Junio de 1994)	441
Problema 7.4 (Junio de 1994)	443
Problema 7.5 (Septiembre de 1995)	444
Problema 7.6 (Febrero de 1996)	445
Problema 7.7 (Diciembre de 1996)	447
Problema 7.8 (Junio de 1999)	449
Problema 7.9 (Septiembre de 2001)	450
Problema 7.10 (Junio de 2003)	452
Problema 7.11 (Septiembre de 2004)	453
Problema 7.12 (Julio de 2011)	454
Problema 7.13 (Julio de 2012)	454
Problema 7.14 (Enero de 2013)	456
Problema 7.15 (Junio de 2013)	457

8. TX DIG. BB CON RUIDO 459

Problema 8.1 (Junio de 1996)	459
Problema 8.2 (Junio de 1997)	462
Problema 8.3 (Septiembre de 1997)	465
Problema 8.4 (Junio de 1998)	466
Problema 8.5 (Septiembre de 1998)	468
Problema 8.6 (Junio de 2001)	470
Problema 8.7 (Febrero de 2004)	472
Problema 8.8 (Junio de 2004)	473
Problema 8.9 (Noviembre de 2004)	474
Problema 8.10 (Junio de 2008)	475
Problema 8.11 (Enero de 2012)	475
Problema 8.12 (Junio de 2012)	476
Problema 8.13 (Julio de 2012)	477
Problema 8.14 (Junio de 2013)	478

9. MODULACIÓN DIGITAL 481

Problema 9.1	481
Problema 9.2	485
Problema 9.3 (Febrero de 1994)	487

Problema 9.4 (Junio de 1994)	490
Problema 9.5 (Junio de 1995)	493
Problema 9.6 (Septiembre de 1995)	497
Problema 9.7 (Febrero de 1996)	500
Problema 9.8 (Junio de 1996)	502
Problema 9.9 (Septiembre de 1996)	503
Problema 9.10 (Febrero de 1997)	506
Problema 9.11 (Junio de 1997)	509
Problema 9.12 (Septiembre de 1997)	511
Problema 9.13 (Junio de 1998)	514
Problema 9.14 (Noviembre de 1998)	515
Problema 9.15 (Junio de 1999)	518
Problema 9.16 (Septiembre de 1999)	519
Problema 9.17 (Junio de 2000)	520
Problema 9.18 (Septiembre de 2000)	523
Problema 9.19 (Junio de 2001)	525
Problema 9.20 (Septiembre de 2001)	527
Problema 9.21 (Septiembre de 2001)	528
Problema 9.22 (Junio de 2002)	529
Problema 9.23 (Septiembre de 2002)	531
Problema 9.24 (Junio de 2003)	533
Problema 9.25 (Septiembre de 2003)	534
Problema 9.26 (Junio de 2004)	535
Problema 9.27 (Septiembre de 2004)	537
Problema 9.28 (Septiembre de 2004)	538
Problema 9.29 (Noviembre de 2004)	539
Problema 9.30 (Febrero de 2006)	540
Problema 9.31 (Febrero de 2006)	541
Problema 9.32 (Junio de 2006)	542
Problema 9.33 (Septiembre de 2006)	542
Problema 9.34 (Septiembre de 2006)	543
Problema 9.35 (Septiembre de 2006)	544
Problema 9.36 (Enero de 2007)	545
Problema 9.37 (Enero de 2007)	545
Problema 9.38 (Junio de 2007)	546
Problema 9.39 (Junio de 2007)	549
Problema 9.40 (Septiembre de 2007)	549
Problema 9.41 (Septiembre de 2007)	550

Problema 9.42 (Septiembre de 2007)	550
Problema 9.43 (Febrero de 2008)	552
Problema 9.44 (Junio de 2008)	553
Problema 9.45 (Septiembre de 2008)	555
Problema 9.46 (Septiembre de 2008)	556
Problema 9.47 (Septiembre de 2008)	557
Problema 9.48 (Enero de 2009)	558
Problema 9.49 (Enero de 2009)	559
Problema 9.50 (Junio de 2009)	559
Problema 9.51 (Junio de 2009)	561
Problema 9.52 (Junio de 2009)	563
Problema 9.53 (Septiembre de 2009)	564
Problema 9.54 (Septiembre de 2009)	564
Problema 9.55 (Enero de 2010)	565
Problema 9.56 (Enero de 2010)	565
Problema 9.57 (Enero de 2010)	566
Problema 9.58 (Junio de 2010)	567
Problema 9.59 (Junio de 2010)	569
Problema 9.60 (Julio de 2010)	570
Problema 9.61 (Julio de 2010)	571
Problema 9.62 (Diciembre de 2010)	573
Problema 9.63 (Diciembre de 2010)	573
Problema 9.64 (Diciembre de 2010)	574
Problema 9.65 (Mayo de 2011)	575
Problema 9.66 (Mayo de 2011)	575
Problema 9.67 (Mayo de 2011)	576
Problema 9.68 (Junio de 2011)	577
Problema 9.69 (Junio de 2011)	578
Problema 9.70 (Junio de 2011)	579
Problema 9.71 (Julio de 2011)	580
Problema 9.72 (Julio de 2011)	582
Problema 9.73 (Julio de 2011)	584
Problema 9.74 (Julio de 2011)	585
Problema 9.75 (Enero de 2012)	586
Problema 9.76 (Junio de 2012)	588
Problema 9.77 (Junio de 2012)	589
Problema 9.78 (Julio de 2012)	591
Problema 9.79 (Enero de 2013)	593

Problema 9.80 (Abril de 2013)	594
Problema 9.81 (Abril de 2013)	595
Problema 9.82 (Junio de 2013)	596
Problema 9.83 (Junio de 2013)	598
Problema 9.84 (Julio de 2013)	601
 IV APÉNDICES	 605
 A. CONSTANTES, GLOSARIO Y SÍMBOLOS	 609
A.1. Constantes	609
A.2. Glosario	610
A.3. Símbolos	614
 B. GRÁFICAS, CUADROS Y FÓRMULAS	 615
B.1. Relaciones trigonométricas	615
B.2. Propiedades de la transformada de Fourier, en f	616
B.3. Pares transformados de Fourier, en f	617
B.4. Distorsión no lineal	618
B.4.1. Armónicos	618
B.4.2. Intermodulación	618
B.5. Funciones de Bessel	620
B.6. Modulaciones analógicas	622
B.7. Función complementaria del error	624
B.8. Calidad en ASK	635
B.9. Calidad en PSK	636
B.10. Calidad en QAM	637
B.11. Calidad en APK	638
B.12. Calidad en FSK	639
B.13. Calidad en las modulaciones digitales	640

Parte I

INTRODUCCIÓN

EN ESTE LIBRO se recopilan problemas de la asignatura *Teoría de la Comunicación*. La mayoría son problemas de examen; el resto son problemas propuestos en clase. Los problemas de examen van acompañados, en el encabezado, por la fecha de la convocatoria a la que corresponden. Con el objeto de que la extensión del libro no sea excesiva, se han seleccionado los enunciados más relevantes, dando preferencia a los de convocatorias recientes.

La primera edición, del 2005, estaba dividida en dos tomos. La segunda edición, del 2008, reunía todo el material en uno sólo, pero no aportaba actualizaciones, aparte de la lógica corrección de erratas. En esta nueva edición se abordan cambios de mayor calado:

- Se ha reestructurado el material conforme a los 9 temas de la parte teórica.
- Se ha creado una nueva maquetación desde cero.
- Se han revisado, y reescrito si procedía, todos los enunciados y resoluciones. Se ha realizado un gran esfuerzo para intentar reducir el número de erratas.
- Se ha modificado la filosofía de la parte de soluciones y resoluciones, ampliando las soluciones escuetas hasta un estado intermedio entre soluciones y resoluciones. (Fundamentalmente, se han añadido más resultados intermedios, y más observaciones.)
- Se ha actualizado el material con enunciados seleccionados de las convocatorias recientes. Esto ha supuesto incluir nuevos problemas y ejercicios de convocatorias que van desde el 2005 hasta el 2013.
- Se han descartado todos los problemas de la edición del 2008 que resultaban redundantes, poco claros, o no se correspondían con el temario actual.
- Al realizar una edición totalmente nueva, se ha podido pasar a un formato electrónico de libre distribución. Los alumnos tendrán disponible el libro en la plataforma MOODLE. Con este nuevo formato se facilitará enormemente la tarea de mantener el material actualizado y libre de erratas.

Tal y como se ha comentado, el libro está organizado siguiendo los 9 temas de la parte teórica de la asignatura. La materia es acumulativa, de modo que, por ejemplo, en el tema 3 pueden aparecer conocimientos del tema 2. Dentro de cada tema, los enunciados están ordenados cronológicamente según las convocatorias.

El desglose del temario en temas es:

- Tema 1: Modelo
- Tema 2: Señales
- Tema 3: Ruido
- Tema 4: Distorsión
- Tema 5: Modulación analógica
- Tema 6: Conversión A/D, MIC
- Tema 7: TX digital BB con filtrado
- Tema 8: TX digital BB con ruido
- Tema 9: Modulación digital

La versión del libro aparece en la fecha de la portada, que es la fecha de la última compilación L^AT_EX y, por tanto, la fecha de la última modificación. Los alumnos podrán comprobar de inmediato si la versión disponible en MOODLE es más reciente que la suya.

Nos hemos tomado la licencia de modificar ligeramente algunos enunciados para mejorar su alcance didáctico. Los problemas van acompañados por una solución con pasos o por una resolución detallada. (En contadas ocasiones, no se incluye la solución de un apartado. Se trata de casos que el alumno puede resolver sin ninguna dificultad.)

En los apéndices se recopilan constantes, abreviaturas, parámetros y símbolos utilizados en el libro. Además, se adjuntan hojas con cuadros (tablas) y gráficas. Todo ello facilitará la resolución de los problemas.

Esperamos que nuestro trabajo sea útil a los alumnos, no sólo para aprobar, sino para aprender mejor la asignatura. Este libro, junto con las transparencias, el libro de ejercicios breves, las prácticas de laboratorio, y la bibliografía recomendada, forman un sólido conjunto docente para afrontar el temario. Esperamos que el lector lo entienda así, y no circunscriba todo su esfuerzo únicamente en uno de los pilares mencionados.

En concreto, el libro de ejercicios breves ofrece la base que el alumno necesita para afrontar el estudio de este libro de problemas.

Queremos agradecer a todos los profesores que han formado parte de la asignatura su esfuerzo, en general, y sus enunciados, en concreto. En este libro se han recopilado enunciados de (por orden alfabético de apellidos) Francisco J. Arqués Orobón, César Briso Rodríguez, Pedro García del Pino, Ignacio Gómez Revuelto, José Enrique González García, Leandro de Haro Ariet, José Manuel Pardo Martín, Ángel Parra Cerada, Antonio Pérez Yuste, Antonio J. Rodríguez Rodríguez y Carlos Rueda Frías. Especialmente, queremos agradecer el excelente legado recibido de la coordinación de Antonio Pérez Yuste y, por supuesto, la inestimable ayuda de José Manuel Pardo que se ha ofrecido a compartir la, a veces pesada, carga de la coordinación de la asignatura. Mención aparte merece José Enrique González García, que es quien más nos ha ayudado durante todos estos años.

Parte II

ENUNCIADOS

Tema 1

MODELO

No hay problemas para este tema.

Tema 2

SEÑALES

Problema 2.1

Una señal está compuesta por tres sinusoides de distinta frecuencia. Dos de ellas tienen una potencia de -13 dBm, mientras que la tercera tiene 100 μ W.

Calcule la potencia de la señal (en mW y en dBm).

Problema 2.2

Sobre una resistencia de $50\ \Omega$ medimos una tensión eficaz de 100 dB μ V. Calcule la potencia (en W y en dBm) disipada en dicha resistencia.

Problema 2.3

Si cuadruplicamos una tensión, en voltios, ¿cuántos dB se incrementa la potencia?

Problema 2.4

En L metros de cable tenemos una atenuación de A dB. ¿Cuántos decibelios se incrementa la atenuación al triplicar la longitud del cable?

Problema 2.5

Se pretende caracterizar la atenuación por unidad de longitud (dB/m) de cierto tipo de cable coaxial, y la ganancia (en dB) de un amplificador, a la frecuencia de trabajo. Para ello se realizan dos medidas. En la primera hay una cascada de 16 m de cable con el amplificador; se inyecta una potencia de 1 μ W y se obtiene a la salida 4 mW. En la segunda hay una cascada de 64 m de cable con el amplificador; se inyecta una potencia de 1 μ W y se obtiene a la salida 250 μ W.

Calcule la atenuación del coaxial por unidad de longitud (dB/m) y la ganancia del amplificador (dB).

Problema 2.6

Tenemos una señal de potencia 20 nW y ancho de banda 8 MHz, y un suelo de ruido (densidad espectral unilateral de potencia) de -147 dBm/Hz. Calcule la relación potencia de señal a potencia de ruido, (S/N) (dB).

Problema 2.7

El receptor de un sistema de radiocomunicaciones está siendo interferido por otros tres sistemas que operan en la misma banda de trabajo. Realizando medidas de calidad se encuentra que la relación señal ruido, (S/N) , es de 20 dB, y las relaciones potencia de señal a potencia interferente i , (S/I_i) , valen 26 dB, 26 dB y 23 dB.

Calcule la relación de calidad total, $S/(N+I)$, teniendo en cuenta tanto el ruido como las interferencias.

Problema 2.8

A la salida de una antena medimos una tensión eficaz de 100 dB_{pV} sobre una impedancia de 50 Ω. Llevamos dicha señal, por un cable coaxial con 50 Ω de impedancia característica y 150 m de longitud, a una carga de 50 Ω. La relación (S/N) en la carga es de 33 dB, y la atenuación del coaxial a la frecuencia de trabajo vale 0,2 dB/m.

Calcule, en dBm, la potencia de ruido que se disipa en la carga.

Problema 2.9

A una antena (ideal) llega una señal con 10 dBm de potencia. Debido a una desadaptación de impedancias sólo se radian 7 dBm. Calcule la potencia reflejada en la antena.

Problema 2.10

Sean las siguientes señales:

$$\text{a) } x(t) = A \cos(2\pi f_0 t) ; \quad -\infty < t < \infty$$

$$\text{b) } x(t) = \left\{ \begin{array}{ll} A \cos(2\pi f_0 t) ; & -T_0/2 \leq t \leq T_0/2 \\ 0 ; & \text{Resto} \end{array} \right. \quad \text{donde } T_0 = \frac{1}{f_0}$$

$$\text{c) } x(t) = \left\{ \begin{array}{ll} A \exp(-a t) ; & t > 0 \\ 0 ; & \text{Resto} \end{array} \right. \quad \text{donde } a > 0$$

$$\text{d) } x(t) = \cos(t) + 5 \cos(5 t) ; \quad -\infty < t < \infty$$

1. Clasifique las señales según estén definidas en energía o potencia.
2. Calcule la potencia o la energía (lo que corresponda) de cada señal.

(Nota: tome $R = 1 \Omega$.)

Problema 2.11

Se aplica un ruido con densidad espectral bilateral constante $G(f) = N_0/2$ (ruido blanco) a una red paso bajo RC , cuya frecuencia de corte es f_{cc} . En la figura 2.1 se observa la red RC . Se recuerda que la transferencia del filtro RC es:

$$H(f) = \frac{1}{1 + j(f/f_{cc})}; \quad f_{cc} = \frac{1}{2\pi RC}$$

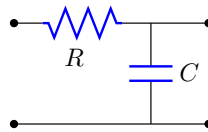


Figura 2.1: Red paso bajo RC .

1. Obtenga la densidad espectral de potencia a la salida de la red.
2. Calcule la potencia media de ruido a la salida de la red.
3. Calcule el ancho de banda equivalente y el ancho de banda a 3 dB para el ruido existente a la salida de la red.

Problema 2.12 (Abril de 1992)

Sea la señal $x(t)$, en voltios, cuando el tiempo, t , está en segundos:

$$x(t) = 2 \cos(500t) + 4 \sin^2(100\pi t + \pi/2); \quad -\infty < t < \infty$$

1. Halle, razonadamente, el valor de pico, el valor medio, el valor cuadrático medio y el valor eficaz.
2. Demuestre si la señal dada es o no periódica y, en caso afirmativo, encuentre su periodo.

Problema 2.13 (Abril de 1992)

Sea una señal, $x(t)$, con densidad espectral de potencia:

$$G_x(f) = \begin{cases} A f^2 ; & |f| \leq B \\ 0 ; & \text{Resto} \end{cases}$$

Calcule el ancho de banda equivalente y el ancho de banda a 3 dB de la señal. Dibuje su espectro y marque los anchos de banda calculados.

Tema 3

RUIDO

Problema 3.1

Sea un analizador de espectros ideal, con impedancia de entrada de $50\ \Omega$. Le introducimos una señal, $x(t)$, acompañada por un ruido de $1\ \text{pW/Hz}$ (densidad espectral unilateral de potencia). La señal es, en voltios:

$$x(t) = 0,1 \cos(2\pi f_1 t) + 0,05 \sin(2\pi f_2 t)$$

Donde: $f_1 = 10^7\ \text{Hz}$; $f_2 = 4 \cdot 10^7\ \text{Hz}$.

Dibuje la pantalla que presentaría el analizador. Datos de la configuración: nivel de referencia $0\ \text{dBm}$; eje vertical $5\ \text{dB/}$; frecuencia central $50\ \text{MHz}$; span total $100\ \text{MHz}$; ancho de banda de resolución $1\ \text{MHz}$; atenuación de entrada $0\ \text{dB}$.

Problema 3.2 (Abril de 1992)

El esquema de bloques de una etapa de un sistema de comunicaciones viene dado en la figura 3.1. Hay adaptación en todos los puntos, y la densidad espectral bilateral de ruido a la entrada es plana, con valor $200 \cdot 1,3806 \cdot 10^{-23}\ \text{W/Hz}$.

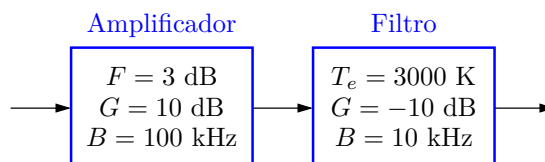


Figura 3.1: Etapa de un sistema de comunicaciones.

1. Calcule el factor de ruido equivalente del conjunto.

2. Calcule la potencia de ruido a la salida.

Problema 3.3 (Febrero de 1993)

Si el ruido que introduce un canal vocal telefónico ($W = 4$ kHz) se modela como blanco, gaussiano y aditivo, sólo resta conocer el factor de ruido o la temperatura equivalente de ruido para tenerlo completamente caracterizado. Para ello se introduce en el canal un tono a 1 kHz con -70 dBm, y se mide la relación señal a ruido a su entrada, $(S/N)_e = 50$ dB, y a su salida, $(S/N)_s = 30$ dB. A partir de estos datos, calcule el factor de ruido del canal.

Problema 3.4 (Febrero de 1997)

Para implementar un receptor de datos en banda base, se dispone de dos amplificadores distintos. En el cuadro 3.1 aparecen los datos conocidos de dichos amplificadores: las ganancias, y las densidades espectrales unilaterales de potencia de ruido a la salida, cuando la temperatura de ruido equivalente a la entrada es $T_0 = 300$ K, y en condiciones de adaptación de impedancias.

Amplificador A	$G_A = 30$ dB	$G_{nsA} = 10^{-17}$ W/Hz
Amplificador B	$G_B = 36$ dB	$G_{nsB} = 10^{-16}$ W/Hz

Cuadro 3.1: Datos de los dos amplificadores.

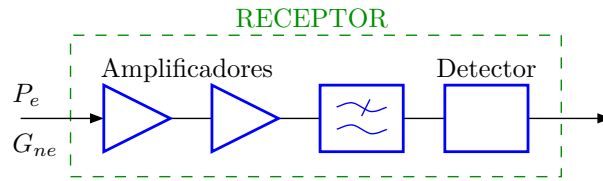
1. Calcule los factores de ruido de ambos amplificadores. Trabaje en unidades logarítmicas. Es típico realizar la siguiente aproximación:

$$10 \log[k T_0 \text{ (mW/Hz)}] \approx -174 \text{ dBm/Hz}$$

2. Si queremos colocar los dos amplificadores en cascada, ¿cuál de ellos deberíamos colocar primero? Justifique su respuesta, y calcule el factor de ruido de la cascada de ambos.

El esquema del receptor empleado se observa en la figura 3.2.

3. Calcule la relación (S/N) (dB) a la entrada del detector, para la configuración de amplificadores elegida en el apartado anterior. Comente el resultado.



Potencia de la señal de entrada: $P_e = -110$ dBm

Den. espec. de ruido unilateral a la entrada: $G_{ne} = -174$ dBm/Hz

Ancho de banda del filtro paso bajo: $B = 1$ MHz

Figura 3.2: Diagrama de bloques del receptor.

Problema 3.5 (Junio de 1998)

Un sistema, que ha de entregar una potencia de señal deseada p_x a su salida, está constituido por un conjunto de M repetidores en cascada (ver figura 3.3). Cada repetidor se modela mediante un amplificador ideal (sin ruido) de ganancia g (veces de potencia), y un filtro pasivo que atenúa $a = g$ (veces de potencia), está a una temperatura T_a (K), y tiene un ancho de banda equivalente de ruido B .

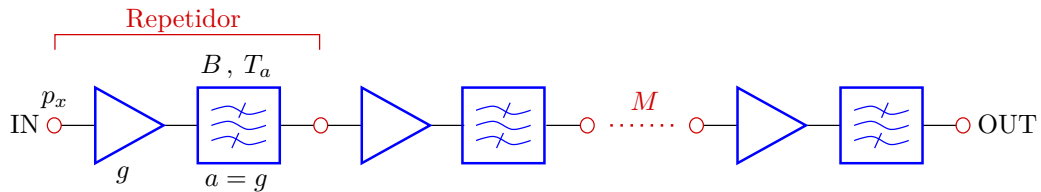


Figura 3.3: Sistema de M repetidores.

1. Calcule la temperatura equivalente de ruido de los M repetidores en cascada, trasladada a la salida del sistema (OUT), en función de M , g y T_a .

A partir de ahora, para el resto del enunciado, suponga que a la entrada se tiene un ruido térmico T_0 .

2. Calcule la expresión de la calidad que se mediría a la entrada, $(s/n)_{IN}$ (v.p.).
3. Calcule la expresión de la calidad a la salida, $(s/n)_{OUT}$ (v.p.).
4. Comparando las dos relaciones (s/n) , en el caso particular de $T_a = T_0$, halle la expresión del factor de ruido del sistema de repetidores, en función de M .

Si $T_a = T_0 = 300$ K, $g = 3$ v.p., $B = 10$ kHz y $M = 3$,

5. Calcule el valor de la figura de ruido del sistema, F (dB).

Problema 3.6 (Septiembre de 1998)

Un sistema de telemando, que cubre distancias cortas, trabaja en banda base. La señal que se envía es una multiplexación en frecuencia de un tono y una señal vocal de calidad reducida. El esquema del receptor se observa en la figura 3.4, donde T_0 , T_1 y T_2 son temperaturas físicas a las que se encuentran diferentes cuadripolos. T_{eA} es la temperatura equivalente de ruido del amplificador, y todas las atenuaciones y ganancias están expresadas en unidades naturales referidas a potencia. En un momento dado se recibe en el punto (A) la señal deseada (multiplexación de tono y señal vocal) de la figura 3.5. El ruido a la entrada —punto (A)— es blanco y se caracteriza mediante su densidad espectral de potencia unilateral: $G_n(f) = 8 \cdot 10^{-21}$ W/Hz. Por supuesto, $T_0 = 300$ K.

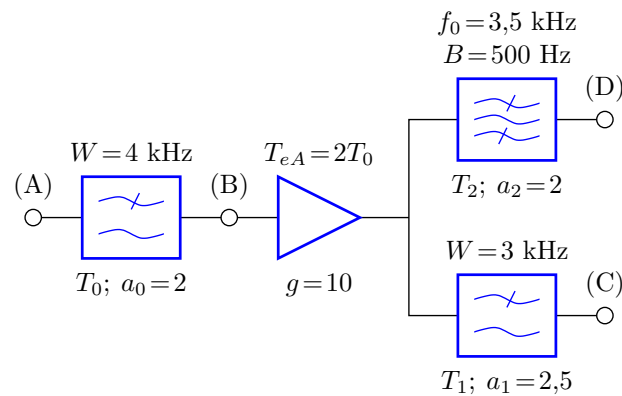


Figura 3.4: Diagrama de bloques del receptor.

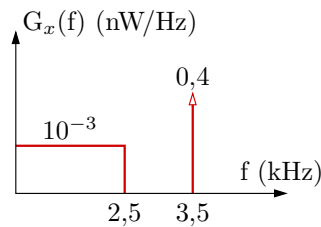


Figura 3.5: Señal recibida.

1. Para operar, se decide sustituir $G_n(f)$ por un ruido térmico. ¿A qué temperatura debería estar la resistencia ruidosa ficticia?
2. Calcule las expresiones de las temperaturas equivalentes de ruido interno del sistema en los puntos (C) y (D). (Deje las expresiones en función de las temperaturas T_1 y T_2 , en caso de que aparezcan; no incluya el ruido presente a la entrada.)
3. Incluyendo ahora el ruido presente a la entrada, calcule la expresión de la potencia total de ruido en los puntos (C) y (D).
4. Midiendo en los puntos (C) y (D) se comprueba que el parámetro de calidad (S/N) tiene el mismo valor. ¿Qué relación debe existir entre T_1 y T_2 ?

Problema 3.7 (Junio de 2002)

En la figura 3.6 se muestran tres formas posibles de conectar un receptor de TV con su antena (todos los valores de parámetros están en dB).

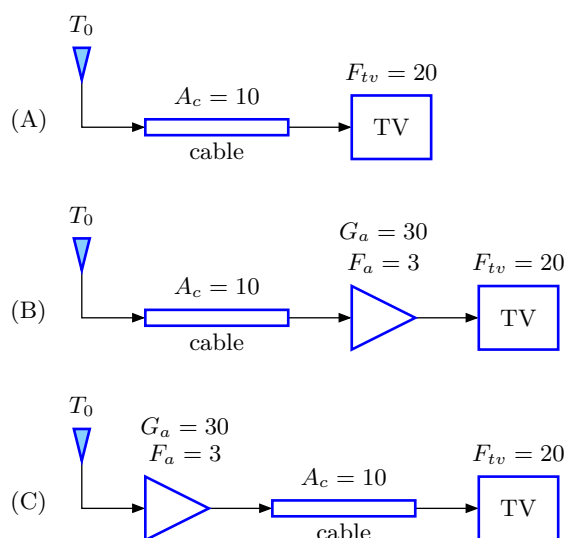


Figura 3.6: Formas de conectar un receptor TV con la antena. (Todos los valores están en dB.)

Considere la antena como una fuente de ruido térmico con temperatura equivalente T_0 . El cable, el amplificador y el receptor de TV son los mismos en los tres casos. El cable se encuentra a temperatura ambiente.

1. Calcule el factor de ruido total para cada una de las tres conexiones.
2. Evalúe razonadamente cuál es el montaje más efectivo para combatir el ruido.
3. Estudie qué cambios habría que hacer en el cable (es decir: calcule el nuevo valor de atenuación) para que las conexiones (A) y (B) alcancen el factor de ruido que se obtuvo para la (C) en el primer apartado. Comente el resultado.

Problema 3.8 (Junio de 2003)

Se ha realizado un amplificador para pequeña señal, y teóricamente de bajo nivel de ruido, en la banda de frecuencias de 1,4 a 1,6 GHz. Se desea medir su ganancia y su factor de ruido. Para ello, se realizan dos medidas en laboratorio, de acuerdo con el esquema de la figura 3.7.

Medida 1: el generador es de RF y transmite una señal sinusoidal con frecuencia 1,5 GHz y potencia -60 dBm. En el analizador se mide, a la frecuencia mencionada, una potencia de -23 dBm.

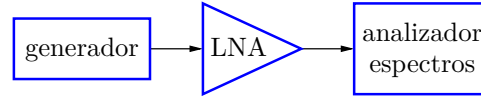


Figura 3.7: Diagrama de bloques de las medidas de laboratorio.

Medida 2: el generador es de ruido y suministra al amplificador una densidad espectral de potencia de ruido (unilateral) igual a $k T_{in}$, donde k es la constante de Boltzmann y T_{in} la temperatura de ruido. Si fijamos una temperatura de ruido $T_{in} = 1000$ K, se mide en el analizador de espectros, en toda la banda de 1,4 a 1,6 GHz, un suelo de ruido (potencia) de $-91,3$ dBm, utilizando para ello un filtro de medida (resolución) con ancho de banda equivalente de ruido de 10 kHz.

¿Cuánto valdrán la ganancia y el factor de ruido del amplificador a la frecuencia de 1,5 GHz?

(Nota: considere adaptación de impedancias en todo el sistema de medida. Desprecie la atenuación de los cables y conectores. Suponga que el ruido del analizador es despreciable frente al ruido del amplificador.)

Problema 3.9 (Febrero de 2004)

Sea el sistema de N repetidores de la figura 3.8 que une un transmisor y un receptor. Cada sección está constituida por un amplificador y un trozo de cable coaxial. El amplificador tiene una ganancia g (v.p.) y un factor de ruido f (v.p.). Cada tramo de cable se encuentra a una temperatura física T_0 , y atenúa a (v.p.). Dicha atenuación, en unidades logarítmicas, es lineal con la longitud: $A(\text{dB}) = \alpha(\text{dB/km}) \cdot L(\text{km})$, siendo α la atenuación por unidad de longitud del coaxial empleado. Se puede considerar que $a \gg 1$. Como es usual en un sistema de repetidores, la ganancia del amplificador es igual a la atenuación del cable ($g = a$). A la salida del transmisor —punto (E)— tenemos una señal x y un ruido $n = k T_0 B$, ambos expresados como potencias en unidades naturales. A la entrada del receptor —punto (S)— se requiere una calidad $(S/N)_s$ en dB. El ancho de banda equivalente de ruido del sistema es B . La distancia total desde el transmisor hasta el receptor es L_T .

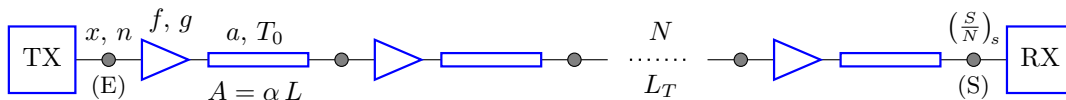


Figura 3.8: Sistema de N repetidores entre un transmisor y un receptor.

Para los cálculos numéricos tome los siguientes valores:

$$\begin{array}{ll}
T_0 = 300 \text{ K} & \alpha = 5 \text{ dB/100m} \\
B = 241,45 \text{ kHz} & N = 25 \\
x = 1 \text{ nW} & L_T = 25 \text{ km} \\
k = 1,3806 \cdot 10^{-23} \text{ J/Hz} & (S/N)_s = 40 \text{ dB}
\end{array}$$

(Nota: No sustituya valores numéricos en las preguntas **1** y **2**; deje el resultado en función de los parámetros del enunciado.)

1. Calcule la expresión de la temperatura equivalente de ruido del sistema de repetidores, T_{eT} , en función de los parámetros del enunciado.
2. Calcule la expresión de la calidad en el punto (S), $(s/n)_s$ (en unidades naturales), en función de los parámetros del enunciado.
3. Calcule el valor de la figura de ruido del amplificador, $F(\text{dB})$.
4. Calcule el valor de la ganancia del amplificador, $G(\text{dB})$.
5. Para el sistema descrito (con los valores del enunciado, $a = g$, $a \gg 1$, etc.), si cambiamos el tipo de coaxial por otro con más atenuación (α mayor, a mayor, y, por tanto, g mayor), ¿qué ocurre con la calidad en el punto (S), $(S/N)_s$?

Problema 3.10 (Junio de 2004)

En la figura 3.9 se observa el diagrama de bloques de un sistema. En la entrada (i) se inyecta una señal de $4 \mu\text{W}$. Puede considerar que el ruido presente en (i) es despreciable. El amplificador gana 20 dB y su figura de ruido vale 6 dB . El cable tiene $L(\text{km})$ de longitud, atenúa 5 dB/100m , y se encuentra a temperatura ambiente ($T_0 = 300 \text{ K}$). La atenuación total del cable es $A(\text{dB})$, o $a(\text{v.p.})$. Como es usual: $a \gg 1$. La relación señal ruido a la salida, punto (o), vale 30 dB . El ancho de banda equivalente de ruido es de $9661,8 \text{ Hz}$.

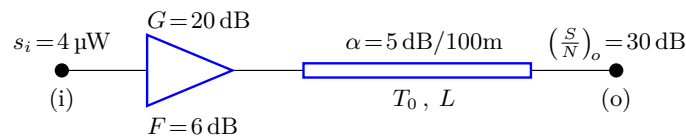


Figura 3.9: Diagrama de bloques.

Calcule la longitud del cable.

Problema 3.11 (Septiembre de 2004)

Datos del sistema de recepción de la figura 3.10:

- Ancho de banda de trabajo: 100 kHz.
- T_{in} : temperatura de ruido de la antena, es decir, temperatura de ruido a la entrada del amplificador.
- s_{in} : potencia de señal captada por la antena.

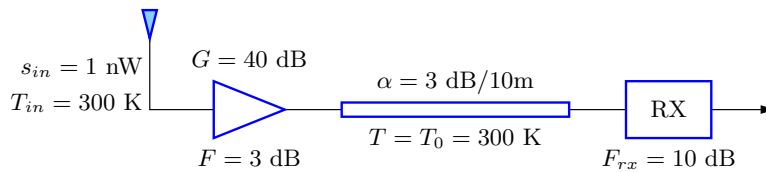


Figura 3.10: Sistema de recepción.

Calcule la máxima longitud del cable coaxial para asegurar a la salida del receptor una relación señal a ruido de al menos 46 dB.

Problema 3.12 (Noviembre de 2004)

En un laboratorio se realizan medidas sobre un amplificador caracterizado por: ganancia $G = 30$ dB, figura de ruido $F = 6$ dB, y ancho de banda equivalente de ruido B_{eq} . Con un generador de señal y una fuente de ruido térmico, se inyecta una relación $(S/N)_e = 23$ dB, y se mide a la salida $(S/N)_s = 20$ dB. ¿Cuánto vale la temperatura de la fuente de ruido térmico?

(Nota: Trabaje con B_{eq} y k —cte. de Boltzmann— sin sustituir por valores numéricos hasta el final. Razone su respuesta.)

Problema 3.13 (Septiembre de 2005)

Para una transmisión analógica se emplea un conjunto de secciones en cascada. Cada sección, de 2 km, está compuesta por un trozo de cable coaxial y un amplificador (en ese orden). El cable atenúa 2 dB/100m. Cada amplificador gana 40 dB y tiene una figura de ruido de 6 dB. Todos los elementos se encuentran a T_0 .

Si se transmite una señal de 18 μ W por un ancho de banda de 50 kHz, y se requiere una calidad $(S/N) = 50$ dB, ¿hasta qué distancia se puede transmitir? (Considere que la temperatura de ruido a la entrada es T_0 .)

Problema 3.14 (Febrero de 2006)

En la figura 3.11 se puede ver el diagrama de bloques del subsistema de recepción de un sistema de comunicaciones. Datos:

- Señal recibida a la salida de la antena receptora: 20 pW.
- Ancho de banda de la señal recibida: 32 MHz.
- Temperatura de ruido a la entrada: 160 K.
- Ganancia del amplificador: 40 dB.
- Figura de ruido del amplificador: 0,9 dB.
- El cable se encuentra a T_0 .
- Atenuación por unidad de longitud del cable: 1,6 dB/10m.
- Longitud del cable: 50 m.
- Figura de ruido del mezclador: 3 dB.

Calcule la relación señal a ruido en el punto FI (salida del conversor de frecuencia —*down converter*—).

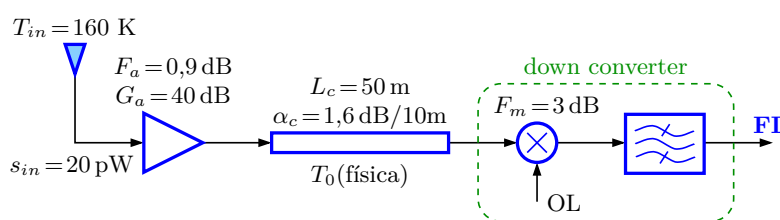


Figura 3.11: Subsistema de recepción.

Problema 3.15 (Septiembre de 2006)

Se desea medir el factor de ruido de un amplificador con ganancia 20 dB. Para ello se realizan dos medidas con un analizador de espectros (siempre con su atenuador interno a 0 dB).

Medida 1: con una carga de 50Ω a la entrada del analizador, y el ancho de banda de resolución con 1 Hz, se mide un suelo de ruido de -165 dBm.

Medida 2: con una carga de 50Ω a la entrada del amplificador, la salida del amplificador conectada al analizador, y el ancho de banda de resolución con 1 Hz, se mide un suelo de ruido de $-143,7$ dBm.

Notas: se supone adaptación de impedancias; considere que ambas medidas se realizan a temperatura ambiente.

Calcule el factor de ruido (en dB) del amplificador. Explique los fundamentos del proceso de medida.

Problema 3.16 (Junio de 2007)

Sea el sistema de la figura 3.12.

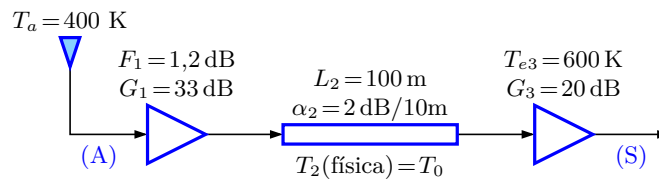


Figura 3.12: Sistema bajo estudio.

Calcule la relación señal a ruido (dB) en recepción (punto S) si en la antena (punto A) hay una señal deseada de 3 nW. Considere que el ancho de banda equivalente de ruido vale 40 MHz.

Problema 3.17 (Enero de 2010)

Se desea medir la figura de ruido de un amplificador de RF, que trabaja en la banda de 796-804 MHz. Para ello se realizan dos medidas, siempre con adaptación sobre 50Ω :

Medida 1: Se genera, y se lleva a la entrada del amplificador, un tono de frecuencia 800 Mz y potencia -30 dBm. A la salida del amplificador, que está trabajando en su zona lineal, se mide una potencia de -10 dBm.

Medida 2: Se genera, y se lleva a la entrada del amplificador, un ruido blanco y gaussiano con densidad espectral de potencia unilateral 10^{-20} W/Hz. La salida del amplificador se lleva a un analizador de espectros, donde se mide un suelo de ruido (en la banda de trabajo) de $-96,4$ dBm.

Configuración del analizador:

- Ancho de banda de resolución: 30 kHz.
- Atenuador de entrada: 0 dB.
- Figura de ruido del analizador (en la banda de trabajo): 20 dB.

Calcule la figura de ruido del amplificador bajo estudio.

Problema 3.18 (Junio de 2010)

Sea un sistema de repetidores, con M secciones. Cada una está compuesta por un cable (cuadripolo 1), un filtro (cuadripolo 2) y un amplificador (cuadripolo 3). Datos del cable: longitud total $L_1 = 500$ m; atenuación por unidad de longitud $\alpha_1 = 6$ dB/100m; como es usual, se encuentra a temperatura ambiente. Datos del filtro: pasivo, con atenuación $A_2 = 3$ dB; se encuentra a T_0 ; ancho de banda $B_2 = 4$ kHz. Datos del amplificador: ganancia igual a la atenuación de una sección; figura de ruido $F_3 = 6$ dB. A la entrada del sistema tenemos una señal $S_{in} = -56,56$ dBm, y una densidad espectral unilateral de ruido blanco $N_{0in} = 2,208 \cdot 10^{-16}$ W/Hz. A la salida se requiere una calidad $(S/N)_s = 30$ dB.

1. Calcule la ganancia del amplificador, G_3 (dB).
2. Calcule la temperatura equivalente de ruido interno de una sección, T_{ei} (K).
3. Calcule la temperatura equivalente de ruido interno del sistema de repetidores, T_{eM} (K), en función de M .
4. Calcule la calidad a la salida, $(s/n)_s$ (veces de pot.), en función de M .
5. Calcule el valor máximo de M , y la longitud máxima que puede alcanzar el sistema, L_T (km).

Problema 3.19 (Julio de 2010)

1. A la salida de una antena se mide una tensión eficaz de 86 dB μ V sobre una impedancia de trabajo de 75 Ω . Se lleva dicha señal por un cable coaxial (con impedancia característica 75 Ω), y se conecta a una resistencia de 75 Ω . Sabiendo que la relación S/N en la resistencia de carga es de 47 dB, calcule (en dBm) la potencia de ruido sobre la carga. Datos del cable: longitud 95 metros; atenuación a la frecuencia de trabajo 0,25 dB/m.
2. El receptor de un sistema de radiocomunicaciones está siendo interferido por otros tres sistemas que operan en la misma banda de trabajo. Datos: la relación señal a ruido térmico es de 17 dB; dos de las relaciones señal a interferencia valen 22 dB, y la tercera relación señal a interferencia es de 18 dB. Calcule la relación señal a ruido más interferencias.

Problema 3.20 (Mayo de 2011)

A la entrada de un sistema de radiocomunicaciones se ha medido la relación señal a ruido total (ruido más interferencia), siendo ésta de 27 dB. La potencia transmitida tiene un valor de 5 W, la atenuación del canal es de 99 dB, el ancho de banda de trabajo es de 800 kHz, y el receptor está siendo interferido por una señal de banda ancha cuya densidad espectral de potencia en la banda de trabajo es de $7,8125 \cdot 10^{-19}$ W/Hz (espectro unilateral). Calcule la temperatura de ruido a la entrada del receptor.

Datos adicionales: figura de ruido del receptor 19 dB; impedancia de trabajo 50 Ω .

Problema 3.21 (Junio de 2011)

Considere una cadena de $N = 10$ repetidores. Cada sección está constituida por un amplificador y un trozo corto de cable coaxial (véase la figura 3.13). El cable atenúa $\alpha = 5$ dB/100m, y cada trozo tiene una longitud $L = 200$ m. La atenuación total de cada trozo de cable es $A(\text{dB})$. El amplificador gana $G(\text{dB})$ y tiene una figura de ruido $F = 6$ dB. Como es usual en un sistema de repetidores, la ganancia del amplificador es igual a la atenuación del trozo de cable ($G = A$).

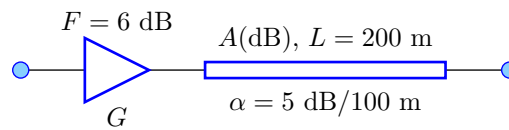


Figura 3.13: Sección de la cadena de repetidores. El conjunto tiene 10 secciones.

La salida de la cadena de repetidores se conecta a un analizador de espectros. Todo el conjunto se encuentra a una temperatura física T_0 K y está adaptado. Como no hay nada a la entrada de la cadena, el ruido a la entrada es (obviamente) el producido por una resistencia térmica a T_0 . (Tome $k = 1,38 \cdot 10^{-23}$ J/Hz.)

1. Calcule la temperatura equivalente de ruido interno del conjunto de 10 secciones, T_{eTOT} .
2. Calcule la densidad espectral de ruido a la entrada del analizador, N_0 .
3. Dibuje aproximadamente la pantalla que mostrará el analizador (en la figura 3.14 se adjunta una pantalla en blanco). Los parámetros seleccionados son: Frecuencia central $C = 100$ MHz; span total $S = 3$ MHz; nivel de referencia $RL = -65$ dBm; 5 dB por cuadro; ancho de banda de resolución $RBW = 300$ kHz; marcador en 100 MHz.

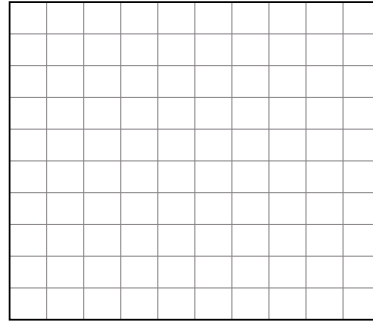


Figura 3.14: Plantilla para la pantalla del analizador.

Problema 3.22 (Julio de 2011)

En la figura 3.15 se observa un sistema de repetidores, con $M = 30$ secciones. Cada una está compuesta por un cable y un amplificador. Datos del cable (por sección): longitud $L(\text{km})$, desconocida; atenuación por unidad de longitud $\alpha = 50 \text{ dB/km}$; atenuación $a(\text{veces pot.})$, desconocida pero mucho mayor que la unidad; como es usual, se encuentra a temperatura ambiente. Datos del amplificador: gana $g = a$; factor de ruido $f(\text{veces pot.})$, desconocido.

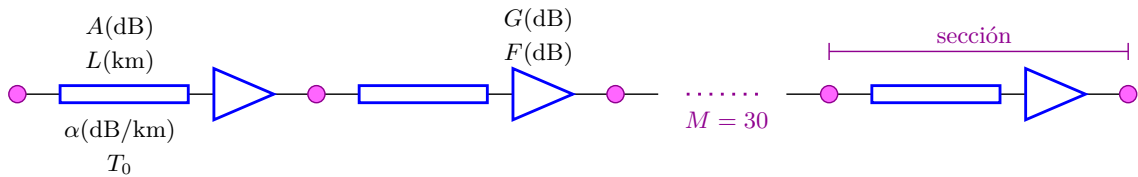


Figura 3.15: Sistema de repetidores.

1. Sabiendo que la figura de ruido del sistema completo es $F_T = 80,79 \text{ dB}$, halle la relación que liga a la atenuación del cable, a , y el factor de ruido del amplificador, f .
2. Considere ahora que la figura de ruido del amplificador es $F = 6 \text{ dB}$. Calcule la ganancia del amplificador, $G(\text{dB})$, y la longitud total del cable, $L(\text{km})$.

Problema 3.23 (Julio de 2011)

Un sistema de comunicaciones está compuesto por 4 secciones iguales. Cada sección tiene un cable coaxial y un amplificador. A la salida de la cuarta sección se encuentra otro amplificador con una ganancia tal que compensa las pérdidas producidas en las 4 secciones anteriores. En la figura 3.16 se observa un diagrama del sistema descrito.

Calcule la ganancia (en dB) del amplificador situado al final. Halle la relación señal a

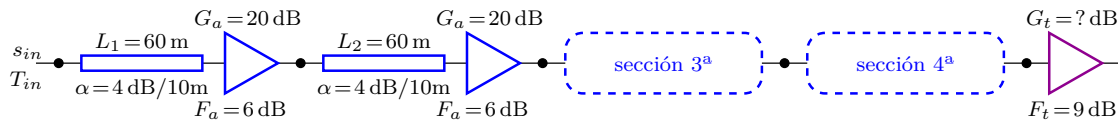


Figura 3.16: Diagrama del sistema.

ruido (en dB) a la salida, sabiendo que la temperatura de ruido a la entrada del sistema es $T_{in} = 300$ K.

Datos adicionales:

- Potencia de señal a la entrada del sistema: 3 dBm.
- Ancho de banda de trabajo: 10 MHz.
- Impedancia de trabajo: 50Ω .

Problema 3.24 (Enero de 2012)

Se requiere una relación S/N de al menos 30 dB a la entrada del demodulador del sistema representado en la figura 3.17. El filtro paso banda tiene ganancia unidad (v.p.) en la banda de paso; en la figura se indican sus frecuencias de corte. La potencia de señal recibida en la antena es -50 dBm. Suponga que todo el sistema se encuentra a temperatura física $T_0 = 300$ K.

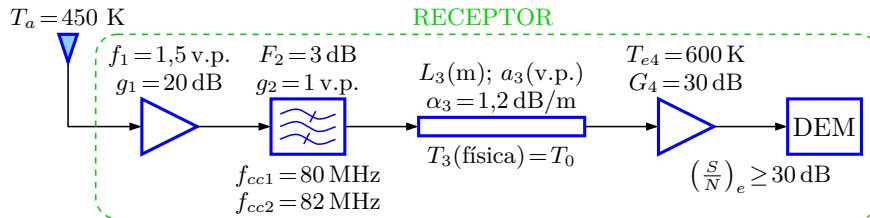


Figura 3.17: Sistema ruidoso.

1. Determine la temperatura equivalente del receptor y la temperatura total equivalente de ruido a la entrada del receptor, dejando ambos parámetros en función de la atenuación del cable, a .
2. Calcule la longitud máxima del cable, L , teniendo en cuenta el requisito de calidad.

Problema 3.25 (Junio de 2012)

En la figura 3.18 se observa el diagrama de bloques de un receptor. La potencia de señal a la entrada (salida de la antena) es de -80 dBm. El ancho de banda equivalente de ruido del sistema es de $5,5$ MHz.

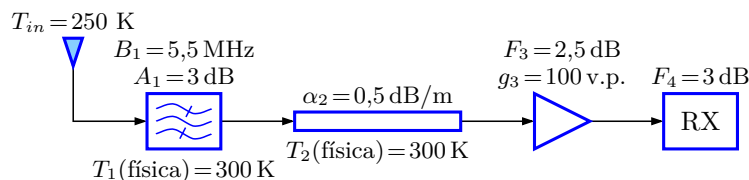



Figura 3.18: Diagrama de bloques.

Para un correcto funcionamiento del sistema se requiere una relación señal a ruido (total equivalente) de 15 dB a la entrada del receptor.

¿Cuál debería ser la longitud máxima del cable si se ha de trabajar con un margen de seguridad de  3?

Problema 3.26 (Abril de 2013)

Calcule la relación señal a ruido total equivalente (en decibelios) que tendremos a la entrada del receptor cuyos datos se muestran a continuación.

Datos:

- Ancho de banda de trabajo: 200 kHz.
- Potencia de la señal recibida: -74 dBm.
- Temperatura de ruido a la entrada del receptor: 600 K.
- El receptor se compone de tres etapas:
 - 1ª etapa: LNA, factor de ruido 3 dB, ganancia 30 dB.
 - 2ª etapa: cable coaxial, atenuación 30 dB, temperatura de trabajo 300 K.
 - 3ª etapa: amplificador, factor de ruido 20 dB, ganancia 60 dB.

Tema 4

DISTORSIÓN

Problema 4.1

La respuesta de un cuadripolo se aproxima con la expresión: $y(t) = a + b x(t) + c x^2(t)$. Donde $x(t)$ es la señal de entrada al cuadripolo, e $y(t)$ la señal de salida.

La señal a la entrada es: $x(t) = A \cos(\omega_1 t) + A \cos(\omega_2 t)$. Con $\omega_1 = (2\omega_2)/3$.

Calcule las componentes y los coeficientes de distorsión e intermodulación.

Problema 4.2

Para medir la distorsión e intermodulación que introduce un canal con transferencia:

$$y(t) = x(t) + K x^3(t)$$

se envían por él, simultáneamente, dos tonos en fase de igual amplitud, A , y frecuencias f_1 y f_2 (siendo $f_1 < f_2$), contenidos en su banda de paso.

Datos: $K = 1/4$; $f_1 = 1$ kHz; $f_2 = 2$ kHz. (El canal es tal que K es positivo. Si se tratara de un amplificador real, K sería negativo.)

1. Calcule todos los coeficientes de distorsión e intermodulación posibles.
2. Indique los valores numéricos de distorsión e intermodulación que se medirían realmente en el caso de que los tonos introducidos en el canal estuviesen normalizados y éste tuviese una banda de paso de (a) 300 a 3400 Hz, y (b) 300 a 5200 Hz.

Problema 4.3

La figura 4.1 representa el esquema simplificado de un sistema de comunicaciones.

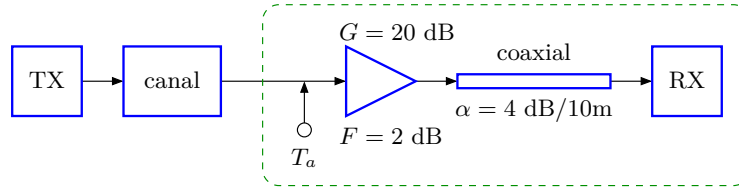


Figura 4.1: Esquema simplificado del sistema.

El transmisor lo podemos modelar como un amplificador no lineal, con la relación entrada/salida dada por el polinomio: $v_s(t) = 20 v_e(t) - v_e^3(t)$.

La señal de entrada al transmisor tiene un nivel tal que, si fuese una señal bitono (dos señales sinusoidales de igual amplitud y distinta frecuencia) la potencia de salida estaría 60 dB por encima de la potencia conjunta de dos componentes de intermodulación de tercer orden.

El ancho de banda equivalente del sistema es de 1 MHz. El canal introduce unas pérdidas de 103 dB. El ruido térmico presente a la entrada del amplificador (primera etapa de recepción) se corresponde con el de una resistencia a la temperatura T_a . El cable coaxial está a temperatura ambiente ($T_0 = 300$ K).

Se necesita una relación (S/N) mínima a la entrada del receptor (RX) de 20 dB. Todo el sistema está adaptado a una impedancia de 50 Ω .

1. ¿A cuántos decibelios por debajo del punto de compresión a 1 dB estamos trabajando en el transmisor? ¿Qué conclusiones se obtienen?
2. ¿Cuál es el valor máximo de la longitud del cable coaxial, en metros, para asegurar la calidad, suponiendo una temperatura de ruido a la entrada, T_a , de 300 K? ¿Y si ésta fuese de 100 K?
3. Para la longitud de cable menor de las calculadas en el apartado anterior, ¿cuánto valdrá la potencia de la señal a la entrada del RX?
4. A la entrada del RX es necesaria una potencia de al menos -60 dBm. Considere que $T_a = T_0$, y que colocamos en medio del cable (longitud menor del apartado segundo) un amplificador de ganancia 40 dB y factor de ruido 10 dB. Demuestre que el receptor funciona adecuadamente.

Problema 4.4 (Septiembre de 2002)

El sistema de la figura 4.2 se utiliza para transmitir señales vocales con ancho de banda $W = 4$ kHz. El modulador es BLUs (Banda Lateral Única Superior). Las características de cada cuadripolo se observan en la figura; la temperatura del cable es física, no equivalente de ruido; la atenuación del mezclador es despreciable.

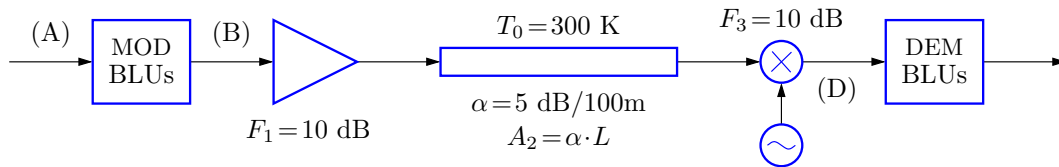


Figura 4.2: Sistema BLUs.

El amplificador del transmisor introduce una distorsión no lineal. La relación entre la señal de entrada, $v_e(t)$, y la señal de salida, $v_s(t)$, ambas en voltios, es: $v_s = c_1 v_e + c_3 v_e^3$.

Para caracterizar el amplificador se introduce un tono de prueba de $f_{m1} = 1$ kHz en el punto (A). Cuando el modulador BLUs entrega una potencia media $p_{B1} = 100$ mW en el punto (B), el amplificador, trabajando en el punto de compresión a 1 dB, entrega a su salida una potencia media $p_{C1} = 2$ W —punto (C)—.

Por el sistema descrito se transmite una información sinusoidal con frecuencia $f_{m2} = 3$ kHz —punto (A)—. El modulador BLUs entrega una potencia media $p_{B2} = 10$ nW en el punto (B). Consideraremos que la calidad del sistema es adecuada si se recibe una relación señal ruido a la entrada del demodulador $(S/N)_e \geq 35$ dB —punto (D)—.

1. Calcule la ganancia del amplificador, G_1 (dB), cuando la señal transmitida es el tono de prueba con 100 mW en el punto (B).
2. Calcule la ganancia del amplificador, G_{1i} (dB), cuando la señal transmitida es la senoide con 10 nW en el punto (B).
3. Calcule los valores c_1 y c_3 de la ecuación que describe el comportamiento del amplificador.
4. Lleve *todas* las contribuciones de ruido al punto (B). Calcule la temperatura equivalente de ruido, T_{eB} , en dicho punto. Deje el resultado en función de la atenuación total del cable, a_2 (unidades naturales de potencia). Puede suponer que el cable atenúa mucho ($a_2 \gg 1$).
5. ¿Cuál es la longitud máxima del cable, L (m), cuando se transmite la senoide —con 10 nW en el punto (B)—?

(Nota: un modulador BLUs, con portadora f_0 , modulado por un tono f_m , entrega a su salida una senoide a $f_0 + f_m$.)

Problema 4.5 (Junio de 2004)

Para caracterizar un amplificador, a la frecuencia deseada, se ha inyectado un tono con diferentes amplitudes, y se ha medido la señal en la salida (la carga es de $50\ \Omega$). El resultado aparece en el cuadro 4.1.

P_{in} dBW	P_{out} dBW
-50,00	-30,00
-47,00	-27,00
-44,00	-24,00
-41,00	-21,01
-38,00	-18,01
-35,00	-15,03
-32,00	-12,05
-29,00	-9,11
-26,00	-6,22
-23,00	-3,45
-22,00	-2,57
-21,00	-1,72
-20,00	-0,92
-19,00	-0,17
-18,00	0,50
-17,00	1,07
-16,00	1,49
-15,00	1,70

Cuadro 4.1: Resultado de la medida.

1. Calcule la ganancia para pequeña señal.
2. Calcule el punto de compresión a 1 dB.
3. Halle el polinomio que describe la respuesta del amplificador. (Suponga que es del tipo: $v_{out} = a_3 v_{in}^3 + a_1 v_{in}$.)

Problema 4.6 (Septiembre de 2004)

Tenemos un amplificador de potencia, con ganancia 40 dB en pequeña señal, del que se desconoce el punto de intersección de tercer orden. Ponemos a la entrada del amplificador una señal suma de dos tonos (f_1 y f_2), de 0,2 mW de potencia total, y medimos a la salida, en la componente $2f_2 - f_1$, una potencia de 10 μ W.

Calcule el valor del punto de intersección de tercer orden (IP3). Si le resulta conveniente, utilice la cuadrícula adjunta (figura 4.3)

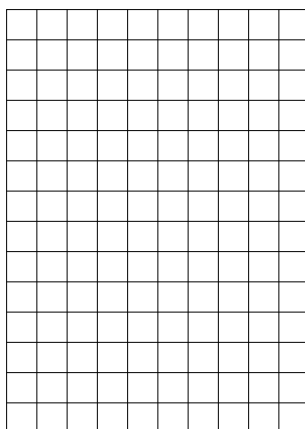


Figura 4.3: Cuadrícula de ayuda.

Problema 4.7 (Septiembre de 2005)

En un laboratorio se han medido los parámetros más importantes de un amplificador. Los resultados son: ganancia de pequeña señal $G_0 = 40$ dB; potencia de salida en el punto de compresión a 1 dB $P_{s1dB} = 47,6$ dBm; potencia de salida de una componente de tercer orden en el punto de intermodulación de tercer orden $P_{sIP3} = 58,24$ dBm; figura de ruido en la zona de trabajo $F = 8,2$ dB. La resistencia de carga es $R = 50 \Omega$.

Caracterice la respuesta y la distorsión no lineal del amplificador mediante un polinomio de tercer grado.

Problema 4.8 (Junio de 2006)

Sea un amplificador cuya distorsión está caracterizada por el polinomio de tercer grado:

$$v_s(t) = 80 \cdot v_e(t) + 100 \cdot v_e^2(t) - 12,274 \cdot v_e^3(t)$$

Donde v_e es la señal a la entrada, y v_s la señal a la salida. Sabiendo que la carga adaptada vale 50Ω :

1. Calcule la ganancia de pequeña señal, G_0 (dB).
2. Calcule la potencia de entrada, P_{e1dB} (dBm), y la potencia de salida, P_{s1dB} (dBm), en el punto de compresión a 1 dB.
3. Calcule la ganancia del amplificador, G (dB), cuando a la entrada se presenta una senoide de $P_e = 30$ dBm. Comente el resultado.

Problema 4.9 (Junio de 2007)

La respuesta entrada-salida (en señal) de un amplificador no lineal es:

$$y(t) = 20 \cdot x(t) - 0,5 \cdot x^3(t)$$

Calcule el punto de compresión a 1 dB, teniendo en cuenta que la impedancia de trabajo es de 50Ω .

Problema 4.10 (Septiembre de 2007)

Para caracterizar un amplificador, a la frecuencia deseada, se ha inyectado un tono con diferentes amplitudes, y se ha medido la señal en la salida (la carga es de 50Ω). El resultado aparece en el cuadro 4.2.

P_{in} dBm	P_{out} dBm
-5,00	21,00
-4,00	21,99
-3,00	22,99
-2,00	23,98
-1,00	24,97
0,00	25,96
1,00	26,94
2,00	27,92
3,00	28,89
4,00	29,86
5,00	30,81
6,00	31,76
7,00	32,69
8,00	33,60
9,00	34,49
10,00	35,34
11,00	36,16
12,00	36,92
13,00	37,61
14,00	38,21
15,00	38,67

Cuadro 4.2: Resultado de las medidas.

1. Calcule la ganancia para pequeña señal.
2. Calcule el punto de compresión a 1 dB.

- 3.** Halle el polinomio que describe la respuesta del amplificador. (Suponga que es del tipo: $v_{out} = a_3 v_{in}^3 + a_1 v_{in}$.)

Razone todas sus respuestas.

Problema 4.11 (Septiembre de 2008)

Disponemos de un amplificador no lineal sin memoria, con impedancia de entrada y salida de 50Ω , cuya respuesta de salida en función de la entrada se aproxima mediante:

$$y(t) = a_1 x(t) + a_3 x^3(t)$$

donde $a_3 < 0$. Para determinar los dos coeficientes se realizan dos medidas:

- M1:** entrada: señal sinusoidal de -30 dBm; salida: senoide a la frecuencia de entrada de -6 dBm y tercer armónico despreciable.
- M2:** entrada: señal sinusoidal de $+10$ dBm; salida: senoide a la frecuencia de entrada de $+33,58$ dBm y tercer armónico de $-2,04$ dBm.

1. Calcule dichos coeficientes.
2. Indique lo que se obtendría a la salida del amplificador (potencia en función de la frecuencia) si la señal de entrada fuese la suma de dos senoideos de distinta frecuencia e igual amplitud, y de potencia total el doble que en el caso de la medida 2.

Problema 4.12 (Junio de 2009)

Sea un amplificador no lineal, caracterizado por una respuesta entrada-salida en señal:

$$y(t) = a_1 x(t) + a_2 x^2(t) + a_3 x^3(t)$$

con $a_3 < 0$ para que haya saturación.

Demuestre analíticamente que en el punto de compresión a 1 dB la potencia de salida (del fundamental saturado) es:

$$p_{s1dB}(\text{W}) \approx -0,058 \frac{a_1^3}{a_3 R}$$

donde R es la impedancia de trabajo (real).

Problema 4.13 (Enero de 2010)

Sea un amplificador no lineal con respuesta entrada-salida de señal según el polinomio de tercer grado:

$$y(t) = a_1 x(t) + a_2 x^2(t) + a_3 x^3(t)$$

Demuestre analíticamente que en el punto de intersección de tercer orden la potencia de salida vale:

$$p_{sIP3} = -\frac{2}{3} \frac{a_1^3}{R a_3}$$

donde R es la impedancia de trabajo (real).

Problema 4.14 (Junio de 2010)

Sea un amplificador no lineal. Cuando recibe un tono de 10 kHz con 10 dBm, entrega a su salida las señales que se observan en la pantalla del analizador de la figura 4.4 ($R = 50 \Omega$). Suponga que la respuesta en señal del amplificador se modela con un polinomio de tercer grado:

$$v_s = a_1 \cdot v_e + a_2 \cdot v_e^2 + a_3 \cdot v_e^3$$

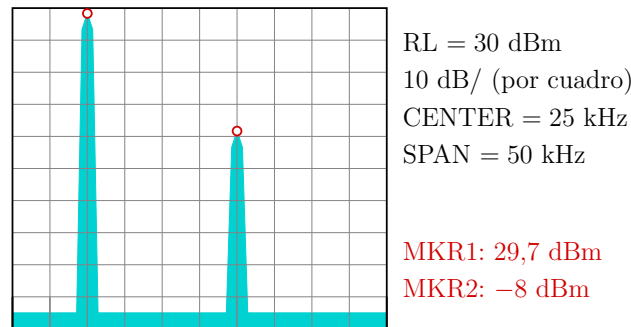


Figura 4.4: Pantalla del analizador.

1. Calcule la amplitud, $A(V)$, del tono usado en la medida.
2. Calcule el coeficiente a_2 (en veces de señal).
3. Calcule a_3 (en veces de señal).
4. Calcule a_1 (en veces de señal).
5. Calcule la ganancia de pequeña señal (ideal) en dB.
6. Calcule, en el punto de compresión a 1 dB, la potencia a la entrada, $P_{e1dB}(\text{dBm})$, y la potencia de salida del fundamental, $P_{s1dB}(\text{dBm})$. (0,5 puntos.)

(Nota: redondee los resultados de cada apartado con 1 decimal. Tome esos valores redondeados para el resto de los apartados.)

Problema 4.15 (Julio de 2010)

Sea un amplificador no lineal cuya respuesta entrada-salida en señal está caracterizada por el polinomio de tercer grado:

$$y(t) = a_1 \cdot x(t) + a_2 \cdot x^2(t) + a_3 \cdot x^3(t)$$

Se introduce a la entrada del amplificador la señal $x(t) = 2 \sin(2\pi \cdot 15 \cdot 10^6 \cdot t)$, en voltios para t en segundos, y la salida del amplificador se lleva a un analizador de espectros, pasando primero por un atenuador de 50 dB para proteger el aparato de medida. En la figura 4.5 se observa la pantalla obtenida en el analizador de espectros.

Configuración del analizador de espectros:

- Impedancia de entrada: 50 Ω .
- Nivel de referencia: 4 dBm.
- Eje vertical: 4 dB/div.
- Atenuación: 0 dB.
- Frecuencia central: 30 MHz.
- Span: 50 MHz.
- Ancho de banda de resolución: 1 MHz.

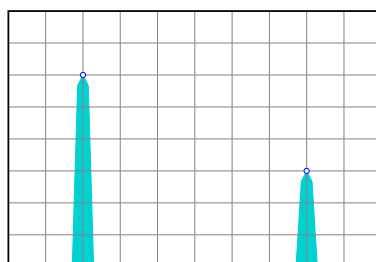


Figura 4.5: Medida en el analizador de espectros.

Para caracterizar el amplificador, calcule sus coeficientes a_1 , a_2 y a_3 . Calcule también la ganancia de pequeña señal en dB.

Problema 4.16 (Diciembre de 2010)

Sea un amplificador, cuyo comportamiento no lineal está caracterizado por el punto de intermodulación de tercer orden (IP3). Los datos son: potencia de entrada (de una componente) en el IP3: $P_{e\text{ IP3}} = 23$ dBm; potencia de salida (de un batido) en el IP3: $P_{s\text{ IP3}} = 49$ dBm. Todas las medidas se han realizado sobre $R = 50\ \Omega$.

1. Caracterize al amplificador mediante un polinomio de tercer grado. (Polinomio entrada-salida, en señal.)
2. Calcule el punto de compresión a 1 dB (P1dB).

Problema 4.17 (Junio de 2011)

Sea un amplificador cuya distorsión está caracterizada por el polinomio de tercer grado: $v_s(t) = 40 \cdot v_e(t) + 100 \cdot v_e^2(t) - 602,5 \cdot v_e^3(t)$, donde v_e es la señal a la entrada, y v_s la señal a la salida. Sabiendo que la carga adaptada vale $50\ \Omega$:

1. Calcule la ganancia de pequeña señal, G_i (dB).
2. Calcule la potencia de entrada, P_{e1dB} (dBm), y la potencia de salida, P_{s1dB} (dBm), en el punto de compresión a 1 dB.
3. Calcule la ganancia del amplificador, G (dB), cuando a la entrada se presenta una senoide de $P_e = 10$ dBm. Comente el resultado.

Problema 4.18 (Julio de 2011)

La señal $x(t)$ se introduce en un amplificador no lineal, caracterizado por un polinomio, obteniéndose a la salida la señal $y(t)$.

$$x(t) = A[\cos(2\pi \cdot 99,9 \cdot 10^6 \cdot t) + \cos(2\pi \cdot 100,1 \cdot 10^6 \cdot t)]$$

$$y(t) = 40x(t) - 4x^3(t)$$

La salida del amplificador, $y(t)$, se atenúa 40 dB (para no dañar el equipo de medida) y se introduce en un analizador de espectros.

Dibuje lo que se verá en la pantalla del analizador, sobre la plantilla de la figura 4.6 (sólo la señal, desprecie el ruido).

Datos adicionales:

- Potencia media de la señal $x(t)$: -10 dBm.
- Impedancia de trabajo: 50Ω .
- Configuración del analizador de espectros:
 - Nivel de referencia: -20 dBm.
 - Atenuador: 0 dB.
 - Frecuencia central: $100,1$ MHz.
 - Span: 1 MHz.
 - Ancho de banda de resolución: 10 kHz.
 - Eje de ordenadas: 10 dB/div.

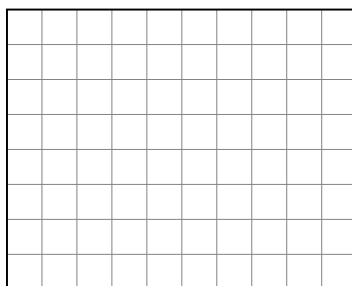


Figura 4.6: Plantilla de la pantalla.

Problema 4.19 (Enero de 2012)

Como es conocido, si se caracteriza la función de transferencia de un amplificador mediante un polinomio de tercer orden, $v_s = a_1 v_e + a_2 v_e^2 + a_3 v_e^3$, al introducir un único tono de amplitud A y frecuencia f_0 la salida resultante es:

$$y(t) = \left[a_0 + \frac{1}{2} a_2 A^2 \right] + \left[a_1 A + \frac{3}{4} a_3 A^3 \right] \cos(\omega_0 t) + \left[\frac{1}{2} a_2 A^2 \right] \cos(2\omega_0 t) + \left[\frac{1}{4} a_3 A^3 \right] \cos(3\omega_0 t)$$

Para el amplificador bajo estudio: $a_1 = 20$, $a_2 = 0$, $a_3 = -2$, y la carga es 50Ω .

1. Rellene el cuadro 4.3 indicando las potencias de salida y las ganancias, a la frecuencia f_0 , cuando se introduce un tono a la potencia indicada en la primera columna. Utilice 2 decimales en las respuestas.
2. Calcule la ganancia de pequeña señal. Calcule las potencias de entrada y salida en el punto de compresión a 1 dB; compare el resultado con los datos del cuadro anterior.
3. Suponga que ahora se introducen en el amplificador dos tonos de igual amplitud y frecuencias f_1 y f_2 . Calcule para el punto de intermodulación de tercer orden la potencia de salida de un batido $2f_1 + f_2$.

$P_e(\text{dBm})$	$P_s(\text{dBm})$	$G(\text{dB})$
0,00		
4,00		
8,00		
12,00		

Cuadro 4.3: Potencias y ganancias, siempre a f_0 .**Problema 4.20 (Junio de 2012)**

Especifique el polinomio de un amplificador atendiendo a las siguientes cuestiones. En todos los casos la señal de entrada es una senoide a f_0 y la impedancia de entrada y de salida es de $50\ \Omega$.

1. Calcule el valor del coeficiente a_1 teniendo en cuenta que cuando la señal de entrada tiene 10 V de pico el amplificador, trabajando en zona lineal, entrega una potencia de 30 W.
2. Trabajando todavía en zona lineal, y con la señal de entrada del apartado anterior, el nivel del armónico a $2f_0$ (segundo armónico) está 50 dB por debajo del fundamental a la salida. ¿Cuánto vale el coeficiente a_2 ?
3. En el punto de compresión a 1 dB la entrada está 3 dB por encima del valor del primer apartado. ¿Cuánto vale el coeficiente a_3 ?

Problema 4.21 (Julio de 2012)

Determine la ganancia ideal (pequeña señal, en dB), el punto de compresión a 1 dB (a la salida, en dBm), y el punto de intermodulación de tercer orden (a la salida, en dBm) del amplificador caracterizado según el siguiente polinomio:

$$v_s(t) = 10 v_e(t) + 0,25 v_e^2(t) - 0,145 v_e^3$$

La impedancia de trabajo es $100\ \Omega$.

Problema 4.22 (Abril de 2013)

Demuestre que la relación entre las potencias de salida en el punto de intersección de tercer orden y en el punto de compresión a 1 dB es constante. ¿Cuánto vale dicha relación en decibelios?

Tema 5

MODULACIÓN ANALÓGICA

Problema 5.1

Se desea enviar una señal de audio (15 kHz de ancho de banda) por un canal que presenta una atenuación de 122 dB a la frecuencia de trabajo.

Teniendo en cuenta que la relación (S/N) mínima necesaria en postdetección es de 36 dB, calcule la potencia media y el valor de pico de la modulada que se tendrá que emitir en los siguientes casos:

DBL: ancho de banda disponible 30 kHz.

AM: ancho de banda disponible 30 kHz; índice de modulación 90 %.

FM: ancho de banda disponible 180 kHz; con el máximo valor posible de Δf .

Datos adicionales:

- Valor cuadrático medio de la moduladora normalizada: $\langle x_n^2(t) \rangle = 0,22$.
- Temperatura de ruido a la entrada del receptor: $T_0 = 300$ K.
- Factor de ruido del receptor: $F = 12$ dB.
- Frecuencia de corte del filtro de deénfasis, en FM: $f_{cc} = 2100$ Hz.
- Impedancia de trabajo: $R = 50 \Omega$.

Problema 5.2 (Abril de 1992)

Se dispone del modulador de la figura 5.1, donde el diodo responde conforme a la función característica siguiente:

$$v_s(t) = \frac{1}{2} v_e(t) + \frac{1}{4} v_e^2(t)$$

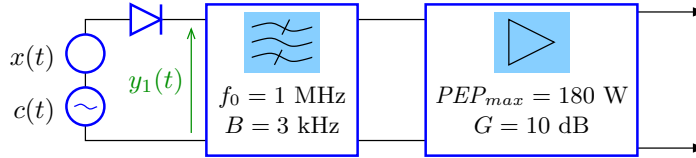


Figura 5.1: Diagrama de bloques del modulador.

Modulamos la portadora, $c(t)$, con un tono, $x(t)$:

$$c(t) = A_c \cos(2\pi 10^6 t)$$

$$x(t) = A_m \cos(2\pi 10^3 t)$$

1. Calcule el espectro bilateral a la entrada del filtro, $Y_1(f)$.
2. Calcule los valores de A_c y A_m para conseguir que el índice de modulación sea máximo y para lograr que el amplificador entregue a su salida la máxima potencia ($PEP = 180$ W), teniendo en cuenta el tipo de modulador empleado.
3. Se quiere conseguir un alcance de 100 km y una $(S/N)_s = 20$ dB. Calcule el ancho de banda ideal de los filtros de postdetección y predetección que se pueden emplear en un receptor coherente, sabiendo que la densidad espectral de potencia de ruido unilateral a la entrada del receptor vale $N_0 = 10^{-12}$ W/Hz y que la atenuación se puede calcular como:

$$A(\text{dB}) = 60 + 10 \log [d(\text{km})]$$

Problema 5.3 (Septiembre de 1992)

Se dispone del sistema FDM de la figura 5.2, donde cada filtro está caracterizado por su frecuencia central, f_0 , y su ancho de banda, B .

1. Elija las frecuencias de las tres subportadoras, c_1 , c_2 y c_3 , para que los moduladores trabajen en BLU superior. En este caso, represente el espectro de potencia unilateral, $G_y(f)$, a la salida del sistema.
2. ¿Cuál debe ser la amplitud de las subportadoras para conseguir que la potencia total a la salida sea de 7 W? (Tome la misma amplitud para las tres subportadoras.)

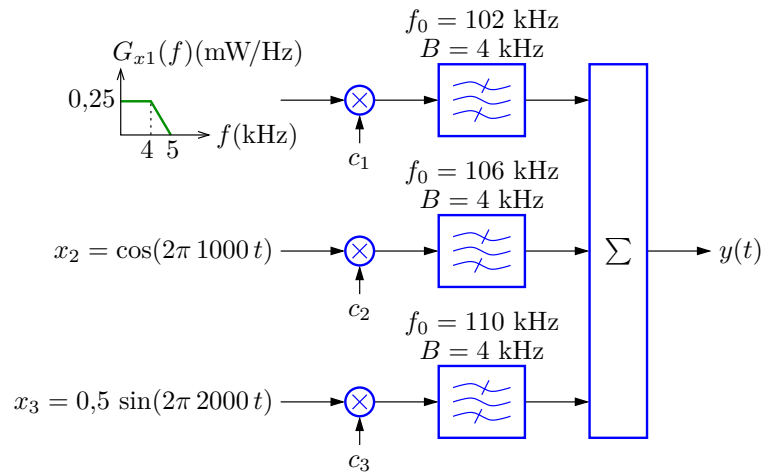


Figura 5.2: Sistema de multiplexación propuesto.

Problema 5.4 (Febrero de 1993)

En un transmisor para radiodifusión se están realizando pruebas con modulaciones de AM y DBL. Empleando una moduladora sinusoidal, se han medido, sobre una resistencia de 1Ω , las señales obtenidas a la salida del transmisor, ver figura 5.3.

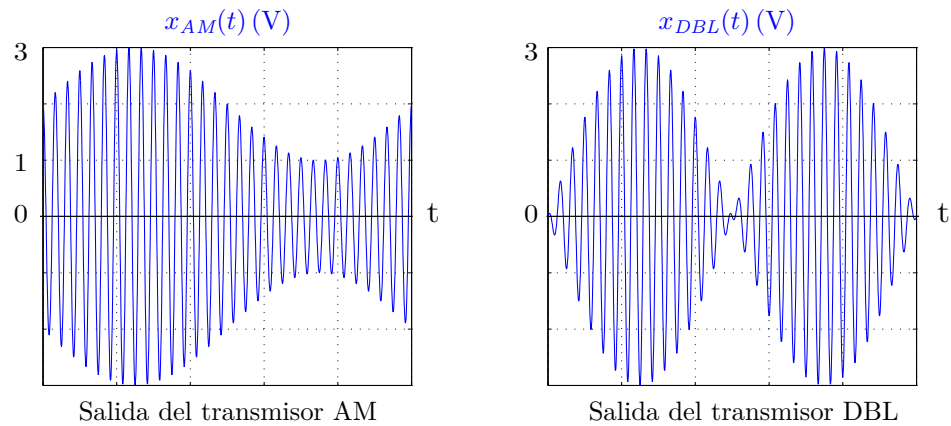


Figura 5.3: Señales medidas a la salida del transmisor.

Para el caso de la modulación AM:

1. Calcule el índice de modulación.
2. Calcule la potencia media de la señal transmitida.
3. Calcule la potencia de pico (*PEP*).

Y para el caso de la modulación DBL:

4. Calcule la potencia media de la señal transmitida.
5. Calcule la potencia la potencia de pico (*PEP*).

Problema 5.5 (Febrero de 1993)

En el diagrama de bloques de la figura 5.4 se representa un sistema de FM. La desviación de frecuencia es f_d . La portadora, de pulsación ω_c y amplitud A_c , se modula con un tono sinusoidal, $x(t)$, de pulsación ω_m y amplitud A_m .

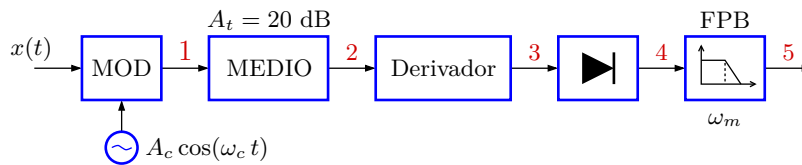


Figura 5.4: Diagrama de bloques del sistema FM. El bloque entre los puntos 3 y 4 es un detector de envolvente.

1. Obtenga la expresión matemática de la señal en los puntos 1, 2, 3, 4 y 5.
2. Calcule el ancho de banda de la señal en los puntos 1, 2 y 5. Donde estime conveniente, aplique la regla de Carson.
3. ¿Qué nombre recibe el demodulador comprendido entre los puntos 2 y 5? Hable acerca de la utilidad del filtro paso bajo final.

Problema 5.6 (Junio de 1993)

Disponemos del sistema de comunicación analógico mostrado en la figura 5.5, donde la frecuencia de portadora es igual a 100 kHz.

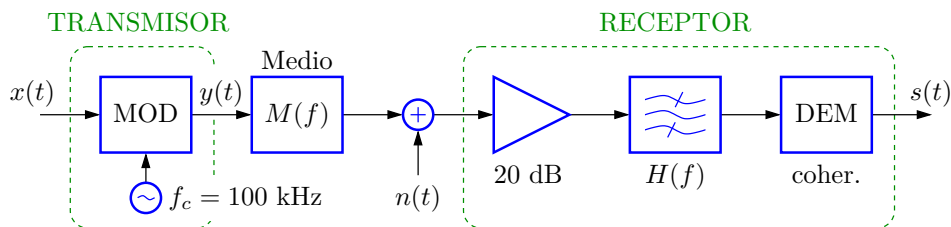


Figura 5.5: Sistema de comunicación analógico.

Se han medido con un osciloscopio las señales $x(t)$ e $y(t)$, con el resultado que se observa en la figura 5.6.

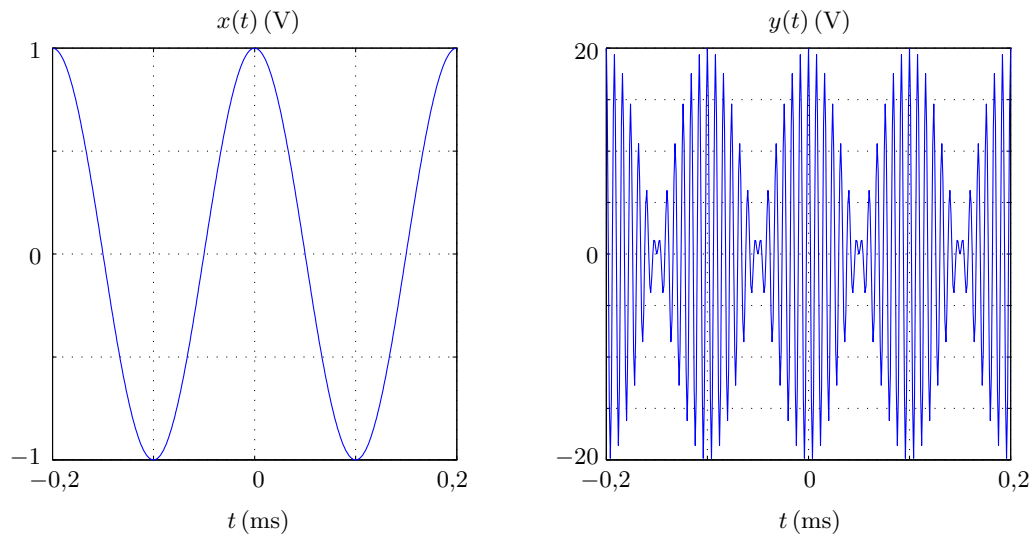


Figura 5.6: Señales medidas con un osciloscopio.

1. A partir de las figuras anteriores, indique por qué el tipo de modulación empleado *no* es angular. Razone el tipo de modulación lineal que se utiliza.
2. De la señal transmitida, $y(t)$, calcule el valor de su potencia media (P_{TX}) y de su potencia de portadora sola (P_c).

Previamente se han medido las funciones de transferencia del medio de transmisión, $|M(f)|$, y del filtro receptor, $|H(f)|$, con los resultados de la figura 5.7.

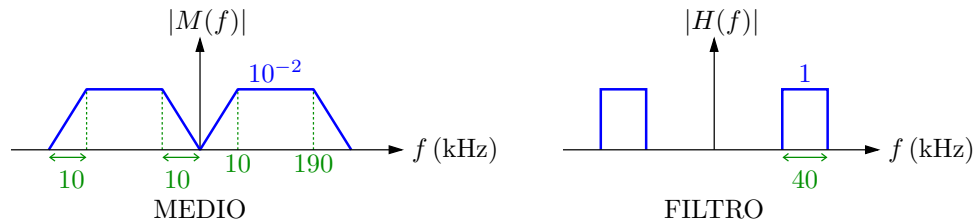


Figura 5.7: Respuestas del medio y el filtro del receptor.

Por otros medios se ha encontrado que la densidad espectral de ruido equivalente del sistema a la entrada del receptor puede modelarse conforme a la función $G(f)$ de la figura 5.8.

3. Calcule la potencia de ruido a la entrada del receptor.
4. En el sistema anterior, ¿qué frecuencia central elegiría para el filtro del receptor? En tal caso, ¿cuál sería el ancho de banda máximo que podría tener una señal modulada arbitraria para efectuar una transmisión sin distorsión?
5. Encuentre la relación (S/N) de predetección (a la entrada del demodulador) cuando se transmite $x(t)$.

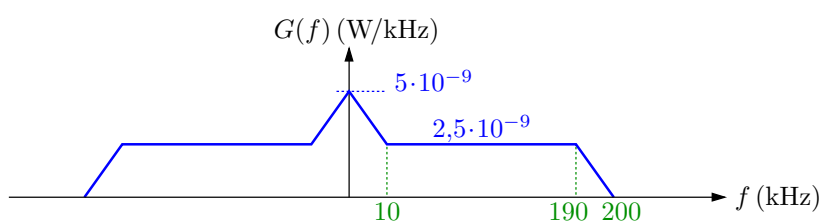


Figura 5.8: Densidad espectral de ruido equivalente a la entrada del receptor.

6. Encuentre la relación (S/N) de postdetección (a la salida del sistema).

Problema 5.7 (Junio de 1993)

Se modula en FM a una señal portadora $c(t) = A_c \cos(2\pi 10^9 t)$, de 0,5 W de potencia media, con un tono $x(t) = \cos(2\pi 400 t)$. El índice de modulación utilizado es $\beta = 2$ radianes. La amplitud de la portadora no se modifica durante el proceso de modulación.

1. Calcule la frecuencia angular instantánea (pulsación angular instantánea) y la frecuencia instantánea de la señal modulada.
2. Obtenga la expresión en el tiempo de la señal modulada, $y(t)$, con sus valores numéricos correspondientes.
3. Calcule el ancho de banda de la transmisión según la regla de Carson.
4. Represente el espectro unilateral de la señal modulada, $Y(f)$, dentro del ancho de banda de Carson.
5. En la modulación FM, ¿qué se consigue con un sistema de preénfasis y deénfasis?

Problema 5.8 (Septiembre de 1993)

En el modulador de la figura 5.9 se introducen las dos siguientes señales:

$$x(t) = \cos(2\pi 10^4 t)$$

$$c(t) = 10 \cos(2\pi 10^9 t)$$

1. Obtenga la expresión de la señal en el tiempo a la salida del modulador, $y(t)$, e identifique el tipo de modulación que se genera.
2. Dibuje el espectro a la salida del modulador, $Y(f)$.

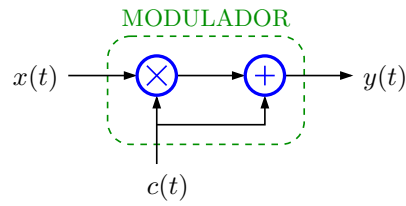


Figura 5.9: Esquema del modulador.

3. Obtenga el valor de las potencias siguientes: media transmitida (P_{TX}), de portadora sola (P_c), de las bandas laterales (P_{2BL}), y de cresta (PEP).
4. Compare la relación señal ruido a la salida de este tipo de receptor con la relación señal ruido a la salida de un sistema en banda base.

Problema 5.9 (Septiembre de 1993)

Sea el sistema de transmisión mostrado en la figura 5.10, en el que la desviación de frecuencia es $f_d = 1 \text{ kHz/V}$.

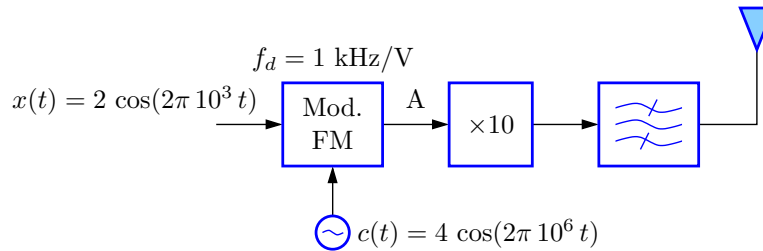


Figura 5.10: Sistema de transmisión.

1. Calcule la máxima desviación de fase de la señal modulada, con respecto a la portadora, en el punto A.
2. Calcule el ancho de banda de Carson de la señal en el punto A.
3. Calcule la potencia de la señal en el punto A.
4. Obtenga el espectro de la señal en el punto A.
5. Calcule la frecuencia de portadora de la señal transmitida.
6. Calcule el ancho de banda de la señal transmitida.
7. Calcule las frecuencias de corte del filtro paso banda, para el ancho de banda del apartado anterior.

Nota: Considere que el modulador entrega a su salida una amplitud igual que la de la portadora (4 V).

Problema 5.10 (Febrero de 1994)

Uno de los principales problemas que se plantean cuando se desea ampliar el servicio ofrecido por un sistema de radiodifusión es el de la compatibilidad hacia atrás. Esto es, los nuevos receptores deben poder funcionar con las señales radiadas por los antiguos transmisores y, a la inversa, los viejos receptores deben ser capaces de detectar las señales emitidas por los nuevos transmisores. Ejemplos notables en que se dio esta situación fueron el paso de la televisión monocroma a la de color, y el paso de la radio monofónica a la estereofónica.

En este problema se pretende analizar el funcionamiento de un sistema de radiodifusión estereofónico convencional compatible con el antiguo monofónico. Para ello, en la figura 5.11 se dan los diagramas de bloques de un transmisor y un receptor estereofónicos.

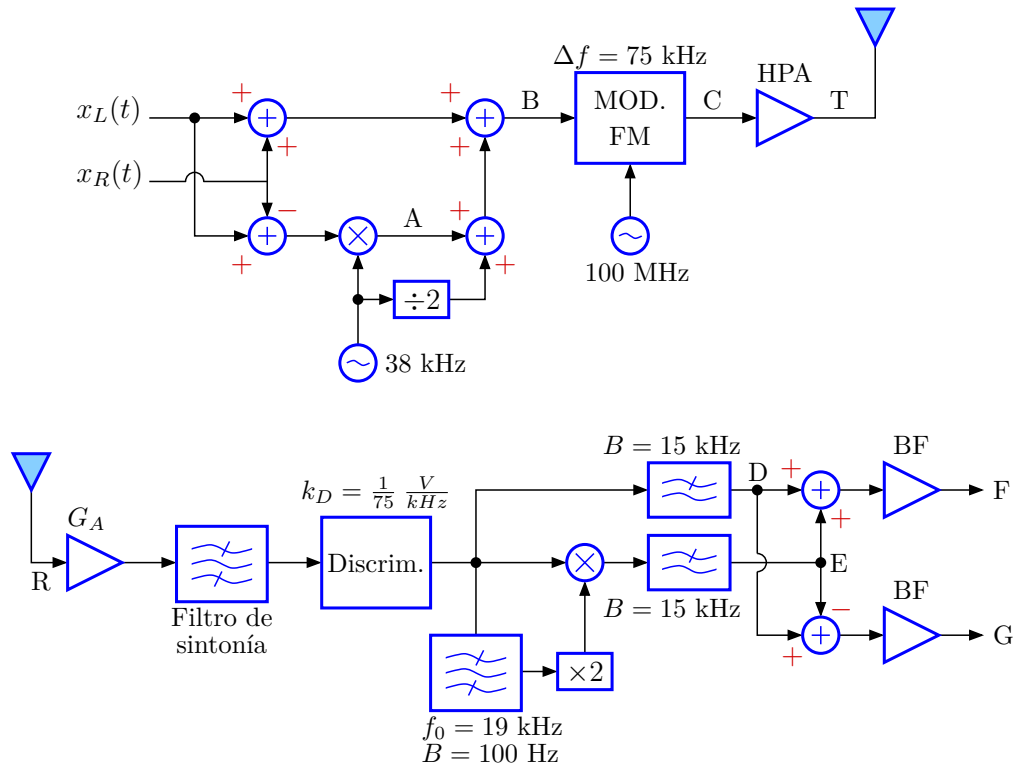


Figura 5.11: Transmisor (arriba) y receptor (abajo) estereofónicos.

Datos aclaratorios acerca de la figura 5.11:

- Todos los osciladores generan tonos de amplitud un voltio. Tome referencia coseno.
- La potencia media transmitida por el HPA (*High Power Amplifier*) es de 10 kW.
- La atenuación total del medio (desde el punto T al punto R) es de 153 dB.
- Todos los filtros son ideales, sin pérdidas en la banda de paso.
- Los símbolos $\div 2$ y $\times 2$ representan, respectivamente, división por 2 y multiplicación por 2 de la frecuencia.

Suponga que las señales que se desean transmitir, $x_L(t)$ y $x_R(t)$, son:

$$x_L(t) = \cos(2\pi f_L t) ; \quad f_L = 1 \text{ kHz}$$

$$x_R(t) = \cos(2\pi f_R t) ; \quad f_R = 10 \text{ kHz}$$

1. Explique, cualitativamente y razonando, cómo funciona el transmisor. (Sugerencia: dibuje el espectro unilateral de la multiplexación que se obtiene en el punto B.) Explique, cualitativamente y razonando, cómo funciona el receptor.
2. A partir de ahora, trabaje con los datos concretos del enunciado. Calcule la expresión temporal de la señal en los puntos A y B.
3. Dibuje la densidad espectral de potencia unilateral en el punto B, indicando la amplitud y frecuencia de las distintas componentes espectrales.
4. Calcule la potencia media de la señal en el punto B.
5. Calcule la frecuencia central y el ancho de banda mínimo (según el criterio de Carson) del filtro de sintonía del receptor.
6. Calcule la ganancia, G_A , expresada en dB, del amplificador colocado a la entrada del receptor si se quiere conseguir un nivel de señal de -40 dBm a la entrada del discriminador.
7. Explique cuál es el motivo para introducir un tono de 19 kHz en la señal (multiplexación) que modula en FM a la portadora de 100 MHz.
8. ¿Por qué la relación (S/N) en el punto E es inferior a la del punto D? ¿Qué bloques añadiría, y dónde los colocaría, para que la (S/N) en los puntos D y E fuera similar?
9. Analice cómo el sistema estereofónico dado soluciona la compatibilidad con el sistema monofónico.

Problema 5.11 (Junio de 1994)

Sean las señales $x_m(t) = A_m \cos(\omega_m t)$ y $c(t) = A_c \cos(\omega_c t)$, donde $\omega_c \gg \omega_m$.

Utilizando $x_m(t)$ como señal moduladora y $c(t)$ como señal portadora, se generan las siguientes señales moduladas:

- a) Señal modulada en AM, $y_{AM}(t)$, con índice de modulación $m = 50\%$, y amplitud media de la envolvente $A = A_c$.
 - b) Señal modulada en BLU superior, $y_{BLU}(t)$, mediante el esquema de la figura 5.12.
1. ¿Qué problema existe si, al contrario de lo anteriormente dicho, $\omega_c \ll \omega_m$?

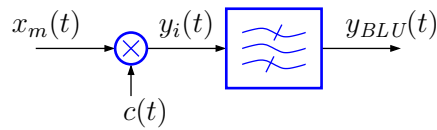


Figura 5.12: Esquema del modulador BLU.

Para los apartados siguientes tome $\omega_c = 2\pi \cdot 5 \cdot 10^6$ (rad/s) y $\omega_m = 2\pi 10^6$ (rad/s).

2. Escriba la expresión general, en el dominio del tiempo, de la señal modulada, $y_{AM}(t)$.
3. Dibuje la densidad espectral de potencia de la señal $y_{AM}(t)$, indicando frecuencias y amplitudes. Calcule la potencia media total.
4. Dibuje la señal $y_{AM}(t)$ en el dominio del tiempo, indicando períodos y amplitudes.
5. Dibuje el **espectro** de la señal $y_i(t)$ de la figura 5.12, indicando frecuencias y amplitudes.
6. ¿Qué tipo de señal es $y_i(t)$, atendiendo a todos los criterios vistos en la asignatura?
7. Calcule la frecuencia de corte inferior del filtro de la figura 5.12 (supuesto ideal), para que la señal a su salida sea BLU superior.
8. Dibuje la densidad espectral de potencia de la señal $y_{BLU}(t)$, indicando frecuencias y amplitudes. Calcule la potencia media total.
9. Dibuje la señal $y_{BLU}(t)$ en el dominio del tiempo, indicando períodos y amplitudes.

Problema 5.12 (Junio de 1994)

Como alternativa a un sistema MDF, se ha diseñado un sistema transmisor-receptor para varios canales, empleando una portadora modulada en FM de distinta frecuencia para cada canal. El esquema general puede verse en la figura 5.13.

Datos:

- El sistema se va a caracterizar con un tono de prueba de 3 kHz:

$$x_1(t) = x_2(t) = \dots = x_N(t) = \cos(2\pi 3000 t)$$

- Densidad espectral de ruido unilateral a la entrada del receptor: $N_0 = 10^{-19}$ W/Hz.
- Todos los moduladores tienen la misma potencia de salida.
- La frecuencia central del filtro paso banda del transmisor es de 1 GHz, su ancho de banda vale $B_T = 8$ MHz.
- El amplificador del transmisor gana $G_T = 10$ dB.

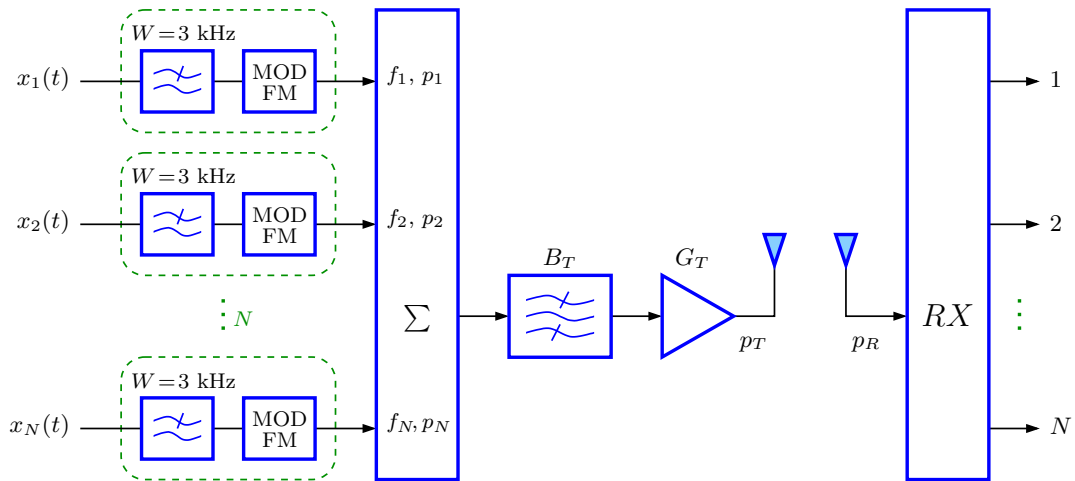


Figura 5.13: Esquema del sistema.

- La potencia que entrega el transmisor a la antena es $p_T = 10$ W.
1. Si el número de canales es $N = 40$, y la desviación máxima de cada modulador FM vale $\Delta f = 47$ kHz, represente el espectro a la salida del filtro paso banda de 8 MHz del transmisor, indicando solamente: frecuencia central del primer canal, ancho de banda de un canal, banda de guarda entre canales y potencia de cada canal. La potencia de salida del transmisor, p_T , es de 10 W. Recuerde que $p_1 = p_2 = \dots p_N$.
 2. Si se quiere conseguir una relación $(S/N)_s \geq 30$ dB para cada uno de los N canales, calcule el número máximo de canales, N_{max} , que puede soportar el sistema, y la nueva Δf . La potencia de señal a la entrada del receptor es $p_R = 10^{-13}$ W. Considere $D \gg 1$, si lo necesita. Incluya bandas de guarda entre canales de valor igual al ancho de banda de Carson, con un total de guardas idéntico al número de canales multiplexados.

Problema 5.13 (Junio de 1994)

De una señal modulada en frecuencia tenemos la siguiente información:

- La potencia media total es de 1250 W.
- La desviación máxima de frecuencia, Δf , es de 6 kHz.
- La señal moduladora, $x_m(t)$, es un tono (referencia coseno).
- El **espectro** de la señal modulada se observa en la figura 5.14.

1. Calcule la expresión temporal de la señal modulada, $y_{FM}(t)$.
2. Calcule el ancho de banda de la señal $y_{FM}(t)$ según la regla de Carson.

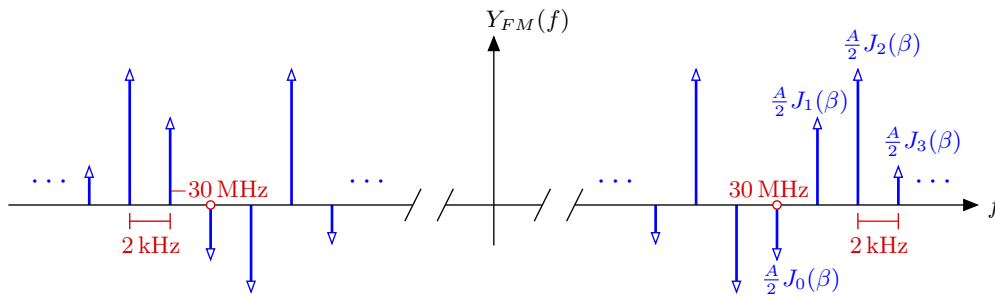


Figura 5.14: Espectro de la señal modulada.

3. Calcule el ancho de banda de la señal $y_{FM}(t)$ tomando como significativas aquellas componentes espectrales cuyo valor de $J_n(\beta)$ cumpla la condición $|J_n(\beta)| > 0,01$.
4. Calcule la potencia media contenida en el ancho de banda de Carson. Compare el resultado con la potencia media total de la señal. ¿Qué tanto por ciento de la potencia total está contenido en el ancho de banda de Carson? ¿Cuántos decibelios hay de diferencia entre ambas potencias?
5. Dibuje el diagrama de bloques de un sistema FM (modulador y demodulador), comentando brevemente la función de cada bloque.

Nota: puede consultar los valores de las funciones de Bessel en los apéndices.

Problema 5.14 (Septiembre de 1994)

De la transmisión de una cierta emisora se conocen los siguientes datos:

- Potencia media de la señal moduladora normalizada: $\langle x_n^2 \rangle = 0,5$ W.
- Ancho de banda de la señal moduladora: $W = 4$ kHz.
- Tipo de modulación empleado: DBL.
- Potencia de pico del transmisor: $PEP = 50$ W.

Se desea estimar la calidad de un receptor coherente, situado a una distancia del transmisor tal que la atenuación del trayecto es igual a 60 dB. El diagrama de bloques de dicho receptor se muestra en la figura 5.15, los filtros se describen en la figura 5.16, y se admite que todo el ruido está concentrado en la entrada del receptor y es blanco, gaussiano y aditivo, con $N_0/2 = 10^{-12}$ W/Hz.

1. Calcule la relación señal a ruido de predetección, $(S/N)_e$, expresada en dB.
2. Calcule la relación señal a ruido de postdetección, $(S/N)_s$, expresada en dB, cuando $\alpha = 1$. (Nota: aquí α no es el factor de redondeo de un coseno alzado.)
3. Repita el apartado anterior con $\alpha = 1,5$.

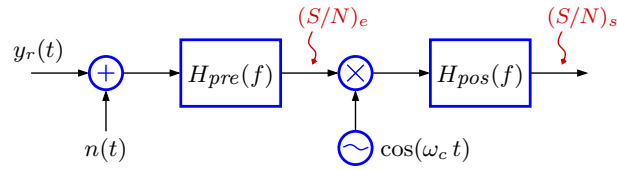


Figura 5.15: Diagrama de bloques del receptor.

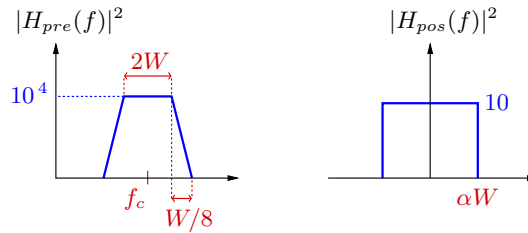


Figura 5.16: Filtros del receptor.

Problema 5.15 (Febrero de 1995)

La emisora de TV *Antena 3* quiere distribuir una señal de televisión analógica desde el centro de producción principal en Madrid a varias capitales de provincia, por medio del satélite *Hispasat*. Para ello se dispone de un enlace cuyo transmisor emplea un modulador de audio+vídeo como el mostrado en la figura 5.17.

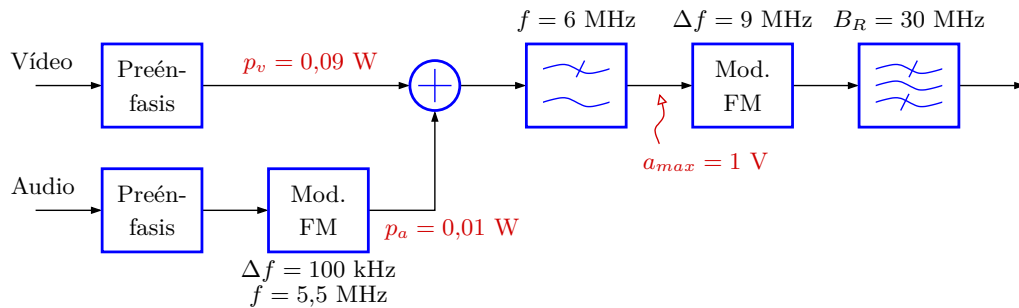


Figura 5.17: Transmisor analógico de TV.

Otros datos de interés son:

- Ancho de banda de la señal de vídeo: 4 MHz.
- Ancho de banda de la señal de audio: 15 kHz.
- Frecuencia de preénfasis para la señal de vídeo: 0,5 MHz.
- Todos los filtros son ideales.
- La señal moduladora de vídeo+audio está normalizada (tiene valor de pico 1).
- Densidad espectral de ruido a la entrada del receptor: $N_0 = 10^{-20}$ W/Hz.
- Considere que todo el sistema está adaptado a $R = 1 \Omega$.

1. Realice un esquema de bloques completo y detallado del demodulador del receptor.
2. Si la potencia de señal a la entrada del receptor es $p_{RX} = 10^{-9}$ W, calcule la relación (S/N) (en dB) de la señal compuesta, vídeo+audio, a la salida del primer demodulador de FM del esquema que propuso en el apartado anterior. (Ayuda: recuerde que la amplitud máxima de la señal que entra al segundo modulador de FM del transmisor es igual a la unidad.)
3. Calcule la relación (S/N) de salida para la señal de vídeo en recepción.

Problema 5.16 (Junio de 1995)

Se tiene un modulador de AM como el de la figura 5.18, del que se sabe que el oscilador local encargado de generar la portadora está afectado por una interferencia, de forma que su expresión temporal es:

$$c(t) = A_c \cos[2\pi 10^6 t + 0,2 \sin(2\pi 10^3 t)]$$

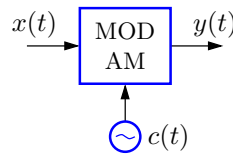


Figura 5.18: Modulador AM.

Los parámetros del modulador de AM son: amplitud media de la envolvente a la salida $A = 10$ V; índice de modulación $m = 1$.

1. Represente la densidad espectral de potencia unilateral a la salida cuando se anula la moduladora, $x(t) = 0$. Indique la frecuencia y amplitud de las líneas espectrales.
2. Repita el apartado anterior cuando se modula a la portadora con una señal sinusoidal $x(t) = 10 \cos(2\pi 10^4 t)$.
3. Calcule la potencia total de salida para los dos casos anteriores.

Suponga que se demodula con un demodulador coherente cuyo oscilador local entrega un tono (portadora recuperada):

$$c'(t) = A'_c \cos(\omega_c t)$$

4. Obtenga la expresión de la señal demodulada. Represente cualitativamente su densidad espectral de potencia bilateral. Comente el resultado. (Nota: trabaje con la moduladora sinusoidal del segundo apartado.)

Problema 5.17 (Septiembre de 1995)

Se tiene el sistema transmisor-receptor de radiodifusión en FM de la figura 5.19.

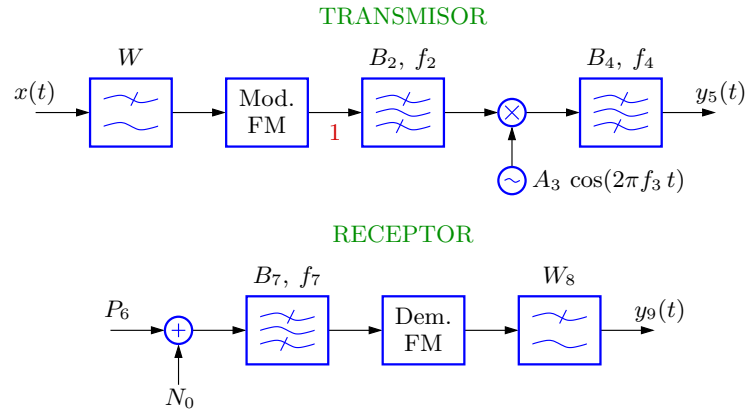


Figura 5.19: Sistema de transmisión-recepción propuesto.

Datos:

- Señal moduladora (en voltios): $x(t) = \cos(2\pi \cdot 50 \cdot 10^3 t)$.
- Ancho de banda del filtro paso bajo del transmisor: $W = 50$ kHz.
- Constante de desviación del modulador FM: $f_d = 50$ kHz/V.
- El oscilador interno del modulador FM trabaja a $f_0 = 1$ MHz.
- La señal FM del punto 1 tiene una potencia: $p_1 = 2$ W.
- Valor de pico del oscilador local: $A_3 = 10$ V.
- Potencia recibida: $P_6 = -100$ dBm.
- Densidad espectral de ruido a la entrada del receptor: $N_0 = -160$ dBm/Hz.
- Todo el sistema está adaptado a $R = 1 \Omega$.

1. Calcule la amplitud de la señal FM en el punto 1. Calcule y represente el espectro unilateral de la señal FM en el punto 1, indicando la amplitud y frecuencia de cada delta.
2. Si la frecuencia de salida del transmisor ha de ser 100 MHz, elija la frecuencia del segundo oscilador, f_3 , y el ancho de banda óptimo y la frecuencia central de los filtros ($B_2, f_2, B_4, f_4, B_7, f_7$ y W_8).
3. Comente qué es y para qué se utiliza el mezclador con oscilador del transmisor.
4. Calcule la potencia a la salida del transmisor, p_5 .
5. Calcule la relación (S/N) a la salida del demodulador, y comente si el valor obtenido es malo, regular, bueno o muy bueno.

Problema 5.18 (Junio de 1996)

El servicio secreto del país *A* ha realizado un análisis de las emisiones realizadas por el país *B* en la banda de 1 a 2 MHz. El resultado es el espectro unilateral de la figura 5.20.

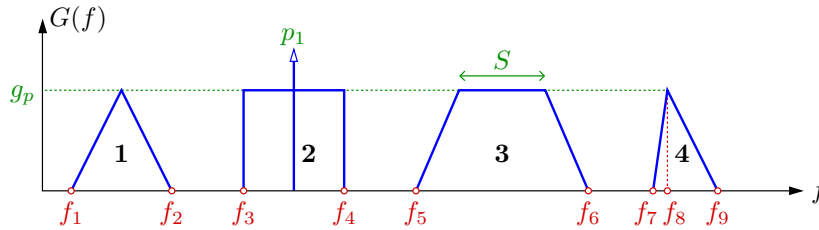


Figura 5.20: Espectro unilateral de las emisiones detectadas.

Datos:

$f_1 = 1100$ kHz	$f_5 = 1500$ kHz	$f_9 = 1806$ kHz
$f_2 = 1110$ kHz	$f_6 = 1550$ kHz	$g_p = 10^{-10}$ W/Hz
$f_3 = 1295$ kHz	$f_7 = 1800$ kHz	$p_1 = 10^{-5}$ W
$f_4 = 1305$ kHz	$f_8 = 1801$ kHz	$S = 32$ kHz

En las cuatro emisiones, el ancho de banda de las señales moduladoras empleadas vale $W = 5$ kHz, y el valor cuadrático medio de las moduladoras normalizadas es $\langle x_n^2 \rangle = 0,1$ (el mismo para las 4 emisiones).

1. Clasifique las cuatro señales, indicando cuál puede ser la modulación empleada en cada una de ellas.
2. Conforme a la clasificación efectuada en el apartado anterior, calcule los parámetros característicos de las cuatro emisiones: ancho de banda de transmisión, potencia media, e índice de modulación (si procede).
3. Una vez conocidos los tipos de modulación, se pretende interferir las emisiones. Para ello se va a aumentar el nivel de ruido térmico en toda la banda, por medio de un generador de ruido blanco. Sabiendo que una emisión se considera interferida cuando su relación (S/N) de salida (postdetección) es menor o igual que 10 dB, calcule cuál ha de ser el valor de la densidad espectral de potencia de ruido unilateral, N_0 , en el lugar donde se realizó el análisis de la figura 5.20, para garantizar que se interfieren las emisiones 1, 2 y 3.

Problema 5.19 (Septiembre de 1996)

Tenemos un transmisor que puede trabajar con modulación AM o FM, cuyo esquema es el de la figura 5.21.

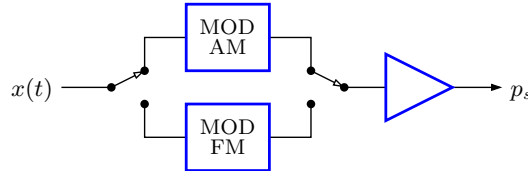


Figura 5.21: Esquema del transmisor empleado.

Datos:

- Ancho de banda en banda base: $W = 3$ kHz.
- Índice de modulación en AM: $m = 1$.
- Máxima desviación de frecuencia en FM: $\Delta f = 12$ kHz.
- Potencia máxima de salida del amplificador con señal sinusoidal: 100 W.

1. Si la moduladora vale $x(t) = \cos(\omega_m t)$, calcule la potencia media transmitida para las dos modulaciones.
2. Considere ahora que $x(t)$ es una señal vocal cuya función densidad de probabilidad de amplitud es la de la figura 5.22.

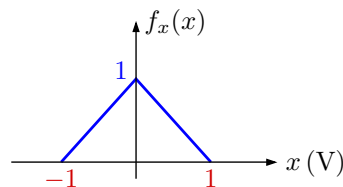


Figura 5.22: Función densidad de probabilidad de la señal vocal.

Calcule, en %, cuanto variará, con respecto al apartado anterior, la potencia media y la potencia de pico para las dos modulaciones.

Se ajustan el modulador de AM y el de FM para conseguir la misma potencia media a la salida del amplificador: $p_T = 20$ W.

La atenuación del trayecto de propagación se puede calcular como:

$$A_t(\text{dB}) = 50 + 20 \log[d(\text{km})]$$

Y la densidad espectral de potencia de ruido a la entrada del RX vale: $N_0 = 10^{-13}$ W/Hz.

3. Para ambas modulaciones, calcule la relación (S/N) que se conseguirá a la salida de un receptor situado a una distancia de 10 km, cuando se emplea como señal moduladora un tono, $x(t) = \cos(\omega_m t)$, con $\omega_m = 2\pi \cdot 3 \cdot 10^3$ rad/s. Comente el resultado.

Problema 5.20 (Febrero de 1997)

Se pretende comparar dos moduladores, uno lineal y otro angular, en base a diferentes parámetros. Los esquemas de ambos moduladores aparecen en la figura 5.23.

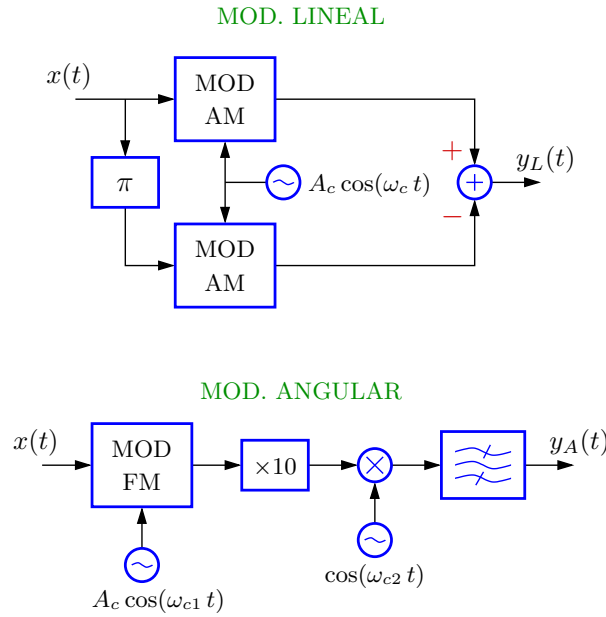


Figura 5.23: Esquema de los moduladores lineal y angular.

Datos:

- Los dos moduladores AM tienen igual índice de modulación (m). Ambos entregan a la salida un valor medio de envolvente $A(V)$.
- El bloque $\times 10$ es un multiplicador de frecuencia.
- El modulador FM tiene un índice de modulación $\beta = 1$, y entrega a la salida una amplitud $A'(V)$.
- En el modulador angular los tonos de los osciladores son: $f_{c1} = 1$ MHz, $f_{c2} = 100$ MHz.
- En el modulador angular la frecuencia de corte superior del filtro paso banda es f_{c2} .
- Como señal moduladora se utiliza (en ambos moduladores) un tono de prueba:

$$x(t) = A_m \cos(\omega_m t) ; \quad f_m = 5 \text{ kHz}$$

Para la señal modulada linealmente $y_L(t)$:

1. Obtenga la expresión temporal de $y_L(t)$.
2. Dibuje el espectro de la señal $y_L(t)$, indicando frecuencias y amplitudes.
3. Identifique la modulación resultante.
4. Calcule la potencia media total de $y_L(t)$.
5. Calcule la *PEP* (potencia equivalente de pico) de $y_L(t)$.
6. ¿Qué diferencia, en dB, existe entre las dos potencias calculadas anteriormente (potencia media total y *PEP*)?
7. Calcule el ancho de banda de $y_L(t)$.
8. ¿Qué sugeriría para aumentar la eficiencia espectral de $y_L(t)$?

Para la señal modulada angularmente $y_A(t)$:

9. Obtenga la expresión temporal de $y_A(t)$.
10. Calcule la potencia media total de $y_A(t)$.
11. Calcule el ancho de banda aproximado, según la regla de Carson, de $y_A(t)$.
12. Dibuje el esquema de un demodulador FM, describiendo brevemente el cometido de cada bloque.

Con la intención de estudiar las diferencias existentes entre las dos modulaciones:

13. Compare razonadamente los anchos de banda.
14. Compare las potencias medias cuando la *PEP* es la misma. ¿Qué valor de m (índice de modulación) consigue que las potencias medias difieran en 3 dB?

Problema 5.21 (Junio de 1997)

La señal que se transmite desde una unidad móvil de TV a sus estudios centrales viene definida por:

$$y(t) = 10 \cos \left[2\pi \cdot 11,420 \cdot 10^9 t + 2\pi \cdot 9 \cdot 10^6 \int_0^t x_n(\tau) d\tau \right]$$

Donde $x_n(\tau)$ es una señal banda base, normalizada, con ancho de banda 5 MHz y potencia 0,2 W. (Se trabaja sobre $R = 1 \Omega$.)

1. Calcule la potencia media y la potencia de cresta (*PEP*) de la señal transmitida. Obtenga el ancho de banda, la frecuencia instantánea máxima y la frecuencia instantánea mínima de la señal transmitida.

Cuando se recibe en los estudios centrales, la señal ha sufrido una atenuación de 100 dB. El equipo receptor que se emplea para su demodulación utiliza una doble conversión de frecuencia, ver figura 5.24. La densidad espectral de ruido unilateral a la entrada, suponiendo que el ruido producido por todos los componentes se ha referido a ese punto, es $N_0 = 10^{-18}$ W/Hz.

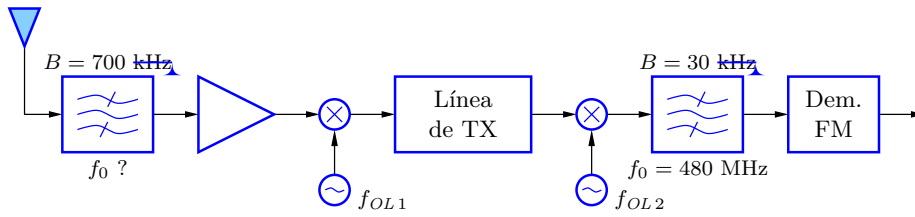


Figura 5.24: Equipo receptor.

2. Elija el valor adecuado para la frecuencia central del filtro de entrada.
3. Si la frecuencia del primer oscilador, f_{OL1} , sólo puede tomar los valores concretos 10 y 11 GHz, mientras que la del segundo oscilador puede tomar cualquier valor dado por la relación $f_{OL2} = 1400 + 10 \cdot n$ MHz, donde n es un número natural entre 1 y 60, calcule los valores de f_{OL1} y f_{OL2} que hacen funcionar correctamente el receptor.
4. Calcule la relación (S/N) a la salida del demodulador.
5. Halle la frecuencia de corte de la red de preénfasis-deénfasis que permite mejorar la relación (S/N) a la salida del demodulador en 20 dB.
6. Suponga que la desviación máxima de frecuencia del modulador se puede aumentar hasta 35 MHz, y que el máximo ancho de banda disponible para los filtros de recepción es 72 MHz. Calcule la desviación de frecuencia que optimiza la (S/N) a la salida del demodulador.

Problema 5.22 (Septiembre de 1997)

Se desea comparar las características técnicas de dos sistemas de telecomunicación que transmiten la misma información. El primero transmite la señal $y_A(t)$ definida por:

$$y_A(t) = 10 \cos \left[2\pi \cdot 104,6 \cdot 10^6 t + 2\pi \cdot 75 \cdot 10^3 \int_0^t x_n(\tau) d\tau \right]$$

Mientras que el segundo transmite la señal $y_B(t)$ dada por la ecuación:

$$y_B(t) = [100 + 50 x_n(t)] \cos(2\pi \cdot 1046 \cdot 10^3 t + \pi/3)$$

Donde $x_n(t)$ es una señal banda base, normalizada, cuyo ancho de banda es 15 kHz y su potencia vale 0,2 W. (Se trabaja sobre $R = 1 \Omega$.)

1. Calcule la potencia media y la potencia de cresta (*PEP*) de la señal $y_A(t)$. Obtenga su ancho de banda e indique el tipo de modulación empleado.
2. Calcule la potencia media y la potencia de cresta (*PEP*) de la señal $y_B(t)$. Obtenga su ancho de banda e indique el tipo de modulación empleado.

En su trayecto radioeléctrico, la señal $y_A(t)$ se atenúa 100 dB, y la $y_B(t)$ pierde 65 dB. Los equipos que se emplean para su demodulación utilizan una conversión simple de frecuencia, ver figura 5.25. La densidad espectral de ruido unilateral a la entrada de ambos receptores, suponiendo que todo el ruido se ha referido a ese punto, es $N_0 = 10^{-18}$ W/Hz.

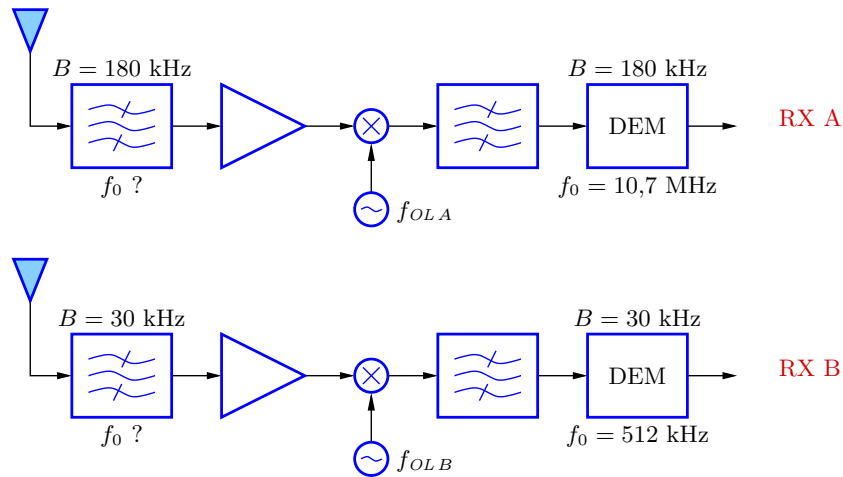


Figura 5.25: Equipos receptores.

3. Indique cuál de los dos receptores utilizaría para recibir la señal $y_A(t)$. Para el receptor seleccionado, elija el valor de la frecuencia central del filtro que hay tras la antena (f_0) y el valor de la frecuencia del oscilador local (f_{OL}).
4. Repita el apartado anterior para la señal $y_B(t)$.
5. Calcule la relación (S/N) a la salida del demodulador para la señal $y_A(t)$.
6. Calcule la relación (S/N) a la salida del demodulador para la señal $y_B(t)$.

Problema 5.23 (Diciembre de 1997)

En la figura 5.26 se muestra el diagrama de bloques simplificado del receptor FM de un automóvil.

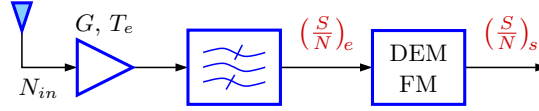


Figura 5.26: Receptor FM de un automóvil.

Datos:

Amplificador:
 $G = 20$ dB
 $T_e = 400$ K

Filtro (ideal):
 $f_0 = 1$ MHz
 $B = 200$ kHz

1. Con el motor del vehículo parado, a la entrada del amplificador solamente hay ruido térmico con una densidad espectral de potencia unilateral $N_0 = 10 \log(k T_0) \approx -174$ dBm/Hz. En estas condiciones, calcule la potencia de ruido a la entrada del demodulador.
2. Al poner en marcha el vehículo, el motor de éste genera un fuerte ruido impulsivo (que se agrega al ruido térmico). La densidad espectral de potencia unilateral, a la entrada del amplificador, del ruido impulsivo se observa en la figura 5.27. Calcule la nueva potencia de ruido a la entrada del demodulador.

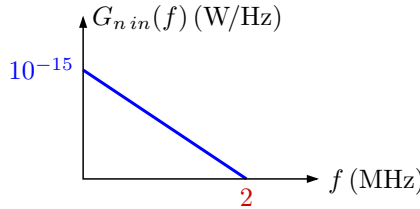


Figura 5.27: Ruido del motor.

3. Se prueba el receptor utilizando una señal modulada en FM por un tono normalizado de 10 kHz, con una desviación máxima de frecuencia $\Delta f = 20$ kHz. La potencia de entrada se ajusta para conseguir una relación (S/N) a la salida del filtro:

$$\left(\frac{S}{N}\right)_e = \frac{p_R}{N_0 B} = 10 \text{ dB}$$

Calcule la calidad, expresada en dB, que tendríamos a la salida del demodulador de FM, $(S/N)_s$.

4. Comente cómo se podría modificar el receptor para conseguir mejorar la $(S/N)_s$.

Problema 5.24 (Junio de 1998)

Un sistema analógico vía satélite transmite señales de TV moduladas en FM con una desviación máxima $\Delta f = 8$ MHz, un ancho de banda de 30 MHz, y con una red de preénfasis-deénfasis cuya frecuencia de corte es 500 kHz. El ancho de banda de la señal moduladora de TV es de 5 MHz y su potencia de 0,2 W (es una señal normalizada). En la figura 5.28 se describe el diagrama de bloques del receptor que se usa para recibir los canales situados entre 10950 y 12050 MHz.

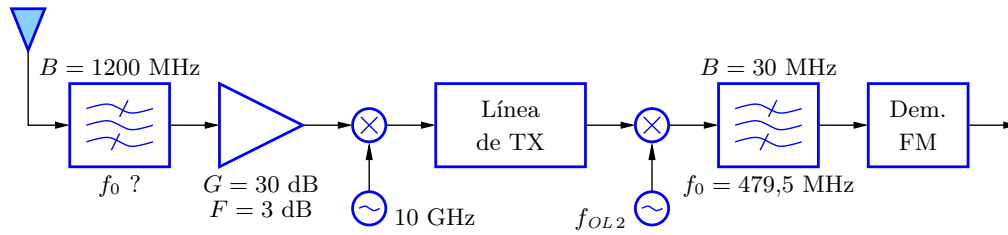


Figura 5.28: Equipo receptor.

1. Determine la frecuencia central del filtro de entrada, f_0 .
2. Determine la frecuencia del segundo oscilador, f_{OL2} , si se desea recibir un canal situado en 11503 MHz y el margen de utilización de este oscilador está situado entre 1500 y 2600 MHz.

La potencia que se recibe de cada canal, a la salida de la antena receptora, es de 10 pW. La temperatura de ruido de la antena es de 150 K. Los filtros y mezcladores se pueden considerar ideales, y no introducen pérdidas ni ruido. La línea de transmisión, que se encuentra a temperatura ambiente, $T_0 = 300$ K, presenta una atenuación que es función de la frecuencia, y sigue la expresión:

$$\alpha(\text{dB/m}) = 0,0516 \sqrt{f(\text{MHz})}$$

3. Calcule la relación señal a ruido de predetección cuando la línea de transmisión es de 10 m y el canal sintonizado está centrado en 11503 MHz.
4. Calcule la relación señal a ruido de postdetección para el mismo caso del apartado anterior.

Problema 5.25 (Septiembre de 1998)

Se desea diseñar un receptor superheterodino para recibir las emisoras de onda media que se encuentran situadas entre 512 y 1610 kHz. La separación entre emisoras es de 9 kHz, y el esquema de bloques del receptor superheterodino se muestra en la figura 5.29.

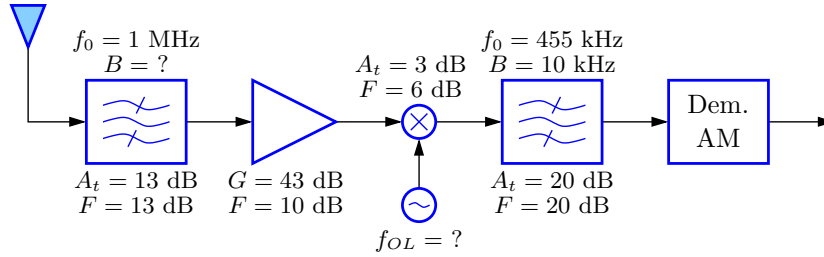


Figura 5.29: Receptor superheterodino.

1. Determine el ancho de banda del filtro de entrada, supuesta una función de transferencia rectangular, si el receptor debe ser capaz de demodular cualquier emisora de onda media.
2. Calcule la figura de ruido equivalente del conjunto formado por los dos filtros, el amplificador y el mezclador. Encuentre la ganancia del conjunto.

A la salida de la antena se recibe una señal modulada en AM, con potencia media de 52,78 μW , índice de modulación del 50 %, frecuencia de portadora de 1179 kHz, y potencia de la señal moduladora, $x(t)$, de 1 W, siendo su tensión de pico de 3 voltios y su ancho de banda de 5 kHz. Además se sabe que la densidad espectral de potencia de ruido medida a la salida de la antena es $N_{in} = 52,78 \cdot 10^{-15} \text{ W/Hz}$.

3. Escriba la expresión temporal de la señal recibida a la salida de la antena, sustituyendo adecuadamente el valor de las amplitudes.
4. Determine la frecuencia del oscilador para recibir el canal anteriormente mencionado, si su margen de oscilación está situado entre 950 y 2122 kHz.
5. Calcule la relación señal a ruido de predetección a la entrada del demodulador.
6. Calcule la relación señal a ruido de postdetección a la salida del demodulador.

Problema 5.26 (Septiembre de 1999)

En la figura 5.30 se observa el diagrama de bloques de un transmisor y un receptor de AM. El sistema se va a utilizar para enviar tonos de señalización, $x(t)$, en la banda de 0 a 5 kHz.

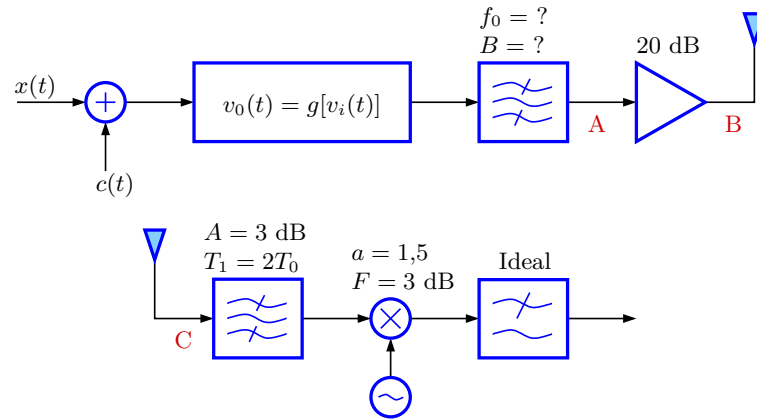


Figura 5.30: Diagrama de bloques de un sistema AM.

Datos:

- La señal de entrada al sistema es: $x(t) = A_m \cos(\omega_m t)$.
- La portadora del oscilador local vale: $c(t) = A_c \cos(\omega_c t)$.
- Las pulsaciones ω_c y ω_m se corresponden con las frecuencias $f_c = 300$ MHz y $f_m = 3$ kHz, respectivamente.
- La respuesta del bloque no lineal del transmisor es:

$$v_o(t) = 2v_i(t) + v_i^2(t)$$

Donde $v_o(t)$ es la tensión de salida, y $v_i(t)$ es la tensión de entrada.

- El amplificador de salida entrega a la antena (punto B) una $PEP = 112,5$ W, siendo la potencia media de la señal modulada (en el mismo punto) $p_y = 56,25$ W.
 - El ruido presente a la entrada del receptor se modela mediante la temperatura efectiva de la antena, $T_{in} = 5T_0$.
 - T_1 es la temperatura física, en Kelvin, a la que se encuentra el filtro de predetección.
 - El mezclador atenúa 1,5 veces de potencia, y tiene una figura de ruido de 3 dB.
 - El filtro de postdetección es ideal (no atenúa ni tiene ruido interno).
 - $T_0 = 300$ K.
1. Obtenga la expresión analítica de la señal AM en el punto A, $y_A(t)$. Indique claramente los pasos que siga para llegar al resultado final. (Deje y_A en función de ω_c , ω_m , A_m y A_c .)

2. Elija valores adecuados para la frecuencia central y el ancho de banda del filtro del transmisor.
3. Obtenga, en función de ω_c , ω_m , A_m y A_c , el índice de modulación, m , y la amplitud media de la envolvente, A , en los puntos A y B. Calcule los valores numérico de m y A en ambos puntos.
4. Calcule, en voltios, la amplitud máxima y mínima (A_{max} y A_{min}), de la señal modulada en el punto A, $y_A(t)$.

Se reciben 3 nW de señal en el punto C.

5. Calcule la relación (S/N) (dB) que se mide en el punto C.
6. Calcule la relación (S/N) (dB) a la salida del demodulador.

Problema 5.27 (Junio de 2000)

En una comunicación móvil analógica (sistema TACS¹), se transmite una señal vocal $x(t)$ desde una estación base hacia un móvil. En la figura 5.31 se detallan los diagramas de bloques del transmisor de la estación base y el receptor del terminal móvil.

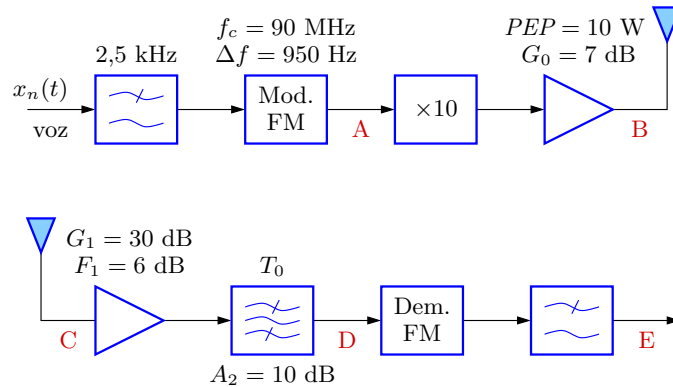


Figura 5.31: Transmisor y receptor.

Datos del transmisor:

- Señal moduladora $x(t)$:
 - Valor cuadrático medio de la moduladora normalizada: $\langle x_n^2(t) \rangle = 1/2$.
 - Ancho de banda: $W = 2,5$ kHz.
- Modulador FM:
 - Frecuencia portadora: $f_c = 90$ MHz.

¹Total Access Communication System: Sistema europeo analógico de telefonía móvil pública.

- Desviación máxima de frecuencia: $\Delta f = 950$ Hz.
- El bloque $\times 10$ es un multiplicador de frecuencia.
- Amplificador de salida:
 - Ganancia: $G_0 = 7$ dB.
 - Potencia equivalente de pico: $PEP = 10$ W.

Datos del medio:

- Atenuación: $A_t = 120$ dB.

Datos del receptor:

- Capta por la antena un ruido blanco, que modelamos según una temperatura equivalente $T_{in} = 3,009 \cdot 10^5$ K.
 - Amplificador de bajo nivel de ruido:
 - Ganancia: $G_1 = 30$ dB.
 - Figura de ruido: $F_1 = 6$ dB.
 - Filtro de predetección:
 - Temperatura física: T_0 (300 K).
 - Atenuación: $A_2 = 10$ dB.
1. Escriba la expresión analítica de la señal modulada en los puntos A, B y C de la figura 5.31. Indique claramente el valor de todos los parámetros (amplitudes, frecuencias, etc.).
 2. Calcule la frecuencia central y el ancho de banda del filtro de predetección.
 3. ¿Qué potencia de señal se transmite (punto B)?
 4. Calcule la temperatura equivalente de ruido del receptor (en el punto C).
 5. Calcule la relación (S/N) (dB) a la entrada del demodulador (punto D).
 6. Calcule la relación (S/N) (dB) a la salida del demodulador (punto E).

Problema 5.28 (Septiembre de 2000)

La densidad espectral de potencia unilateral de una señal modulada en FM se muestra en la figura 5.32.

1. Calcule la potencia media total de la señal modulada.
2. Calcule el ancho de banda según la regla de Carson.

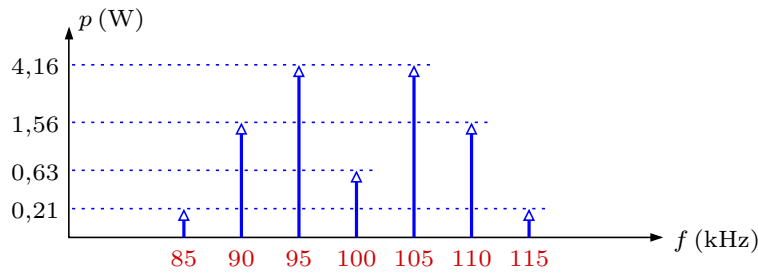


Figura 5.32: Densidad espectral de potencia unilateral.

3. Deduzca la expresión temporal de la señal modulada, indicando claramente los valores numéricos de la amplitud, A , el índice de modulación, β , la frecuencia de portadora, f_c , y la frecuencia moduladora, f_m .
4. Represente el nuevo espectro de potencia unilateral si se varía el índice de modulación: $\beta = 0,5$. Exprese los valores en función de la amplitud A .

Problema 5.29 (Junio de 2002)

La señal modulada en amplitud:

$$y(t) = A[1 + m x_n(t)] \cos(\omega_c t)$$

debe elevarse o bajarse en frecuencia a una nueva portadora de pulsación: $\omega'_c = \omega_c \pm \Delta\omega$; es decir: la nueva señal modulada en amplitud es de la forma:

$$y'(t) = A'[1 + m x_n(t)] \cos(\omega'_c t)$$

1. Demuestre que un modulador de producto cuya salida es: $y(t) \cdot \cos(\Delta\omega t)$, realizará esta conversión.
2. Dibuje un diagrama de bloques simple para este conversor de frecuencia, y especifique el filtrado necesario para los dos casos de aumento o reducción de frecuencia.
3. Demuestre que un dispositivo no lineal con una relación de entrada a salida dada por: $v_s = a_1 v_e + a_2 v_e^2$, realizará esta conversión de frecuencia si a la entrada se le aplica: $y(t) + \cos(\Delta\omega t)$.
4. Para este último caso dibuje cualitativamente el espectro de potencia de la señal de salida y especifique el filtrado necesario para realizar la conversión de frecuencia hacia arriba.

Problema 5.30 (Junio de 2002)

Se desea transmitir una señal de TV analógica por un sistema de modulación en frecuencia. Las características del sistema se detallan a continuación.

Modulador-Transmisor:

- Señal moduladora: normalizada, paso bajo, de ancho de banda 5 MHz, y de valor cuadrático medio 0,33.
- Frecuencia de la portadora: 8 GHz.
- Desviación máxima de frecuencia en el modulador: 8 MHz.
- Red de preénfasis.
- Potencia transmitida: 100 W.
- Ancho de banda a la salida del transmisor: el que corresponda de acuerdo con la regla de Carson ($\sim 99\%$ de la potencia).

Canal:

- Sistema lineal e invariante, aditivo de ruido blanco gaussiano.

Receptor-Demodulador:

- Temperatura de ruido a la entrada del receptor: 180 K.
- Figura de ruido del receptor: 1,2 dB.
- Relación señal/ruido equivalente a la entrada del receptor: 15 dB (con filtro de radiofrecuencia de ancho de banda igual al de salida del transmisor).
- Red de deénfasis, frecuencia de corte a 3 dB: 500 kHz.

Nota: Se supone adaptación de impedancias en todo el sistema.

1. Determine la atenuación del canal a la frecuencia de trabajo y la relación señal/ruido que tendremos una vez realizada la demodulación.
2. ¿Cómo podemos mejorar en 3 dB la relación (S/N) en postdetección, si la potencia del transmisor, la atenuación del canal, los datos de ruido y las redes de preénfasis-deénfasis son parámetros fijos del sistema?

Problema 5.31 (Enero de 2003)

Se necesita un sistema analógico que cumpla los siguientes requisitos:

Información a transmitir: un canal telefónico (voz analógica). Ancho de banda 4 kHz y valor cuadrático medio de la señal normalizada $\langle x_n^2 \rangle = 0,5$ W.

Canal de transmisión: un cable, con 50 kHz libres centrados en 200 MHz. La atenuación total del cable es de 54 dB (a 200 MHz).

Demodulador: su sensibilidad (umbral mínimo de recepción) es de -84 dBm.

Ruido: suponga que todo el ruido (incluyendo canal y receptor) se puede modelar como una densidad espectral unilateral $N_0 = 4 \cdot 10^{-18}$ W/Hz a la entrada del receptor. Considere que el ruido permanece constante aunque cambien otros parámetros.

Distorsión: para que el transmisor no distorsione apreciablemente la información, no debe transmitir más de 1 μ W.

Calidad: se requiere una relación señal a ruido de al menos 50 dB a la salida del demodulador.

Diseñe razonadamente un sistema adecuado. Al menos debe:

- Elegir el tipo de modulación.
- Dibujar y explicar el sistema (con transmisor y receptor).
- Calcular la potencia de transmisión necesaria.
- Verificar que se cumplen los requisitos de calidad.
- Especificar cómo son las señales en cada punto del sistema (ancho de banda, potencia, etc.).

Problema 5.32 (Junio de 2003)

En la figura 5.33 se representa el diagrama de bloques de un modulador FM modulado con un tono. En la salida de dicho sistema (punto D) queremos obtener una señal modulada en frecuencia con un índice de modulación $\beta = 64$ y una frecuencia portadora $f_0 = 23,6$ MHz.

Datos:

$$x_c(t) = A_c \cos(\omega_c t) ; \quad f_c = 200 \text{ kHz}$$

$$x(t) = A_m \cos(\omega_m t) ; \quad f_m = 1 \text{ kHz}$$

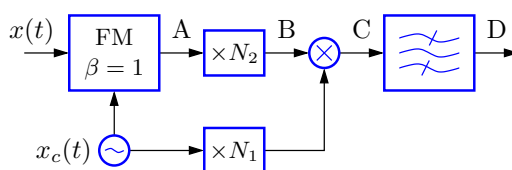


Figura 5.33: Diagrama de bloques del modulador FM.

1. Comente razonadamente el esquema de modulación mostrado.
2. Calcule las expresiones temporales en los puntos A, B y C, y dibuje aproximadamente los espectros de potencia de las señales.
3. Calcule los valores de N_1 y N_2 (de los multiplicadores de frecuencia) para que el sistema cumpla los requisitos de partida.
4. Calcule la frecuencia central y el ancho de banda del filtro paso banda ubicado en la salida del sistema.
5. Suponiendo que el filtro paso banda es ideal, calcule la expresión temporal de la señal en el punto D.

Problema 5.33 (Septiembre de 2003)

Se desea transmitir una señal de TV analógica por un sistema de modulación en frecuencia. Las características del sistema se detallan a continuación.

Modulador-Transmisor:

- Señal moduladora: normalizada, paso bajo, de ancho de banda 5 MHz, y de valor cuadrático medio 0,28.
- Frecuencia de la portadora: 8,5 GHz.
- Desviación máxima de frecuencia en el modulador: 8 MHz.
- Tiene red de preénfasis.
- Potencia transmitida: 160 W.
- Ancho de banda a la salida del transmisor: el que corresponda de acuerdo con la regla de Carson.

Canal:

- Sistema lineal e invariante, aditivo de ruido blanco gaussiano.

Receptor-Demodulador:

- Temperatura de ruido a la entrada del receptor: 140 K.

- Figura de ruido del receptor: 0,8 dB.
- Filtro de radiofrecuencia de ancho de banda igual al de salida del transmisor.
- Red de deénfasis, frecuencia de corte a 3 dB: 500 kHz.
- (S/N) mínima a la salida del demodulador, incluida la red de deénfasis: 45 dB.

Nota: Se supone adaptación de impedancias en todo el sistema.

Determine la atenuación máxima del canal (en dB), a la frecuencia de trabajo. Justifique los resultados.

Problema 5.34 (Febrero de 2004)

La implementación de un sintetizador musical explota la estructura armónica de una modulación de frecuencia con un único tono. En este sentido, en la figura 5.34 se muestra el diagrama de bloques de un sintetizador.

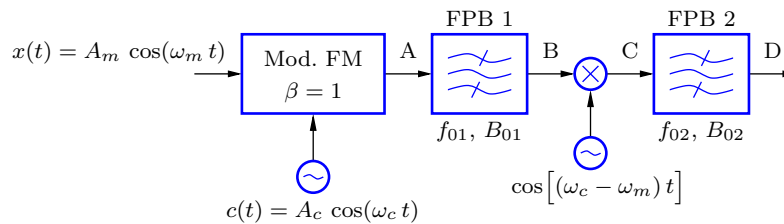


Figura 5.34: Diagrama de bloques del sintetizador.

Notas:

- f_{01} y f_{02} son las frecuencias centrales de los filtros paso banda (1) y (2), respectivamente.
 - B_{01} y B_{02} son los anchos de banda de los filtros paso banda (1) y (2), respectivamente.
 - Considere ambos filtros ideales, y con ganancia unidad en la banda de paso.
1. Obtenga la expresión temporal de la señal en el punto A. Dibuje aproximadamente su espectro de potencia.
 2. Si $f_{01} = f_c + (3/2) f_m$ y $B_{01} = 3,2 f_m$, calcule la expresión temporal de la señal y su espectro, en el punto B.
 3. Obtenga la expresión temporal de la señal en el punto C. Dibuje aproximadamente su espectro de potencia.
 4. Si $f_{02} = (5/2) f_m$ y $B_{02} = 3,2 f_m$, calcule la expresión temporal de la señal y su espectro, en el punto D.

Problema 5.35 (Junio de 2004)

Se desea transmitir una señal monoaural por un sistema analógico modulado en frecuencia. Las características del sistema se detallan a continuación.

- Modulador-transmisor:
 - Señal moduladora: normalizada, paso bajo, con ancho de banda 15 kHz y valor cuadrático medio 0,32.
 - Frecuencia de la portadora: 100 MHz.
 - Desviación máxima de frecuencia en el modulador: 75 kHz.
 - Tiene red de preénfasis.
 - Valor de pico de la señal modulada: 40 V.
 - Impedancia de salida del transmisor: 50 Ω .
 - Ancho de banda a la salida del transmisor: el que corresponda de acuerdo con la regla de Carson ($\sim 99\%$ de la potencia).
- Canal:
 - Sistema lineal e invariante, aditivo de ruido blanco gaussiano.
 - Atenuación (dB): $56 + 20 \log[f(\text{MHz}) \cdot d(\text{km})]$.
 - Distancia: $d = 100$ km.
- Receptor-demodulador:
 - Temperatura de ruido a la entrada del receptor: 300 K.
 - Figura de ruido del receptor: 6 dB.
 - Filtro de radiofrecuencia de ancho de banda igual al de salida del transmisor.
 - Con red de deénfasis. Frecuencia de corte a 3 dB: 2,1 kHz.
- Se supone adaptación en todo el sistema.

Determine la relación señal a ruido (dB) en recepción. Justifique los resultados.

Problema 5.36 (Noviembre de 2004)

Se desea transmitir una señal monoaural por un sistema analógico que utiliza modulación DBL.

Características del sistema:

- Modulador-Transmisor:
 - Señal moduladora: normalizada, paso bajo, de ancho de banda 15 kHz, y de valor cuadrático medio 0,32.
 - Frecuencia de la portadora: 200 MHz.
 - Valor de pico de la señal modulada: 100 V.

- Impedancia de salida del transmisor: 50Ω .
 - Canal:
 - Sistema lineal e invariante, aditivo de ruido blanco gaussiano.
 - Atenuación, en dB: $56 + 20 \log[f(\text{MHz}) \cdot d(\text{km})]$.
 - Distancia: $d = 50 \text{ km}$.
 - Receptor-Demodulador:
 - Temperatura de ruido a la entrada del receptor: 300 K .
 - Figura de ruido del receptor: 9 dB .
 - Filtro de radiofrecuencia de ancho de banda igual al de la señal modulada.
 - Filtro de audiofrecuencia de ancho de banda igual al de la señal moduladora.
 - Nota: Se supone adaptación de impedancias en todo el sistema.
1. Determine la relación señal a ruido (en dB) en recepción (a la salida del demodulador).
 2. ¿Cuánto valdrá la relación señal/ruido a la salida del demodulador si utilizamos modulación AM (índice de modulación del 80 %) en vez de DBL, manteniendo los demás parámetros del sistema iguales? ¿Qué conclusiones se pueden obtener? (Nota: ahora, en AM, el valor medio de la envolvente es de 100 V .)

Problema 5.37 (Noviembre de 2004)

En la figura 5.35 se observa el diagrama de bloques del sistema bajo estudio. La información normalizada $x_n(t)$ (punto 1), con ancho de banda $W = 4 \text{ kHz}$ y valor cuadrático medio $\langle x_n^2 \rangle = 0,1 \text{ W}$ (sobre 1Ω), se modula en DBL, entregando al medio (punto 2) una potencia $P_T(\text{dBm})$. El medio se encuentra a una temperatura física T_0 y atenúa $A_t = 60 \text{ dB}$. El receptor está compuesto por un filtro de predetección, un demodulador DBL y un filtro de postdetección. Los dos filtros son ideales, y no generan ruido; el primero tiene un ancho de banda $B = 8 \text{ kHz}$ y está centrado en 200 MHz , mientras que el segundo deja pasar $W = 4 \text{ kHz}$. El demodulador se caracteriza por una figura de ruido $F = 10 \text{ dB}$.

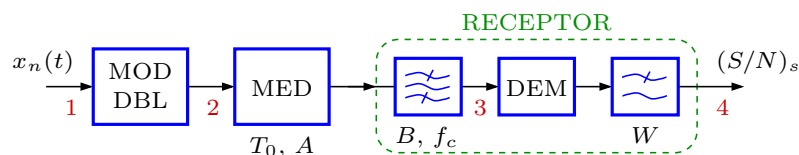


Figura 5.35: Sistema bajo estudio.

Calcule qué potencia debe transmitir el modulador — $P_T(\text{dBm})$, en el punto 2— para conseguir una calidad final $(S/N)_s = 36 \text{ dB}$.

Problema 5.38 (Junio de 2005)

De un sistema de comunicación FM tenemos los siguientes datos:

- El transmisor se puede modelar según el diagrama de bloques de la figura 5.36. La señal de información a la entrada es audio con $W = 15$ kHz, está normalizada y su valor cuadrático medio es $\langle x_n^2 \rangle = 0,1$. El filtro de preénfasis tiene una frecuencia de corte $f_{cc} = 500$ Hz. La portadora es un coseno, con frecuencia $f_c = 20$ MHz. El modulador desvía $\Delta f = 5$ kHz, y entrega una potencia media $p = 1$ W. El bloque $\times 10$ es un *multiplicador de frecuencia*. El filtro paso banda es ideal, y está adecuado, en frecuencia y ancho de banda (Carson), a la señal que recibe. El amplificador gana G_T (dB). La antena se supone ideal.
- Todo el sistema está adaptado a $R = 50 \Omega$.
- La atenuación del canal radioeléctrico se calcula mediante la expresión:

$$A_t(\text{dB}) = 25 + 17,38 \log_{10}[f(\text{MHz})] + 21,85 \log_{10}[d(\text{km})]$$

- Se impone, como condicionante de diseño del sistema, un ruido total equivalente, a la entrada del receptor, $N_0 = 10^{-13}$ W/Hz.
- Se requiere una calidad final, (S/N) , de 60 dB.
- Es necesario dar cobertura a una distancia de 40 km.

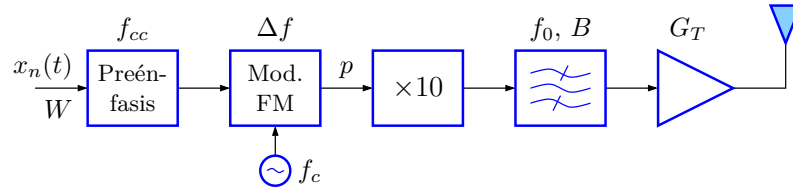


Figura 5.36: Diagrama de bloques del transmisor.

Diseñe un prototipo de receptor adecuado para el sistema descrito. Para ello:

1. Dibuje el diagrama de bloques del receptor. Use un demodulador sintonizado a 20 MHz.
2. Calcule la expresión temporal de la señal modulada a la entrada del amplificador del transmisor.
3. Calcule el valor de los parámetros que aún no se hayan fijado. Demuestre que el receptor propuesto cumple los requisitos exigidos.

Problema 5.39 (Febrero de 2006)

En la figura 5.37 se presenta el esquema del enlace descendente de un sistema de comunicaciones analógico por satélite. La modulación empleada es FM.

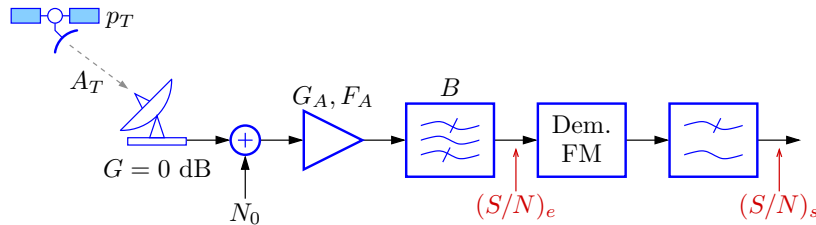


Figura 5.37: Esquema del sistema de comunicaciones.

Datos:

- Potencia transmitida por el satélite: $p_T = 400$ W.
 - Ancho de banda (de Carson) de la señal transmitida: $B = 10$ MHz.
 - Frecuencia portadora: $f_c = 10$ GHz.
 - Ancho de banda de la información moduladora: $W = 1$ MHz.
 - Valor cuadrático medio de la moduladora normalizada: $\langle x_n^2 \rangle = 0,5$.
 - Atenuación del trayecto radioeléctrico: $A_t = 140$ dB.
 - Densidad espectral de ruido a la entrada del amplificador: $N_0 = -203,98$ dBW/Hz.
 - El sistema está adaptado a 50Ω .
 - El sistema se encuentra a $T_0 = 300$ K.
 - Puede consultar los cuadros (tablas) de las funciones de Bessel en los apéndices.
1. Suponga en este apartado que $F_A = 0$ dB y $G_A = 0$ dB. Calcule la calidad final $(S/N)_s$ (dB).
 2. ¿Qué valores de F_A y G_A hacen que el sistema funcione adecuadamente?
 3. Suponga en este apartado que la moduladora es un tono de 1 MHz. Represente el espectro de potencia unilateral a la entrada del amplificador. Calcule los valores de interés. (Desprecie el ruido. Pinte únicamente el espectro contenido en el ancho de banda de Carson.)

Problema 5.40 (Febrero de 2006)

Sea el modulador AM de la figura 5.38.

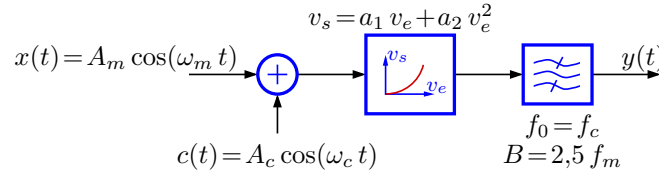


Figura 5.38: Modulador AM. $f_c \gg f_m$.

1. Calcule la expresión analítica de la señal a la salida, $y(t)$. (No sustituya la expresión de la señal moduladora, $x(t)$, hasta el final.)
2. Calcule la potencia media total y el índice de modulación de la señal modulada. Datos:
 - $A_m = 0,4$ V.
 - $A_c = 20$ V.
 - Impedancia: 50Ω .
 - $f_m = 3$ kHz.
 - $f_c = 200 f_m$.
 - $a_1 = 1$.
 - $a_2 = 0,125$.

Problema 5.41 (Junio de 2006)

En la figura 5.39.a se observa la pantalla de un analizador de espectros antes de conectarle nada. A continuación, se conecta un modulador AM muy ruidoso; en la figura 5.39.b se observa el espectro obtenido.

1. Calcule la temperatura equivalente de ruido (interno) del analizador, $T_e(\text{K})$, y su figura de ruido, $F(\text{dB})$.
2. De la señal AM, calcule la potencia media, $P_{AM}(\text{dBm})$, la potencia equivalente de pico, $PEP(\text{dBm})$, el índice de modulación, $m(\%)$, la frecuencia portadora, $f_c(\text{MHz})$, la frecuencia moduladora, $f_m(\text{kHz})$, y el ancho de banda, $B(\text{kHz})$.
3. Calcule la relación señal modulada a ruido en el analizador, $(S/N)(\text{dB})$.

(Nota: recuerde que el analizador tiene 50Ω de impedancia de entrada.)

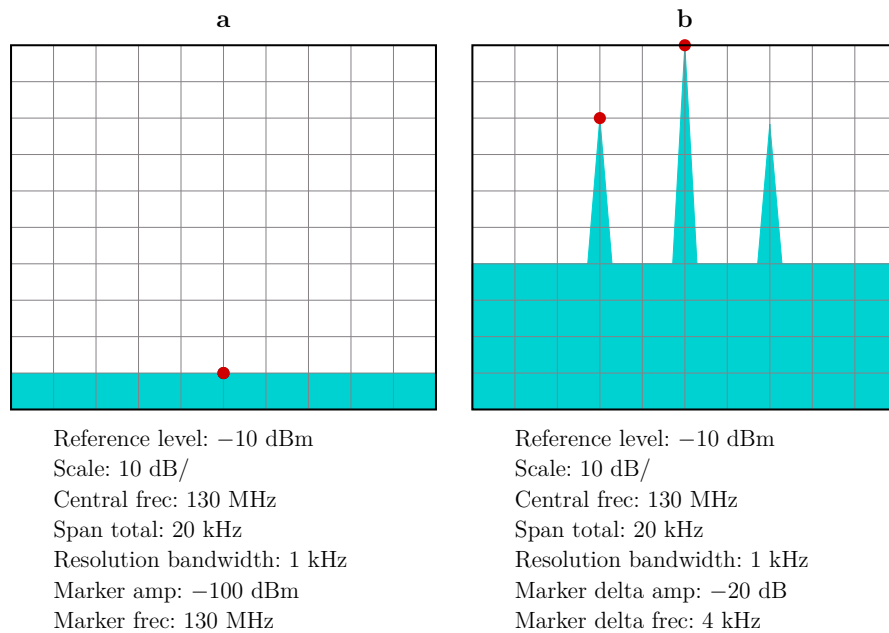


Figura 5.39: Pantallas del analizador. a) Sin nada conectado. b) Con el modulador AM ruidoso.

Problema 5.42 (Septiembre de 2006)

Datos de un sistema de comunicaciones que utiliza AM para el envío de señales de voz:

- Modulador-transmisor:
 - Índice de modulación: 60 % .
 - Potencia de portadora: 100 W.
 - Moduladora $x_n(t)$.
 - $\langle x_n^2(t) \rangle = 0,35$.
 - Ancho de banda de moduladora: 15 kHz.
 - Frecuencia de portadora: 1 MHz.
 - Señal AM transmitida:

$$y_{TX}(t) = A_{TX} [1 + m x_n(t)] \cos(2\pi f_c t)$$

- Atenuación del canal: 100 dB.
- Señal interferente:
 - Se capta en la antena del receptor.
 - Expresión analítica:

$$y_i(t) = A_i [\cos(2\pi f_{i1} t) + \cos(2\pi f_{i2} t)]$$

$$A_i = 20 \mu V$$

$$f_{i1} = 993 \text{ kHz}$$

$$f_{i2} = 1007 \text{ kHz}$$

- Receptor-demodulador: detector de envolvente más cancelador de continua.
- Impedancia de trabajo: 50Ω .
- El ruido es despreciable.

1. Determine la señal que se obtiene a la salida del demodulador.
2. Calcule la relación potencia de señal deseada a potencia de interferencia (en dB) a la salida del demodulador.

Problema 5.43 (Enero de 2007)

Un sistema de comunicación envía información de voz y música en AM. Datos:

- Modulador-transmisor:
 - Índice de modulación: 65 % .
 - Potencia equivalente de pico: 3,6 kW.
 - Señal moduladora, $x_n(t)$: $\langle x_n^2 \rangle = 0,325$.
 - Ancho de banda de la moduladora: 15 kHz.
 - Frecuencia de portadora: 1,35 MHz.
 - Señal modulada a la salida del transmisor:

$$y_T(t) = A[1 + m x_n(t)] \cos(\omega_c t)$$

- Atenuación del canal: 86 dB.
- Señal interferente: en la antena receptora se capta una interferencia, $y_i(t)$.
- Demodulador-receptor: detector de envolvente más cancelador de continua.

Para caracterizar la interferencia se sustituye momentáneamente el receptor por un analizador de espectros, y se apaga el transmisor AM (no hay señal deseada). En la figura 5.40 se puede ver la pantalla medida. Configuración y datos del analizador:

- Nivel de referencia: -79 dBm.
- Escala vertical: 4 dB/div.
- Atenuación de entrada: 0 dB.
- Frecuencia central: 1,348 MHz.
- Span: 20 kHz.
- Ancho de banda de resolución: 100 Hz.
- Figura de ruido: 20 dB.
- Impedancia de entrada (y de trabajo del sistema): 50Ω .

1. Determine la expresión analítica de la señal interferente a la entrada del receptor.

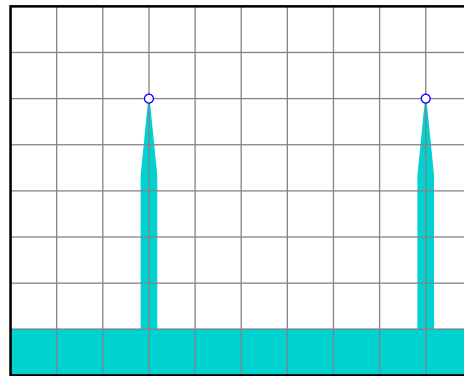


Figura 5.40: Señal interferente medida a la salida de la antena receptora.

2. Determine la expresión analítica de la señal total (AM más interferente) a la entrada del receptor. (Desprecie el ruido.)
3. Determine expresión analítica de la señal obtenida a la salida del demodulador. (Desprecie el ruido.)
4. Calcule la relación de potencia de señal a potencia de interferencia (dB) a la salida del demodulador.
5. A partir del nivel de ruido medido en el analizador calcule la temperatura de ruido de la antena receptora (ruido a la entrada).
6. Calcule la relación de potencia de señal a potencia de ruido a la salida del demodulador. (No considere la interferencia para este apartado.)

Problema 5.44 (Junio de 2007)

En la figura 5.41 se observa el diagrama de bloques de un sistema de comunicaciones. Datos:

- La información moduladora es analógica, con ancho de banda $W = 15$ kHz.
- Se modula en AM.
- Todo el sistema se encuentra adaptado a $R = 50 \Omega$.
- El medio (canal radioeléctrico) atenúa $A_t = 100$ dB.
- La temperatura de ruido de la antena receptora es $T_{in} = 300$ K.
- La figura de ruido del receptor es $F_{rx} = 33,8$ dB.

Para caracterizar el sistema, se envía un tono de prueba (en concreto un *coseno*). Midiendo a la salida del transmisor (punto A), con un analizador de espectros, obtenemos la pantalla de la figura 5.42.

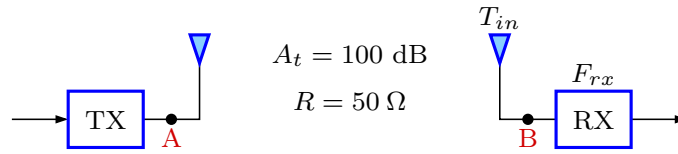


Figura 5.41: Diagrama de bloques del sistema de comunicación.

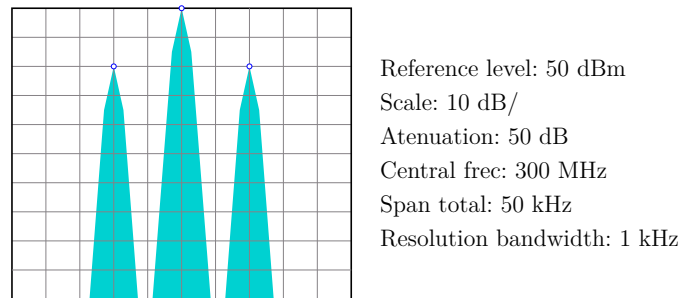


Figura 5.42: Pantalla del analizador en el punto A. El ruido térmico no se visualiza porque está a -90 dBm.

1. Calcule el ancho de banda que necesitará el filtro de predetección del sistema. Escriba la expresión de la señal analítica, $y_B(t)$ (en voltios, para t segundos), a la entrada del receptor (punto B); calcule el valor de todos sus parámetros. Calcule la potencia media recibida, P_B , en W y dBm.
2. Para realizar la caracterización mencionada, quitamos provisionalmente el receptor y medimos con un analizador en el punto B. Considere que el analizador tiene también una figura de ruido $F_{anal} = 33,8$ dB, atenuación 0 dB, span total 50 kHz, ancho de banda de resolución $RBW = 1$ kHz, y escala vertical 10 dB/. (El resto de los parámetros los debe escoger adecuadamente.) Dibuje el resultado de la medida en la cuadrícula de la figura 5.43.

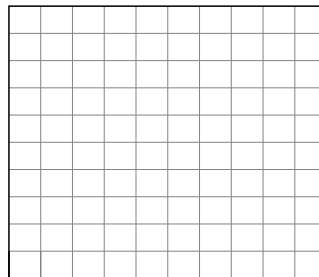


Figura 5.43: Cuadrícula en blanco.

3. Volvemos a conectar el receptor. ¿Cuanto vale la calidad final $(S/N)_s$ en dB?

Problema 5.45 (Septiembre de 2007)

En la figura 5.44 se observa la pantalla de un analizador de espectros. Se aprecia una modulación analógica lineal y un suelo de ruido blanco.

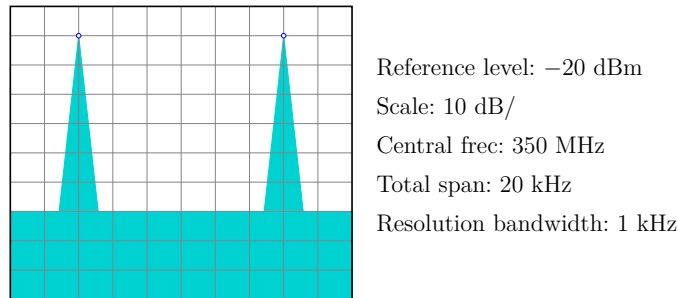


Figura 5.44: Pantalla del analizador de espectros.

1. Identifique, razonadamente, la modulación y el tipo de modulación.
2. Calcule la relación (S/N) (dB) de la medida. Considere que el ancho de banda equivalente de ruido es igual al ancho de banda de la modulación.

Problema 5.46 (Septiembre de 2007)

Sea un sistema con modulación FM. Cuando se transmite una información sinusoidal, se recibe la señal de la figura 5.45 (se ha llevado la salida de la antena receptora a un analizador de espectros).

1. Determine: la frecuencia de portadora, la frecuencia de modulación, la desviación máxima de frecuencia y la potencia equivalente de pico (transmitida). Considere que la atenuación del medio es de 120 dB.
2. Calcule la temperatura de ruido a la entrada (antena receptora). La figura de ruido del analizador de espectros es de 21,8 dB. Considere que el ancho de banda de ruido es igual al ancho de banda de resolución del analizador.
3. Calcule la potencia de ruido equivalente a la entrada del demodulador (en dBm). Datos: en condiciones normales de trabajo el ancho de banda de la señal moduladora es igual que la frecuencia del tono modulador de los apartados anteriores; el ancho de banda de radiofrecuencia es igual al de la señal transmitida; el demodulador presenta una figura de ruido de 6 dB.
4. Calcule la relación señal a ruido a la salida del demodulador. Considere que la señal moduladora normalizada (no sinusoidal) tiene un valor cuadrático medio de 0,4. Incluya una mejora por pre-deénfasis de 9 dB.

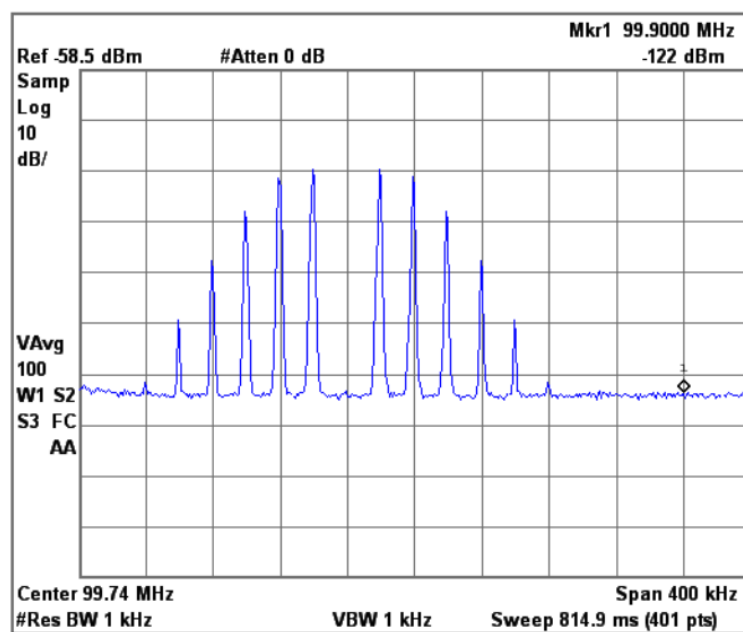


Figura 5.45: Espectro de FM, modulando con un tono.

Problema 5.47 (Febrero de 2008)

En un sistema de radiocomunicación en Onda Media (modulación de amplitud) se transmite como moduladora una señal sinusoidal. En recepción llevamos la señal captada por la antena a un analizador de espectros obteniéndose la imagen de la figura 5.46. (En azul aparece la señal deseada y el ruido; en rojo la señal interferente.) La configuración del analizador es:

- Nivel de referencia: -57 dBm.
- Eje vertical: 3 dB/.
- Atenuación de entrada: 0 dB.
- Ancho de banda de resolución: 100 Hz.
- Frecuencia central: 1 MHz.
- Span: 30 kHz.
- Impedancia de entrada: $50\ \Omega$.

Calcule el índice de modulación utilizado. Calcule la expresión matemática, en el dominio del tiempo, de la señal obtenida a la salida de la antena receptora. No considere el ruido. Suponga las señales sinusoidales en forma coseno con fase inicial nula. Suponga adaptación de impedancias entre la antena y el analizador de espectros.

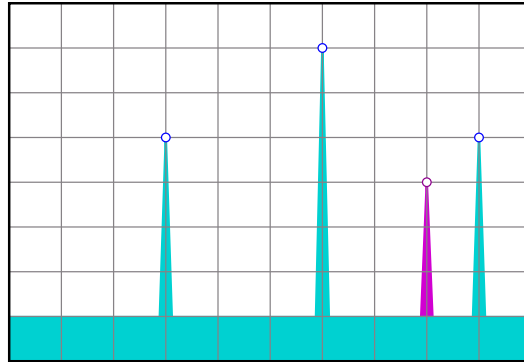


Figura 5.46: Medida en el analizador. (En cian: señal deseada y ruido: en magenta: señal interferente.)

Problema 5.48 (Febrero de 2008)

Sea un receptor de FM (banda comercial) cuyos datos se dan a continuación:

- Banda comercial de FM: 88-108 MHz.
- Desviación máxima de frecuencia: 75 kHz.
- Ancho de banda de audio (señal moduladora): 15 kHz.
- Ancho de banda de RF: ancho de banda de Carson.
- Figura de ruido del receptor: 9 dB.
- Temperatura de ruido a la entrada de un receptor típica (zona residencial): 6000 K.

Calcule la sensibilidad del receptor. (Definimos sensibilidad como una potencia a la entrada del receptor que es 13 dB superior al ruido total equivalente a la entrada del receptor.)

Problema 5.49 (Junio de 2008)

Sea el siguiente sistema de comunicaciones:

- Modulación analógica lineal, con señal moduladora vocal ($W = 10$ kHz).
- Se realiza una prueba modulando con un tono. En la figura 5.47 se observa, en un analizador de espectros, la señal transmitida ($R = 50 \Omega$).
- La atenuación del medio es: $A_t(\text{dB}) = 78 + 40 \log[d(\text{km})]$.
- Distancia recorrida por el medio: $d = 2$ km.
- El diagrama de bloques del receptor se observa en la figura 5.48.
 - Ruido a la entrada (temperatura equivalente de la antena): $T_a = 1000$ K.

- Figura de ruido y ganancia del amplificador (bloque 1): $F_1 = 10$ dB; $G_1 = 20$ dB.
- El ruido y la atenuación del bloque 2 son despreciables.
- Figura de ruido y atenuación del mezclador (bloque 3): $F_3 = 3$ dB; $A_3 = 3$ dB.
- Temperatura física (real) y atenuación del bloque 4: $T_4 = 350$ K; $A_4 = 6$ dB.
- Figura de ruido del demodulador (bloque 5): $F_5 = 13$ dB.
- f_2 y B_2 son la frecuencia central y el ancho de banda del primer filtro (bloque 2).
- f_4 y B_4 son la frecuencia central y el ancho de banda del bloque 4. $f_4 = 20$ MHz.
- f_{OL} es la frecuencia del oscilador local del mezclador.
- Ancho de banda de postdetección $W = 10$ kHz.
- Todo el sistema se encuentra adaptado a $R = 50 \Omega$.

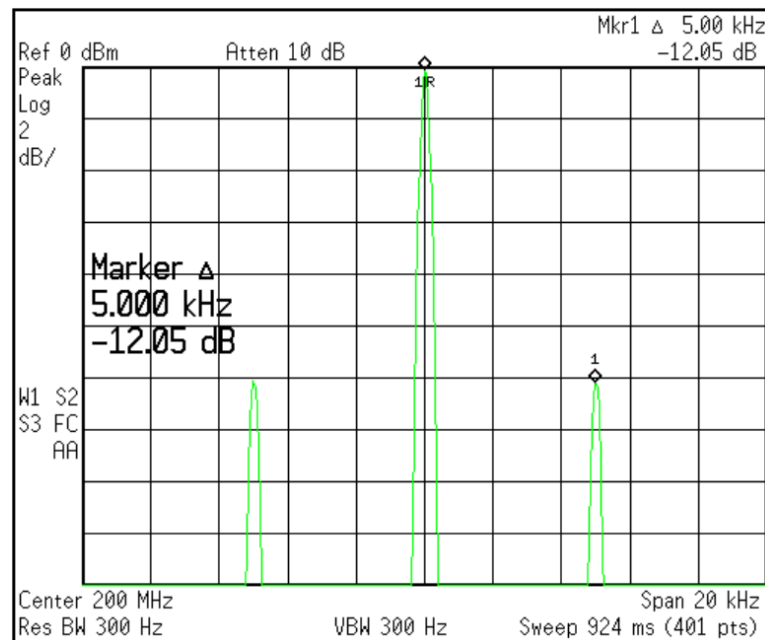


Figura 5.47: Señal TX modulando con un tono.

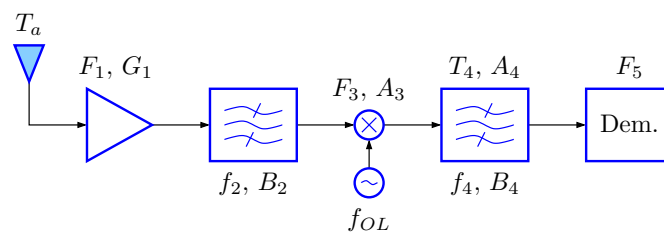


Figura 5.48: Diagrama de bloques del RX.

1. Razone qué tipo de modulación es. Calcule sus parámetros. (Incluya la potencia media total y la PEP, ambas en dBm.)

2. Calcule B_2 , f_2 , B_4 y f_{OL} .
3. Calcule la densidad espectral de ruido unilateral total a la entrada del demodulador.
4. Calcule la calidad final, a la salida del demodulador.

Problema 5.50 (Septiembre de 2008)

Se desea dar cobertura a una zona de hasta 100 km de distancia utilizando modulación FM. Datos:

- Ancho de banda de moduladora: 15 kHz.
 - Frecuencia portadora: 100 MHz.
 - Desviación máxima de frecuencia: 75 kHz.
 - Atenuación del canal, en dB: $60 + 20 \log[f(\text{MHz}) \cdot d(\text{km})]$
 - Valor cuadrático medio de la señal moduladora normalizada: 0,4.
 - Frecuencia de corte de la red de deénfasis: 2,1 kHz.
 - Figura de ruido del receptor: 6 dB.
 - Temperatura de ruido de la antena receptora: 300 K.
 - Impedancia de trabajo en todo el sistema: 50Ω .
1. Calcule las potencias media y equivalente de pico (en vatios y en dBm) de la señal transmitida, sabiendo que se desea una relación señal a ruido mínima en la señal demodulada de 60 dB.
 2. Suponga que en la antena receptora se mide una relación señal a interferencia de 23 dB. Considere que la señal interferente tiene un espectro plano en el ancho de banda de la señal modulada, y está incorrelada con el ruido térmico. ¿Cuántos dB habría que aumentar la potencia media transmitida para mantener la relación de calidad final de 60 dB?

Problema 5.51 (Septiembre de 2008)

Se modula una información sinusoidal en DBL, transmitiéndose la señal modulada con una potencia media de 10 W. Datos:

- Ancho de banda de la moduladora: 20 kHz.
- Frecuencia central: 24 MHz.
- Temperatura de ruido de la entrada del receptor: 900 K.
- Figura de ruido del receptor: 9 dB.

- Impedancia de trabajo: $50\ \Omega$.
- Atenuación del canal, en dB: $80 - 20 \log[f(\text{MHz})]$

Calcule la relación señal a ruido en post-detección, indicando el tipo de demodulación utilizado.

Problema 5.52 (Enero de 2009)

Sea el sistema de comunicaciones, cuyos datos se dan a continuación, donde se utiliza modulación FM para el envío de señales de voz y música.

Datos:

- Modulador-transmisor:
 - Desviación máxima de frecuencia: 75 kHz.
 - Potencia equivalente de pico: 80 W.
 - Valor cuadrático medio de la moduladora normalizada: 0,325.
 - Ancho de banda de la señal moduladora: 15 kHz.
 - Frecuencia de portadora: 103,5 MHz.
- Atenuación del canal: 129 dB.
- Receptor-demodulador:
 - Temperatura de ruido a la entrada: 2000 K.
 - Figura de ruido del receptor: 6 dB.
 - Frecuencia de corte del filtro de deénfasis: 2100 Hz.
- Impedancia de trabajo: $50\ \Omega$.

1. Calcule la relación señal a ruido a la salida del receptor-demodulador. Razone su respuesta.
2. Se conecta la antena receptora a un analizador de espectros con la siguiente configuración:
 - Nivel de referencia: $-60\ \text{dBm}$.
 - Atenuación: 0 dB.
 - Frecuencia central: 105 MHz.
 - Span: 5 MHz.
 - Eje vertical: 10 dB/.
 - Ancho de banda de resolución: 200 kHz.
 - Impedancia de entrada: $50\ \Omega$.
 - Figura de ruido: 8,1 dB.

Dibuje, sobre la plantilla de la figura 5.49, el espectro que se obtiene.

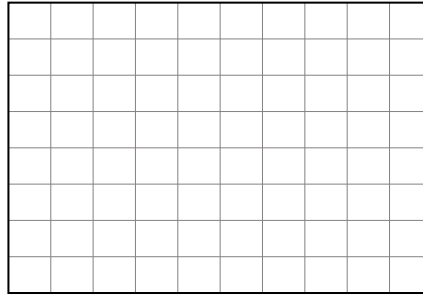


Figura 5.49: Pantalla del analizador en blanco.

Problema 5.53 (Junio de 2009)

Calcule la sensibilidad (en vatios y en dBm) del receptor de FM (banda comercial) cuyos datos se dan a continuación. La sensibilidad es la potencia mínima recibida que asegura un correcto funcionamiento; en concreto, para este problema, tome sensibilidad como la potencia a la entrada del receptor 13 dB superior al ruido total equivalente a la entrada del receptor.

Datos adicionales:

- Banda comercial de FM: 88-108 MHz.
- Desviación máxima de frecuencia: 75 kHz.
- Ancho de banda de audio (moduladora): 15 kHz.
- Ancho de banda a la FI: el ancho de banda de Carson.
- Temperatura de ruido típica a la entrada del receptor en esta banda (zona residencial): 6000 K.
- En la figura 5.50 se detalla el diagrama de bloques del receptor. Los filtros son ideales (sin ruido).

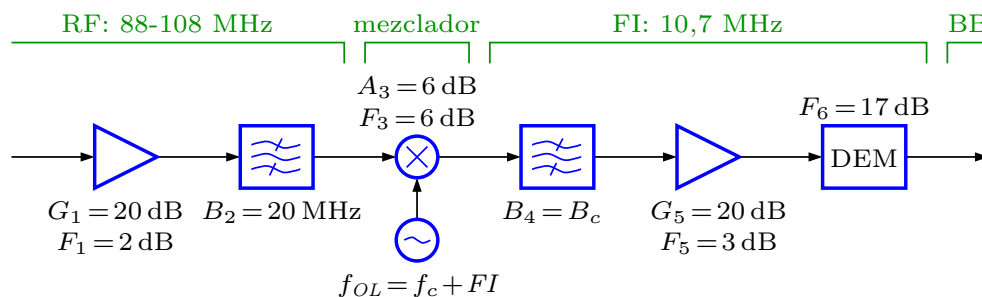


Figura 5.50: Diagrama de bloques del receptor.

Problema 5.54 (Junio de 2009)

Sea un sistema de comunicación analógico. Datos:

- Modulación AM, con índice de modulación: $m = 50\%$.
- Potencia media transmitida: $p_{TX} = 100$ W.
- Frecuencia de portadora: $f_c = 150$ MHz.
- Ancho de banda de moduladora: $W = 2,5$ kHz.
- Valor cuadrático medio de moduladora normalizada: $\langle x_n^2 \rangle = 0,5$.
- Atenuación del medio: $A_t = 100$ dB.
- En la figura 5.51 se presenta el diagrama de bloques del receptor.
- Todo el sistema está adaptado a: $R = 50\ \Omega$.

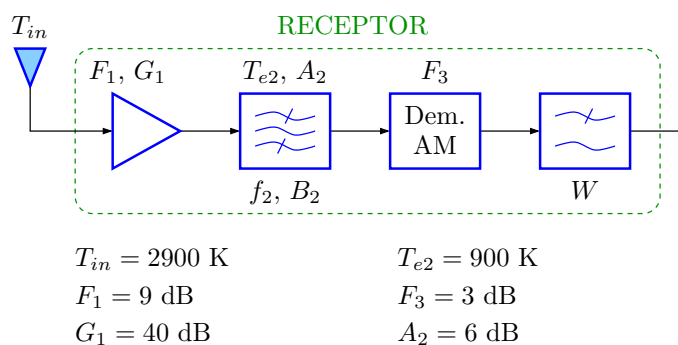


Figura 5.51: Diagrama de bloques del receptor.

1. Proponga valores adecuados para la frecuencia central del filtro de predetección, f_2 , su ancho de banda, B_2 , y el ancho de banda del filtro de postdetección, W .
2. Calcule la temperatura equivalente de ruido interno del receptor (rectángulo con línea discontinua en la figura 5.51), T_e (K). Calcule la densidad espectral de potencia de ruido (total, equivalente) a la entrada del receptor, N_0 (W/Hz). ¿A qué temperatura física está el filtro de predetección?
3. Calcule la calidad final (a la salida del receptor), $(S/N)_o$ (dB).

Con el objeto de realizar medidas, se sustituye el conjunto receptor (rectángulo con línea discontinua en la figura 5.51) por un analizador de espectros. Considere que: a) todos los datos que *no* son del receptor se mantienen sin cambios; b) la temperatura equivalente de ruido interno del analizador es: $T_e = 2 \cdot 10^{-7}$ K; y c) la señal moduladora es un tono de 2,5 kHz.

4. Calcule las potencias recibidas en el analizador: potencia de portadora sola, P_c (dBm), potencia de una banda lateral, P_{1BL} (dBm), y nivel de ruido, N (dBm).

5. Teniendo en cuenta la configuración del analizador (ver figura 5.52), dibuje la señal que se visualizaría en la pantalla.

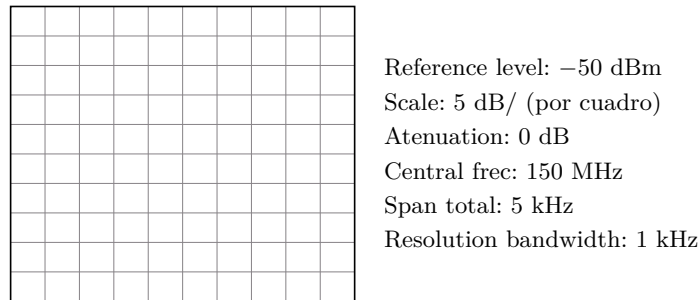


Figura 5.52: Pantalla y configuración del analizador.

Problema 5.55 (Septiembre de 2009)

Se desea transmitir una señal analógica, cuyos datos se dan a continuación, por un canal paso banda. Disponemos de tres tipos diferentes de moduladores/demoduladores analógicos: DBL, AM y FM, cuyas características también se dan a continuación.

Datos de la señal moduladora:

- Valor cuadrático medio de la señal normalizada: 0,6.
- Ancho de banda: 5 MHz.

Datos comunes para las tres modulaciones:

- Atenuación del canal: 106 dB.
- Temperatura de ruido a la entrada del receptor: $T_0 = 300$ K.
- Factor de ruido del receptor: 3 dB.

Datos para la modulación AM:

- Índice de modulación: 80 % .

Datos para la modulación FM:

- Desviación máxima de frecuencia: 8,5 Mz.
- Frecuencia de corte del filtro de deénfasis: 900 kHz.

1. Calcule las potencias medias y las potencias equivalentes de pico que sería necesario transmitir con cada una de las modulaciones si queremos asegurar a la salida de los demoduladores una relación señal a ruido de al menos 50 dB.

2. Indique los anchos de banda de radiofrecuencia necesarios para cada una de las modulaciones.
3. Comente los resultados obtenidos en los dos apartados anteriores; es decir: indique las ventajas e inconvenientes de cada una de las modulaciones estudiadas.

Problema 5.56 (Junio de 2010)

Sea la señal modulada:

$$y(t) = 0,01 \left[1 + 0,8 \cdot \cos(2\pi \cdot 10^4 \cdot t) \right] \cos(2\pi \cdot 1,5 \cdot 10^6 \cdot t)$$

1. Dibuje cómo se vería $y(t)$ en la pantalla de un analizador de espectros con la siguiente configuración:
 - Nivel de referencia: -20 dBm.
 - Eje vertical: 5 dB/div.
 - Atenuación: 0 dB.
 - Frecuencia central: 1,49 MHz.
 - Span: 50 kHz.
 - Ancho de banda de resolución: 1 kHz.
 - Impedancia de entrada: 50 Ω .
 - Atenuación: 0 dB.
 - El ruido es despreciable.
 - (Se adjunta una plantilla, figura 5.53, para facilitar el dibujo.)

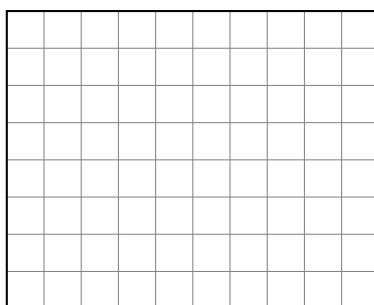


Figura 5.53: Pantalla del analizador.

2. En el analizador, se coloca un *marker* en el pico de potencia más alta y otro en el siguiente pico de potencia a la izquierda. ¿Cuánto valdrán las diferencias de frecuencias (en MHz) y de potencias (en unidades logarítmicas) entre ambos *markers*?
3. La señal modulada $y(t)$ es la señal de testeo (evaluación de calidad con señal determinística) de un sistema de comunicaciones. Se ha obtenido atenuando 86 dB la señal del transmisor, $y_T(t)$, para proteger así al analizador de espectros. Ahora, se utiliza el sistema de comunicaciones inyectando la señal $y_T(t)$ del transmisor en un medio que atenúa 100 dB. Datos adicionales:

- Ancho de banda de la información moduladora: 20 kHz.
- Temperatura de ruido a la entrada del receptor: $3 \cdot 10^4$ K.
- Factor de ruido del receptor: 20 dB.
- Impedancia de trabajo: 50 dB.

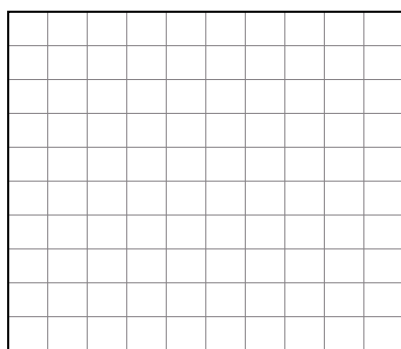
Calcule la relación señal a ruido a la entrada del demodulador.

4. Calcule la relación señal a ruido a la salida del demodulador.
5. Conteste a las siguientes preguntas, referidas a los apartados anteriores:
 - ¿Cuánto vale el índice de modulación de la señal transmitida?
 - ¿Cuánto vale la potencia equivalente de pico (en vatios y en dBm) de la señal transmitida?
 - ¿Cuánto vale la eficiencia en potencia de la señal transmitida?

Problema 5.57 (Julio de 2010)

Sea el siguiente sistema de comunicaciones:

- Modulación: DBL.
 - Frecuencia de portadora: $f_c = 500$ MHz.
 - Señal moduladora sinusoidal con frecuencia: $f_m = 4$ kHz.
 - Potencia media transmitida: $P_{TX} = 53$ dBm.
 - Atenuación del medio (canal radioeléctrico): $A = 100$ dB.
 - Todo el sistema está adaptado a $R = 50 \Omega$.
 - Todo el ruido del sistema equivale a una contribución AWGN unilateral, a la entrada del receptor: $N_0 = 2 \cdot 10^{-15}$ W/Hz.
1. Escriba la expresión analítica de la señal DBL transmitida. Sustituya cada parámetro por su valor correspondiente —tensiones en voltios y frecuencias en hercios.
 2. Calcule el ancho de banda de la modulación, B (kHz).
 3. Calcule *en el transmisor* la potencia de las 2 bandas laterales, P_{2bl} (dBm), la potencia de una banda lateral, P_{1bl} (dBm), y la potencia equivalente de pico, PEP (dBm).
 4. Calcule la calidad a la entrada del demodulador, $(S/N)_e$ (dB). (Calidad equivalente, considerando todo el ruido del sistema.)
 5. Calcule la calidad a la salida del demodulador, $(S/N)_s$ (dB). (Calidad final.)
 6. Para realizar medidas, se sustituye el receptor por un analizador de espectros. En la figura 5.54 se observa su pantalla (a rellenar) con la configuración. Datos de ruido: temperatura de ruido a la entrada del analizador $T_{in} = 300$ K; temperatura de ruido equivalente del analizador $T_e = 14,5 \cdot 10^6$ K. Calcule y dibuje el resultado visualizado en la pantalla.



Nivel de referencia: $RL = -20 \text{ dBm}$
 Eje vertical: $10 \text{ dB/ (por cuadro)}$
 Frecuencia central: $CENTER = 500 \text{ MHz}$
 $SPAN = 20 \text{ kHz (total)}$
 Ancho de banda de resolución: $RBW = 500 \text{ Hz}$
 Atenuación: $ATN = 0 \text{ dB}$

Figura 5.54: Pantalla y configuración del analizador.

7. Estudie qué ocurre cuando el receptor coherente comete un error pequeño en la frecuencia δf (es decir: en lugar de recuperar f , recupera $f + \delta f$). Suponga que la señal moduladora sigue siendo un tono de frecuencia f_m . Razone qué se demodula.

Problema 5.58 (Diciembre de 2010)

Se dispone de un modulador FM con potencia media transmitida, P_{TX} , y desviación máxima de frecuencia, Δf , fijos.

1. Se modula con una señal sinusoidal, con índice de modulación $\beta = 2,404$. Como ya sabe, $J_0(2,405) = 0$. La figura 5.55 muestra el espectro de la señal modulada, después de haber pasado por un atenuador de 90 dB , para proteger el analizador de espectros. Calcule los siguientes parámetros de la señal transmitida por el modulador: frecuencia de portadora; frecuencia de moduladora; desviación máxima de frecuencia; ancho de banda a -20 dB ; ancho de banda de Carson (compare los dos anchos de banda); potencia media (en vatios y en dBm).
2. Ahora se transmite una moduladora musical. Datos: se incluye un filtro de preénfasis en el modulador, con frecuencia de corte $3,5 \text{ kHz}$; valor cuadrático medio de la señal musical $0,4$; ancho de banda de la moduladora 20 kHz ; atenuación del canal 106 dB ; temperatura de ruido a la entrada del receptor 250 K ; figura de ruido del receptor 7 dB ; impedancia de trabajo 50Ω . (En recepción, la señal demodulada tendrá que pasar por un filtro de deénfasis.) Calcule la relación señal a ruido a la salida del receptor. Razone sus desarrollos.

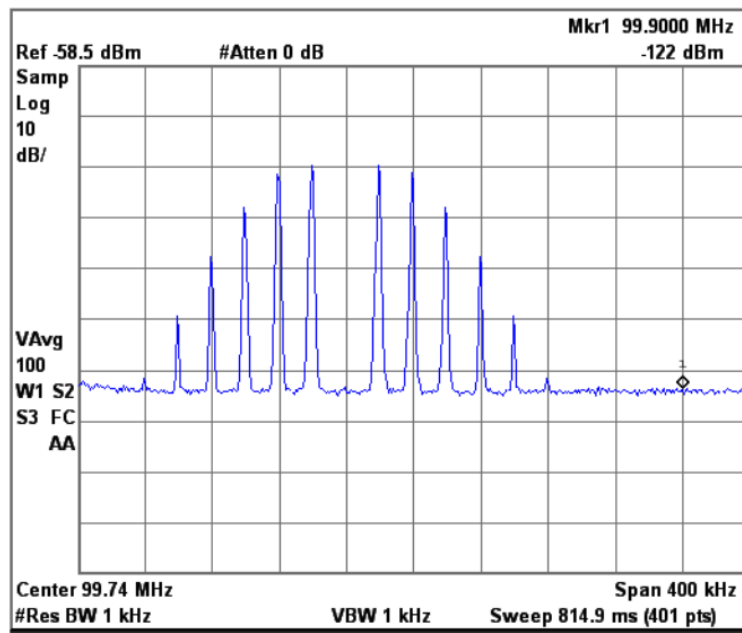


Figura 5.55: Espectro de FM, modulando con un tono.

Problema 5.59 (Diciembre de 2010)

En la figura 5.56 se observa la pantalla de un analizador de espectros que tiene conectado un modulador AM muy ruidoso. (Impedancia de entrada del analizador: $50\ \Omega$.)

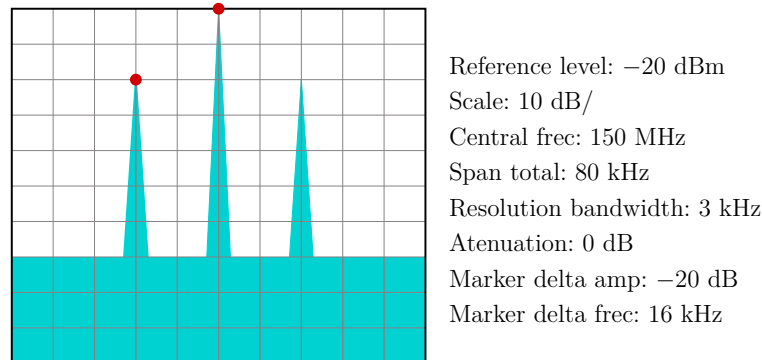


Figura 5.56: Pantalla del analizador.

1. Para la señal AM, calcule la potencia media, P_{AM} (dBm), la potencia equivalente de pico, PEP (dBm), el índice de modulación, m (%), la frecuencia portadora, f_c (MHz), la frecuencia moduladora, f_m (kHz), y el ancho de banda, B (kHz).
2. Calcule la relación señal modulada a ruido, (S/N) (dB).

Problema 5.60 (Mayo de 2011)

En un sistema de radiocomunicaciones analógico, con modulación DBL, la información moduladora es una senoide (frecuencia 15 kHz), y se transmite una potencia equivalente de pico de 10 W. En recepción llevamos la señal DBL a un analizador de espectros. Dibuje lo que se verá en la pantalla del analizador, despreciando el ruido.

Datos del sistema de comunicaciones:

- Frecuencia de portadora: 700 MHz.
- Atenuación del canal: 76 dB.
- Impedancia de trabajo: 50 Ω .

Configuración del analizador de espectros:

- Nivel de referencia: -20 dBm.
- Atenuador: 0 dB.
- Frecuencia central: 700,0075 MHz.
- Span: 75 kHz.
- Ancho de banda de resolución: 1 kHz.
- Eje vertical: 5 dB/div.

Problema 5.61 (Mayo de 2011)

Se dispone de un transmisor que puede trabajar con modulación AM o FM, cuyo esquema es el de la figura 5.57.

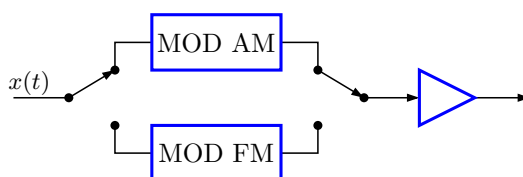


Figura 5.57: Esquema del transmisor.

Datos:

- Ancho de banda en banda base: 8 kHz.
- Índice de modulación en AM: 100 % .
- Desviación máxima de frecuencia en FM: 32 kHz.
- Frecuencia de portadora: 20 MHz.
- Potencia equivalente de pico a la salida del amplificador: 100 W.

1. Considere que la señal moduladora, $x(t)$, es una senoide de frecuencia 4 kHz. Calcule la potencia media transmitida para las dos modulaciones.
2. Ahora, considere que la señal moduladora $x(t)$ es una señal vocal cuya función densidad de probabilidad (de amplitud) es la mostrada en la figura 5.58. Calcule, en %, cuanto variarán, con respecto al apartado anterior, la potencia media y la equivalente de pico para las dos modulaciones.

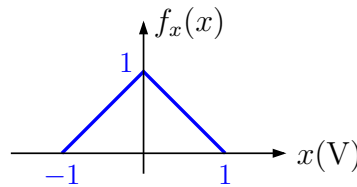


Figura 5.58: Función densidad de probabilidad de la amplitud de la moduladora.

3. Se ajustan los moduladores de AM y FM para conseguir la misma potencia media a la salida del amplificador: 20 W. Por otro lado, se sabe que la atenuación del canal se puede calcular mediante la expresión:

$$A_t(\text{dB}) = 27 + 20 \log [f(\text{MHz})] + 20 \log [d(\text{km})]$$

y la densidad espectral unilateral de ruido equivalente total a la entrada del receptor vale 10^{-13} W/Hz. Calcule, para ambas modulaciones, la relación señal a ruido que tendremos a la salida de un receptor situado a 10 km de distancia, cuando se emplea como señal moduladora la senoide de frecuencia 4 kHz. Justifique los resultados.

Problema 5.62 (Junio de 2011)

Sea el siguiente sistema de comunicaciones:

- Modulación: FM.
- Ancho de banda de la moduladora HI-FI: $W = 20$ kHz.
- Valor cuadrático medio de la moduladora HI-FI normalizada: $\langle x_n^2 \rangle = 0,1$.
- Todo el sistema está adaptado a $R = 50 \Omega$.
- Mejora de preénfasis-deénfasis: $M = 15$ dB.
- Atenuación del medio: $A = 100$ dB.
- Todo el ruido del sistema equivale a una contribución AWGN a la entrada del receptor: $N_0 = 10^{-15}$ W/Hz.
- En un momento determinado, se cambia la señal moduladora HI-FI por un tono de prueba, y se recibe (en voltios para t en segundos):

$$y_R(t) = 10^{-3} \cos[2\pi \cdot 250 \cdot 10^6 \cdot t + 20 \cdot \sin(2\pi \cdot 5 \cdot 10^3 \cdot t)]$$

1. Calcule los parámetros del sistema (frecuencia de portadora; PEP en el transmisor; desviación máxima de frecuencia, Δf ; relación de desviación, D ; y ancho de banda de la modulación).
2. Calcule la calidad final del sistema, en dB. (No olvide verificar si el parámetro z está por encima del umbral.)
3. Mientras se está enviando el tono de prueba, se sustituye el receptor por un analizador de espectros. Teniendo en cuenta los parámetros del analizador, dibuje sobre la plantilla de la figura 5.59 la señal que se vería en la pantalla. Considere que el ancho de banda de resolución es muy pequeño y que, por lo tanto, el nivel de ruido es despreciable. Parámetros del analizador: Span total 25 kHz; frecuencia central 250 MHz; nivel de referencia -50 dBm; 5 dB por cuadro. Para leer los valores de las funciones de Bessel de primera especie consulte las gráficas de los apéndices.

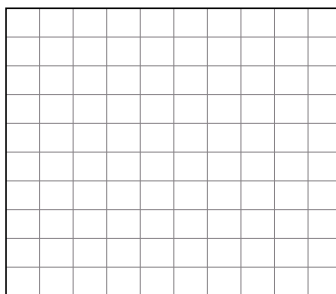


Figura 5.59: Plantilla para pintar la señal en el analizador.

Problema 5.63 (Julio de 2011)

En un laboratorio, se genera una señal BLU superior modulando con un tono. La señal resultante se lleva directamente a un analizador de espectros. Datos: frecuencia de portadora $f_c = 140$ MHz; frecuencia moduladora $f_m = 10$ kHz; potencia equivalente de pico de la señal modulada $PEP = 1$ μ W; relación señal a ruido $S/N = 50$ dB (considerando todas las fuentes de ruido); impedancia de entrada del analizador $R = 50$ Ω (considere que hay adaptación). El analizador tiene los siguientes valores: nivel de referencia $RL = -20$ dBm; 10 dB por cuadro; frecuencia central $CF = 140$ MHz; span total $SPAN = 40$ kHz; ancho de banda de resolución $RBW = 4$ kHz. (Nota: La relación S/N compara la potencia de la señal BLU con el ruido que entra por el ancho de banda de la modulación.)

1. Escriba la expresión analítica de la señal modulada. Indique el valor de todos sus parámetros.
2. Dibuje aproximadamente la pantalla que se verá en el analizador de espectros (en la figura 5.60 se adjunta una pantalla en blanco).

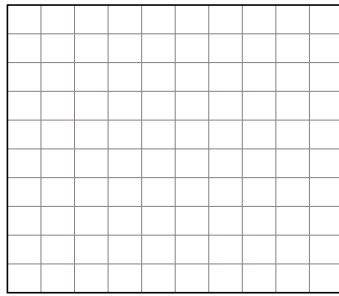


Figura 5.60: Pantalla en blanco del analizador.

Problema 5.64 (Julio de 2011)

Una flota de vehículos se comunica vía radio, intercambiando información vocal. En la figura 5.61 se detalla el diagrama de bloques del transmisor y el receptor.

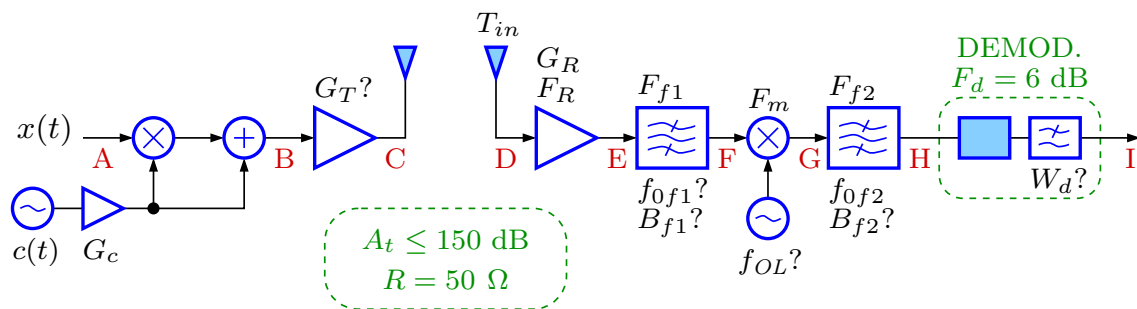


Figura 5.61: Diagrama de bloques del sistema.

Datos:

- La señal $x(t)$ (en voltios), es vocal, tiene un ancho de banda $W = 3$ kHz, un valor de pico $x_p = 0,6$ V, y el valor cuadrático medio de su parte normalizada es $\langle x_n^2(t) \rangle = 0,2$.
- El oscilador $c(t)$ genera un coseno de amplitud 1 V y frecuencia $f_c = 200$ MHz. La senoide del oscilador pasa por un amplificador de $G_c = 20$ dB.
- Considere que el canal radioeléctrico atenúa un máximo de 150 dB.
- Todo el sistema está adaptado a $R = 50 \Omega$.
- Desde el punto de vista del ruido, la antena del receptor se modela como un dipolo con temperatura equivalente de ruido $T_{in} = 1000$ K.
- El amplificador del receptor gana $G_R = 40$ dB, y su figura de ruido vale $F_R = 6$ dB.
- Los filtros (todos) no atenúan en la banda de paso.
- El filtro $f1$ del receptor tiene una figura de ruido $F_{f1} = 3$ dB, su frecuencia central es f_{0f1} , y su ancho de banda B_{f1} .
- La atenuación del mezclador es despreciable. Su figura de ruido vale $F_m = 3$ dB.
- El oscilador local del receptor genera un tono de frecuencia f_{OL} .

- El filtro f_2 del receptor tiene una figura de ruido $F_{f_2} = 3$ dB, su frecuencia central es $f_{0f_2} = 10$ MHz, y su ancho de banda B_{f_2} .
- El bloque demodulador (entre los puntos H e I) tiene un filtro paso bajo con ancho de banda W_d . La figura de ruido del bloque es $F_d = 6$ dB.
- En el punto I se requiere una calidad $(S/N)_s \geq 30$ dB.
- Constante de Boltzmann: $k = 1,3806 \cdot 10^{-23}$ J/K.

Notas:

- La señal vocal $x(t)$ NO está normalizada. Tiene un valor de pico de 0,6 V.
 - La señal del oscilador del transmisor, $c(t)$, pasa por un amplificador antes de afectar a $x(t)$.
1. Calcule la potencia media de la señal $x(t)$ (punto A). (Por supuesto, sobre $R = 50 \Omega$.)
 2. Obtenga la expresión temporal de la señal en el punto B. Si identifica alguna modulación, calcule sus parámetros (ancho de banda, potencia media, potencia equivalente de pico, etc.).
 3. Calcule la temperatura equivalente de ruido del receptor (en el punto D). Elija, razonadamente, valores para la frecuencia central del primer filtro del receptor, f_{0f_1} , y para el oscilador local del receptor, f_{OL} . Calcule los anchos de banda B_{f_1} , B_{f_2} y W_d , de los filtros del receptor.
 4. Calcule la calidad —relación $(S/N)_s$ — en el punto I (en función de G_T). ¿Qué ganancia debe tener el amplificador del transmisor, G_T , para que el sistema funcione adecuadamente?

Problema 5.65 (Julio de 2011)

Se dispone de un transmisor que puede trabajar con modulación AM o FM, cuyo esquema es el de la figura 5.62.

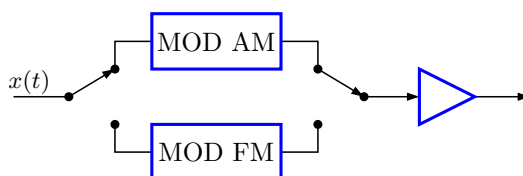


Figura 5.62: Esquema del transmisor.

Datos:

- Ancho de banda en banda base: 5 MHz.

- Índice de modulación en AM: 90 % .
 - Frecuencia de portadora: 500 MHz.
 - Potencia equivalente de pico a la salida del amplificador: 1 kW.
 - Desviación máxima de frecuencia en FM: 8 MHz.
 - Frecuencia de corte de deénfasis para FM: 750 kHz.
 - Impedancia de trabajo: 50 Ω .
1. Considere que la señal moduladora, $x(t)$, es una señal de vídeo cuya función densidad de probabilidad de amplitud es la mostrada en la figura 5.63. Calcule los valores de la potencia media transmitida para las dos modulaciones. Para la modulación AM, indique la potencia de portadora sola y la potencia de una banda lateral.

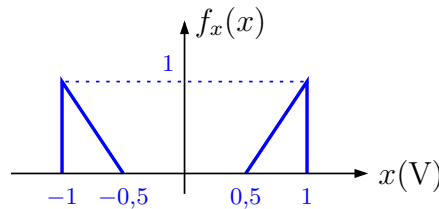


Figura 5.63: Función densidad de probabilidad de la amplitud de la moduladora.

2. Suponga que para las dos modulaciones se transmite una potencia equivalente de pico a la salida del amplificador de 1 kW. La atenuación del canal a la frecuencia de portadora vale:

$$A_t(\text{dB}) = 17 + 20 \log[f_c(\text{MHz})] + 20 \log[d(\text{km})]$$

Y la densidad espectral de potencia de ruido equivalente total a la entrada del receptor vale $5 \cdot 10^{-18}$ W/Hz (espectro unilateral). Calcule, para ambas modulaciones, la relación señal a ruido que tendremos a la salida de un receptor situado a 25 km de distancia, cuando se emplea como señal moduladora una senoide de frecuencia 3 MHz. Justifique los cálculos.

3. Para ambos casos, AM y FM, y con la señal moduladora del apartado anterior, indique la expresión analítica, con sus respectivos valores, de la señal transmitida (a la salida del amplificador).

Problema 5.66 (Enero de 2012)

Se pretende evaluar dos posibles sistemas de comunicaciones analógicos con el objetivo de transmitir una misma señal, $x_n(t)$, de ancho de banda 15 kHz y valor cuadrático medio $\langle x_n^2 \rangle = 0,25$. Se empleará una misma frecuencia portadora $f_c = 200$ MHz, y se exige una calidad mínima $(S/N)_s = 50$ dB a la salida del receptor.

El diagrama de bloques de ambos sistemas se recoge en la figura 5.64. En el receptor, la temperatura de ruido captada por la antena es 2300 K; el amplificador tiene 30 dB de ganancia y factor de ruido $F_1 = 10$ dB; el filtro paso banda está centrado en f_{02} , tiene un ancho de banda B_2 y no introduce atenuación ni ruido en la banda de paso. Todo el sistema está adaptado a 50 dB. La atenuación del medio es $A_t = 140$ dB.

Sistemas a comparar:

- DBL.
- FM, con desviación máxima de frecuencia $\Delta f = 105$ kHz y frecuencia de corte del filtro de preénfasis $f_{cc} = 5$ kHz.

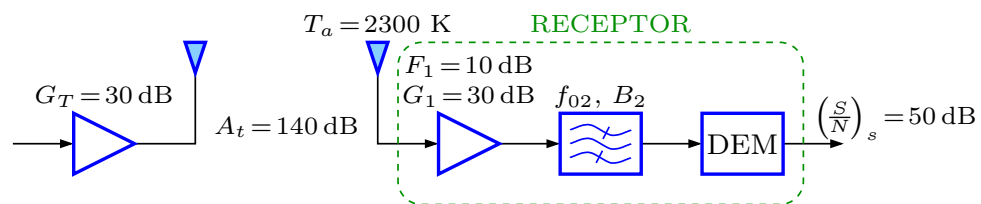


Figura 5.64: Diagrama de bloques de ambos sistemas.

1. Para ambos sistemas, calcule los parámetros del filtro paso banda: f_{02} y B_2 .
2. Determine la densidad espectral de potencia de ruido total equivalente, N_0 , a la entrada del receptor, es decir, antes del amplificador. No olvide indicar las unidades.
3. Para ambos sistemas, calcule la potencia mínima que se requiere a la entrada del receptor para garantizar la calidad exigida. Para FM compruebe que el sistema trabaja por encima del umbral.
4. Determine la potencia mínima que debe transmitirse en cada caso. Indique también la potencia equivalente de pico, PEP .
5. A la vista de los resultados, comente las ventajas e inconvenientes de cada sistema para realizar la transmisión de esa señal.
6. Para el sistema DBL, escriba la expresión temporal de la señal modulada antes del amplificador del transmisor, dejándola en función de $x_n(t)$. Es necesario que sustituya todas las variables por sus valores numéricos correspondientes.

Problema 5.67 (Junio de 2012)

Un sistema de comunicaciones analógico utiliza una modulación FM. La frecuencia de portadora es 1 GHz y la desviación de frecuencia es 10 MHz. El transmisor entrega una potencia de 10 dBW.

La señal moduladora consiste en un múltiplex por división de frecuencia (MDF) formado a partir de 2000 canales vocales. Los canales vocales se pueden considerar señales aleatorias con valor medio nulo y varianza de 100 μ W. Todos los canales tienen un ancho de banda de 4 kHz y un espectro plano en dicho ancho de banda. El múltiplex así formado está normalizado en amplitud.

El canal de comunicaciones introduce una atenuación de 90 dB.

1. Cada canal vocal se modula en BLUs, obtenida a partir de una Doble Banda Lateral filtrada con filtros ideales. El MDF consiste en la suma de todas las señales. En la figura 5.65 se presenta de forma esquemática el resultado final del MDF.

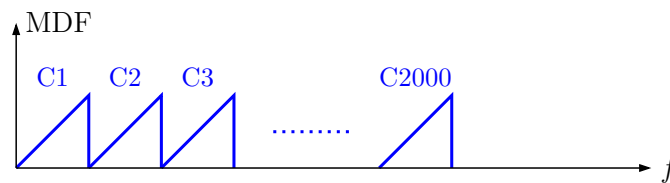


Figura 5.65: MDF de 2000 canales vocales.

Determine el ancho de banda del MDF. Calcule las frecuencias de portadora utilizadas dejándolas en función del número de canal.

2. Determine el ancho de banda de la señal modulada en FM por el MDF.
3. El diagrama de bloques del receptor es el mostrado en la figura 5.66. Determine las frecuencias centrales y los anchos de banda de los filtros, así como la frecuencia del oscilador local, sabiendo que la frecuencia intermedia es de 140 MHz.

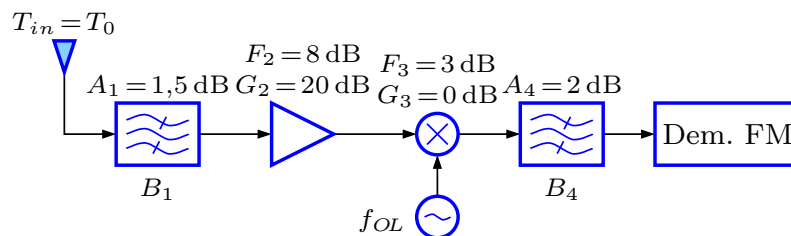


Figura 5.66: Diagrama de bloques del receptor.

4. Calcule la potencia de la señal a la entrada del demodulador.
5. Calcule la relación señal a ruido antes y después del demodulador. El parámetro de calidad umbral es $z_u = 90$ veces de potencia.

6. La relación señal a ruido para cada uno de los canales del MDF, después de demodular la FM, ¿es igual para todos los canales?, ¿por qué?
7. ¿Cuál debería ser la frecuencia de corte de los filtros de preénfasis y deénfasis si se necesita que la relación señal a ruido sea 10 dB superior a la obtenida en el apartado 5?

Problema 5.68 (Junio de 2012)

Para realizar una emisión estereofónica se ha de formar lo que se conoce como *múltiplex estéreo*. Dicho múltiplex se puede generar con el sistema mostrado en la figura 5.67 (utilizado en FM comercial).

Determine el espectro (unilateral) a la salida (punto F), así como la potencia media.

Datos: Suponga que las señales de los canales derecho e izquierdo, x_D y x_I , son independientes, están normalizadas, tienen un ancho de banda de 15 kHz y un valor cuadrático medio $0,35 \text{ V}^2$. La señal sinusoidal proporcionada por el oscilador de 19 kHz tiene una amplitud de 100 mV en el punto E. Las ganancias de los amplificadores son en veces de tensión, no en veces de potencia. El doblador de frecuencia ($\times 2$) es ideal, con ganancia unidad. La impedancia de trabajo en el punto F es de 600Ω .

NOTA. Recomendaciones: trabaje en los puntos A, B, C, D y E con señales de tensión; calcule la señal total en F, calcule después la potencia media y, por último, dibuje el espectro (con las frecuencias de interés).

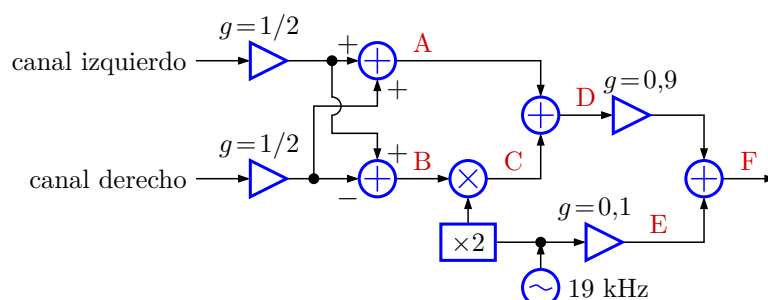


Figura 5.67: Formación del múltiplex estéreo en transmisión.

Problema 5.69 (Junio de 2012)

La figura 5.68 muestra el diagrama de bloques de un sistema de transmisión en FM comercial (banda de 88 a 108 MHz). Mientras se realizan las pruebas iniciales, la señal moduladora es sustituida por un tono de frecuencia 10 kHz y amplitud 1 V. El amplificador utilizado en transmisión se ha caracterizado según el siguiente polinomio: $v_s(t) = 10 v_e(t)$. El modulador de FM trabaja con una desviación de frecuencia de 75 kHz/V y entrega a la salida una señal de 2 V de pico de amplitud. El ancho de banda de la señal moduladora es de 15 kHz. En el receptor todos los elementos que lo integran se encuentran a una temperatura física de $T_0 = 300$ K. La impedancia para todo el sistema es de 50Ω .

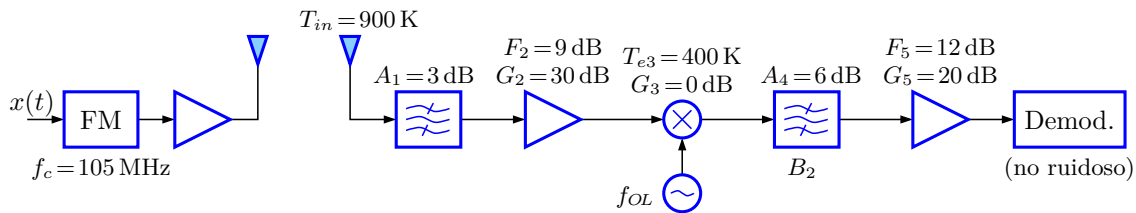


Figura 5.68: Diagrama de bloques del sistema FM.

1. Determine la temperatura equivalente total de ruido a la entrada del receptor.
2. Sabiendo que la frecuencia intermedia es de 10,7 MHz, determine la frecuencia central y el ancho de banda de los dos filtros. Calcule el margen necesario de trabajo del oscilador local para recibir las señales del transmisor.
3. Si el canal introduce una atenuación de 126 dB, determine las relaciones señal a ruido a la entrada y a la salida del demodulador. Justifique los resultados. (Suponga que la señal moduladora es la señal de prueba.)

Dato: frecuencia de corte del filtro de deénfasis 2,1 kHz.

Problema 5.70 (Julio de 2012)

Se pretende evaluar dos posibles modulaciones analógicas con el objetivo de transmitir una misma señal, $x_n(t)$, de ancho de banda 25 kHz y valor cuadrático medio $\langle x_n^2 \rangle = 0,3$. Se empleará una misma frecuencia de portadora $f_c = 500$ MHz, y se exige una calidad mínima $(S/N)_s = 60$ dB a la salida del demodulador.

El diagrama de bloques de ambos sistemas se recoge en la figura 5.69. La temperatura de ruido captada por la antena es 490 K. El amplificador tiene $G_1 = 20$ dB de ganancia y factor de ruido $F_1 = 1,5$ dB. La atenuación específica del cable es $\alpha_2 = 0,6$ dB/m, y su longitud $L_2 = 25$ m. El filtro paso banda está centrado en f_{c3} , tiene un ancho de banda B_3 e introduce una atenuación de 3 dB en la banda de paso. Todo el sistema está a temperatura física $T_0 = 300$ K, y adaptado a 50Ω .

Las modulaciones son:

- DBL.
- AM con índice de modulación 80 % .

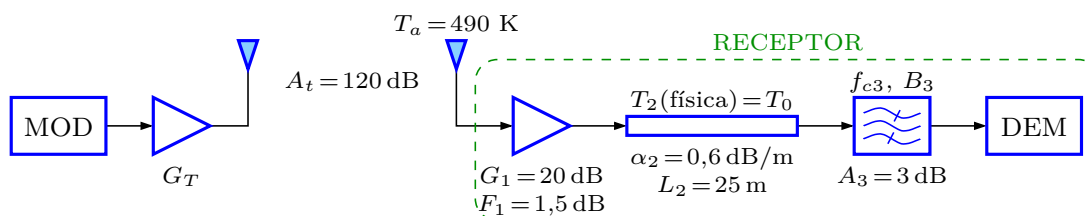


Figura 5.69: Diagrama de bloques de ambos sistemas.

1. Determine la temperatura equivalente de ruido interno del receptor. Determine la temperatura total equivalente de ruido a la entrada del receptor.
2. Indique valores adecuados para f_{c3} y B_3 .
3. Para ambas modulaciones, calcule la potencia mínima de señal a la entrada del receptor (antes del amplificador G_1) para que el sistema funcione correctamente.
4. Sabiendo que el modulador entrega una potencia media de 5 W, determine para ambas modulaciones la ganancia mínima del amplificador del transmisor (G_T) para que el sistema funcione correctamente.
5. Determine para ambas modulaciones la potencia equivalente de pico (PEP) a la salida del amplificador G_T .
6. Para probar el sistema con modulación AM se utiliza como señal moduladora un tono normalizado de frecuencia 20 kHz, y se sustituye el receptor por un analizador de espectros (es decir, se conecta la salida de la antena receptora al analizador de espectros). Respecto al caso anterior se mantiene el valor medio de la envolvente A . Pinte en la cuadrícula de la figura 5.70 el espectro que se visualizaría en el analizador, sabiendo que su configuración es:
 - Impedancia de entrada: $R = 50 \Omega$.
 - Rango de frecuencias: de 499950 a 500050 kHz (centrado en 500 MHz).
 - Factor de escala vertical: 10 dB/división.
 - Nivel de referencia: -30 dBm.
 - Ancho de banda de resolución: 1 kHz.
 - NOTA: considere despreciable el ruido.

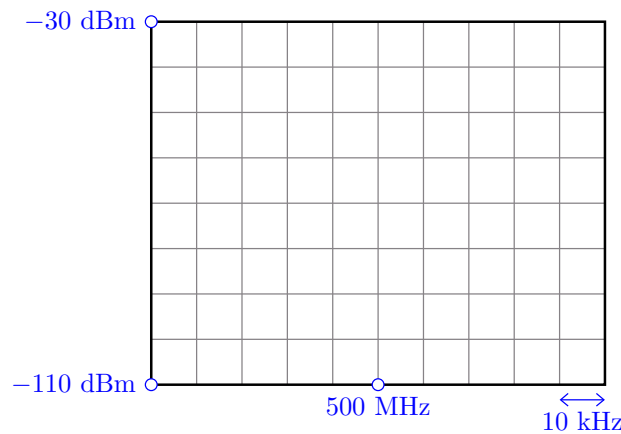


Figura 5.70: Cuadrícula del analizador de espectros.

Problema 5.71 (Julio de 2012)

Para comprobar el funcionamiento de un modulador FM se utiliza un tono como señal moduladora y la señal resultante se envía a un analizador de espectros, obteniéndose la figura 5.71. El modulador tiene una desviación máxima de frecuencia $\Delta f = 20$ kHz. Tome $R = 1 \Omega$.

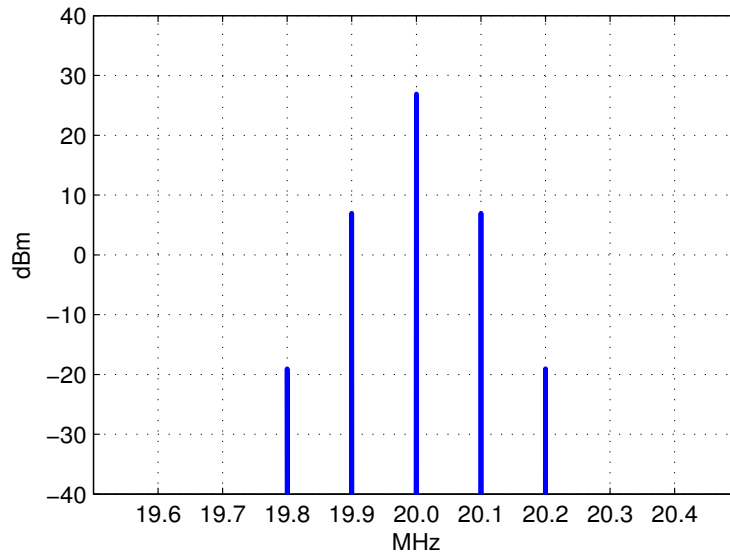


Figura 5.71: Pantalla del analizador de espectros.

NOTA 1: los valores exactos de los picos son:

- A 20 MHz: 26,9 dBm.
- A 19,9 y 20,1 MHz: 7,0 dBm.
- A 19,8 y 20,2 MHz: -19,0 dBm.

NOTA 2: en los apéndices puede consultar los cuadros (tablas) de las funciones de Bessel de primera especie.

1. Determine la potencia total transmitida. Utilice al menos 5 decimales en los cálculos.
2. Exprese la ecuación en el tiempo de la señal modulada.
3. Calcule la potencia del pico centrado en la frecuencia de 20,3 MHz (no se ve en la pantalla porque queda por debajo de -40 dBm).

Problema 5.72 (Enero de 2013)

Se dispone de un transmisor FM, pero se desconoce su desviación de frecuencia, Δf . Para caracterizar el transmisor se inyecta una señal senoidal de 20 kHz como moduladora y se obtiene en un analizador la pantalla de la figura 5.72.

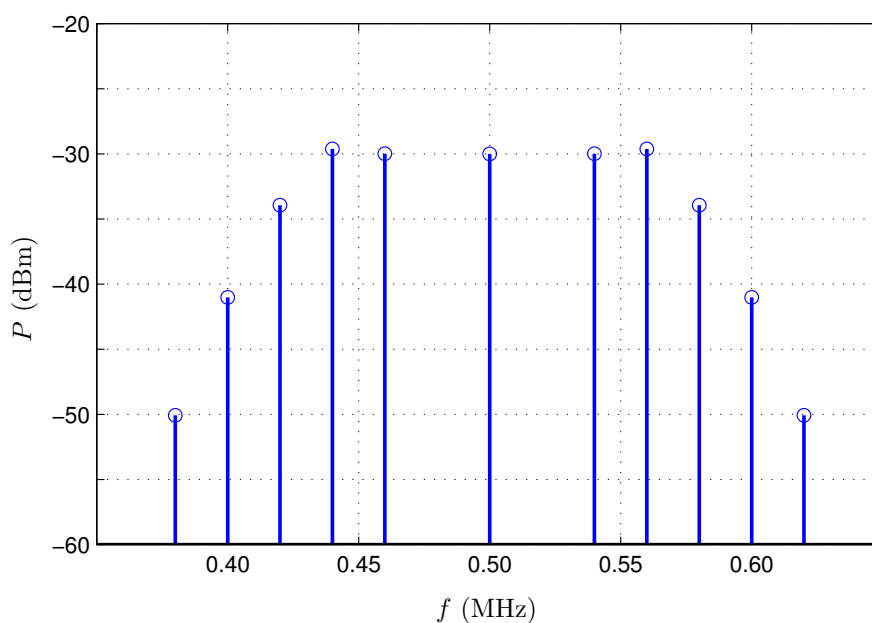


Figura 5.72: Pantalla del analizador de espectros.

1. ¿Cuál es la desviación de frecuencia, Δf , del transmisor?
2. ¿Cuál es el ancho de banda ocupado por el transmisor para una señal de $W = 40$ kHz?
3. ¿Cuál es la potencia total transmitida de FM en dBm?

(Nota: puede consultar los cuadros —tablas— o las gráficas de las funciones de Bessel de primera especie en los apéndices.)

Problema 5.73 (Enero de 2013)

Una fuente de información genera una señal analógica $x(t)$, de 0 dBm de potencia media y 8 kHz de ancho de banda. Esta señal se introduce en un sistema de telecomunicación de banda estrecha, figura 5.73, compuesto por un transmisor, un medio de transmisión y un receptor.

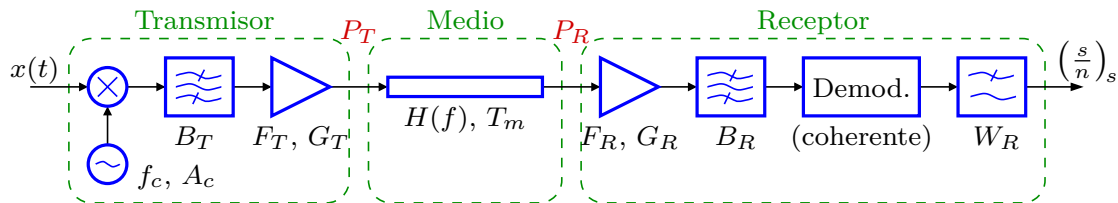


Figura 5.73: Diagrama de bloques del sistema.

En el transmisor, el oscilador genera una señal sinusoidal de 40 MHz y valor de pico igual a 0,1 voltios. El filtro paso banda es ideal, tiene una frecuencia central igual a 40 MHz y un ancho de banda $B_T = 20$ kHz. El amplificador tiene un factor de ruido $F_T = 12$ dB.

Por su parte, el medio de transmisión consiste en un cable coaxial, a temperatura 17 °C, y función de transferencia:

$$H(f) = \frac{10^{-5}}{1 + j \frac{f}{40 \cdot 10^6}}$$

En el receptor, el amplificador de entrada tiene un factor de ruido $F_R = 9$ dB. El filtro paso banda de predetección es ideal y tiene un ancho de banda $B_R = 20$ kHz. El filtro de postdetección también es ideal y tiene un ancho de banda $W_R = 8$ kHz. El demodulador empleado es de tipo coherente.

1. Razone cuál es el tipo de modulación utilizado por este sistema de telecomunicación.
2. Calcule el error máximo, Δf , que puede tener el oscilador del transmisor para que el sistema siga funcionando correctamente.
3. Calcule la ganancia del amplificador de salida del transmisor, G_T , para conseguir una potencia media de señal transmitida, P_T , igual a 30 dBm.
4. Calcule la calidad de la señal a la salida del receptor, $(S/N)_s$. (Nota: recuerde que se trata de un sistema de telecomunicación de banda estrecha.)
5. Obtenga la expresión analítica aproximada de la señal de información (es decir: sin ruido) recibida a la entrada del receptor, $y_R(t)$, teniendo en cuenta la atenuación del medio.

Problema 5.74 (Abril de 2013)

Se desea enviar una señal de audio (15 kHz de ancho de banda) por un canal que presenta una atenuación de 122 dB a la frecuencia de trabajo (portadora). La relación S/N mínima necesaria en postdetección es de 36 dB. Se cuenta con dos canales, con anchos de banda 30 y 180 kHz, y se transmite DBL, AM (modulando al 90 %) y FM (con la mayor desviación máxima de frecuencia posible). Calcule, siempre en emisión, la potencia media (en vatios y en dBm), y el valor de pico de la portadora.

Datos:

- Valor cuadrático medio de la moduladora normalizada: $\langle x_n^2(t) \rangle = 0,22$.
- Temperatura de ruido a la entrada del receptor: $T_{in} = 300$ K.
- Factor de ruido del receptor: $F = 12$ dB.
- Frecuencia de corte del filtro de deénfasis: $f_{cc} = 2100$ Hz.
- Impedancia de trabajo: $R = 50 \Omega$.

Problema 5.75 (Junio de 2013)

La figura 5.74 presenta el diagrama de bloques de un sistema de comunicaciones sencillo. El receptor es capaz de sintonizar señales comprendidas entre 100 y 120 MHz.

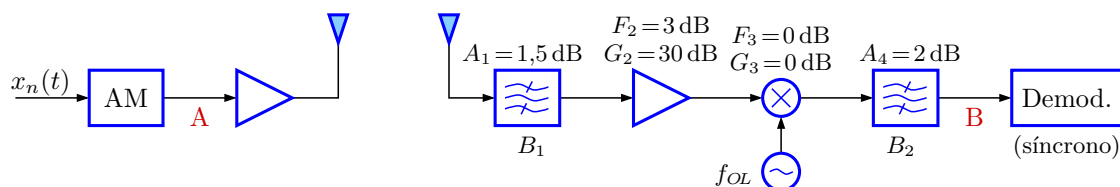


Figura 5.74: Diagrama de bloques del sistema.

La moduladora se puede caracterizar como una variable aleatoria uniformemente distribuida entre 1 y -1 V con un ancho de banda de 5,5 kHz.

En el transmisor, la expresión matemática de la señal a la entrada del amplificador (punto A) es:

$$y(t) = [5 + 3,75 x_n(t)] \cos(2,1 \cdot 10^8 \cdot \pi t + 1,57)$$

La impedancia del amplificador de transmisión es de 50Ω .

1. Determine el índice de modulación así como la amplitud y frecuencia de la portadora. Obtenga el valor cuadrático medio de la señal moduladora y la potencia de la señal modulada (en el punto A).

2. El amplificador de potencia tiene una característica entrada-salida dada por el siguiente polinomio de orden 3: $v_s = 10 v_e + a_3 v_e^3$. Determine el valor del coeficiente a_3 para que el amplificador trabaje en su punto de compresión a 1 dB. (Nota: para los cálculos de distorsión con señales no sinusoidales se sustituye la señal por una senoide de igual potencia que la señal.)
3. Determine la frecuencia central y los anchos de banda de los filtros del receptor así como la frecuencia del oscilador local, sabiendo que el demodulador trabaja a una frecuencia fija de 10,7 MHz.
4. Sabiendo que el canal introduce una atenuación de 120 dB y que la temperatura de ruido a la entrada del receptor es de 300 K, determine las relaciones señal a ruido de pre y postdetección.
5. Si el recuperador de portadora del demodulador comete un error de 1,37 rad en la fase, ¿cuánto valdrían ahora las relaciones señal a ruido de pre y postdetección?
6. Dibuje la pantalla que se vería en un analizador de espectros conectado en el punto B (antes del demodulador). En la figura 5.75 tiene una cuadrícula en blanco, con los ajustes del analizador.

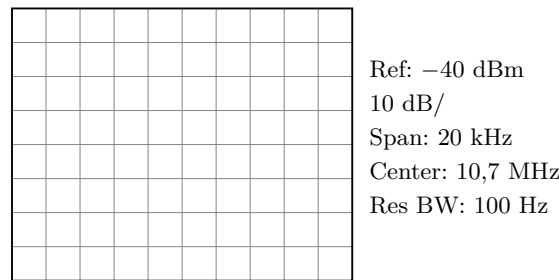


Figura 5.75: Pantalla del analizador de espectros, con los valores de los ajustes.

Problema 5.76 (Julio de 2013)

En la figura 5.76 se observa un sistema de comunicación. Datos:

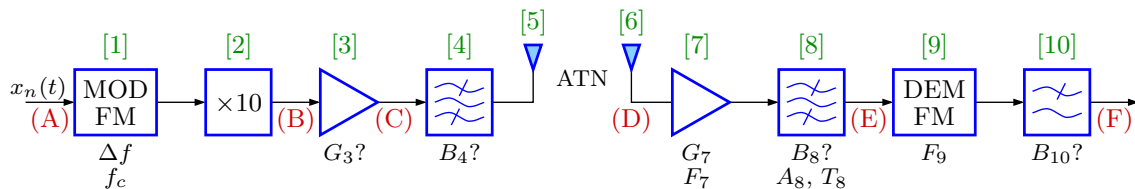


Figura 5.76: Sistema bajo estudio.

- En el punto (A) se recibe una información moduladora, $x_n(t)$, con ancho de banda $W = 20$ kHz, y valor cuadrático medio $\langle x_n^2(t) \rangle = 0,1$ V².

- El bloque [1] es un modulador FM, con desviación máxima de frecuencia $\Delta f = 10$ kHz, y frecuencia portadora $f_c = 10$ MHz.
 - El bloque [2] es un multiplicador de frecuencia $\times 10$. A su salida, punto (B), la señal FM tiene una potencia media $p_B = 0,1$ mW.
 - El bloque [3] es un amplificador, con ganancia G_3 desconocida. A su salida, punto (C), se entrega una potencia equivalente de pico, PEP, desconocida.
 - El bloque [4] es un filtro paso banda, con ancho de banda B_4 desconocido.
 - La atenuación del canal radioeléctrico, entre los bloques [5] y [6], es $ATN = 120$ dB. Desde el punto de vista de ruido, el bloque [6] se modela como un dipolo con temperatura equivalente $T_{IN} = 3 \cdot T_0$.
 - El bloque [7] es un amplificador, con ganancia $G_7 = 40$ dB y figura de ruido $F_7 = 6$ dB.
 - El bloque [8] es un filtro paso banda de predetección, pasivo, con ancho de banda B_8 desconocido, atenuación $A_8 = 3$ dB, y temperatura física de termómetro $T_8 = T_0$.
 - El bloque [9] es un demodulador de FM, con figura de ruido $F_9 = 4$ dB.
 - El bloque [10] es un filtro paso bajo de postdetección, con ancho de banda B_{10} desconocido.
 - Se utiliza pre-deénfasis, con frecuencia de corte $f_{cc} = 2$ kHz.
 - Se requiere una calidad final total de, al menos, 50 dB.
 - Todo el sistema se encuentra adaptado a 50Ω .
1. Escriba la expresión de la señal analítica FM en el punto (B), $y_B(t)$. Calcule el valor de todos los parámetros.
 2. Calcule los anchos de banda (mínimos necesarios) de los filtros B_4 , B_8 y B_{10} . Para la señal FM transmitida, por ejemplo en el punto (C), calcule la relación de desviación.
 3. Calcule la densidad espectral de ruido unilateral, total, equivalente, N_0 (W/Hz), a la entrada del receptor, punto (D).
 4. Calcule la mejora por preénfasis-deénfasis, M (dB). Calcule la z umbral (en unidades naturales y logarítmicas).
 5. Calcule el valor de z que requiere el sistema para funcionar adecuadamente. Calcule la PEP —punto (C)—, en unidades naturales y logarítmicas.
 6. Calcule la ganancia del amplificador del transmisor, G_3 (dB).

Problema 5.77 (Julio de 2013)

Se recibe una señal BLUs mediante un receptor superheterodino como el de la figura 5.77.

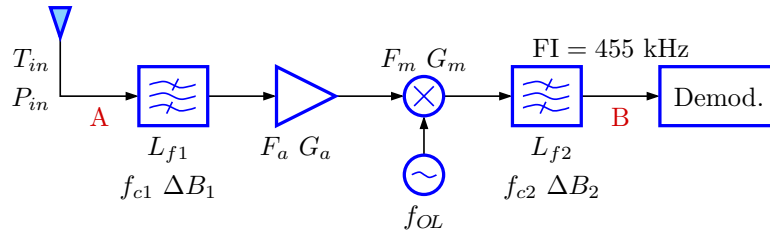


Figura 5.77: Receptor superheterodino de BLUs.

Los datos correspondientes al receptor superheterodino son:

- Potencia media a la entrada del filtro de RF $P_{in} = -90$ dBm.
- Temperatura de entrada de ruido $T_{in} = 10000$ K.
- Pérdidas del filtro de RF $L_{f1} = 13$ dB, a una temperatura física de 300 K.
- Figura de ruido del amplificador de RF $F_a = 10$ dB.
- Ganancia del amplificador de RF $G_a = 43$ dB.
- Banda de RF del receptor superheterodino entre 512 kHz y 1610 kHz.
- Ganancia del mezclador $G_m = 0$ dB.
- Figura de ruido del mezclador $F_m = 15$ dB.
- Pérdidas del filtro de FI $L_{f2} = 20$ dB, a una temperatura física de 300 K.
- Separación entre emisoras de 9 kHz.

La señal BLUs es:

$$y_{BLUs} = A \left[\cos(2\pi \cdot 1000 \cdot 10^3 \cdot t) \cos(2\pi \cdot 3 \cdot 10^3 \cdot t) - \sin(2\pi \cdot 1000 \cdot 10^3 \cdot t) \sin(2\pi \cdot 3 \cdot 10^3 \cdot t) \right]$$

Mediante un analizador de espectros se observa el espectro de la señal recibida en los puntos A y B. La configuración empleada en el analizador de espectros es la siguiente:

- Span de frecuencia: 15 kHz.
- Escala vertical: 10 dB/.
- RBW (ancho de banda de resolución horizontal): 1 kHz.
- Nivel de referencia (RL): -70 dBm.
- La frecuencia central (f_0) hay que adaptarla a la medida.

Represente lo que se vería en la pantalla del analizador de espectros en los puntos A y B sobre las cuadrículas de la figura 5.78, y anote los valores del nivel de referencia y

de la frecuencia central en cada caso. Escriba los cálculos necesarios para justificar los resultados gráficos.



Figura 5.78: Pantallas del analizador en los puntos A (izquierda) y B (derecha).

Tema 6

CONVERSIÓN A/D, MIC

Problema 6.1

Un codificador MIC de 4 bits, con tensión de sobrecarga de 3 voltios, recibe muestras de la señal:

$$x(t) = 2 \cos(2\pi 1000 t) + \cos(2\pi 2500 t)$$

El régimen de muestreo es 1,5 veces la frecuencia de Nyquist, y la primera muestra se toma en el instante $t = 0$.

1. Escriba las palabras código pertenecientes a las muestras segunda y quinta.
2. Calcule el error de cuantificación cometido para cada una de las muestras del apartado anterior.
3. Calcule la relación de potencia media de señal a ruido de cuantificación.
4. Indique el régimen binario a la salida del codificador.

Ahora, en lugar de la señal $x(t)$, el codificador recibe una señal aleatoria, con amplitud uniformemente distribuida entre -1 y 1 voltios.

5. Calcule la nueva relación señal a ruido de cuantificación. ¿Cómo podría mejorarse este valor?

Se construye un MDT con ocho sistemas MIC como el descrito. La multiplexación se realiza sobre las palabras de salida de cada MIC (no sobre cada bit).

6. Calcule el tiempo de canal (o *ranura* o *slot*), el tiempo de trama (*frame*), y la velocidad binaria a la salida del MIC-MDT.

Problema 6.2 (Septiembre de 1996)

Un pequeño depósito de agua posee un sensor de capacidad que traduce su contenido, en litros, a señal eléctrica. La sensibilidad del sensor es de 1 V/litro, y está calibrado para entregar 0 voltios cuando el nivel de agua del depósito se encuentra a una determinada altura que denominaremos *óptima*. Cuando el nivel de agua sube por encima de este límite, el sensor entrega una tensión positiva, en tanto que si el nivel baja de la altura óptima, el sensor entrega una tensión negativa.

Un proyecto de desarrollo encargado al departamento IAC¹, debe digitalizar la señal entregada por el sensor empleando un muestreador ideal a 10 Hz, seguido de un cuantificador uniforme.

1. Diseñe el cuantificador uniforme (número de bits y rango dinámico) para conseguir una calidad de cuantificación de 60 dB y un error de cuantificación máximo de 50 mV. Considere que las amplitudes de las muestras de entrada al cuantificador tienen una distribución uniforme en todo el rango dinámico del cuantificador.
2. Antes de colocar el prototipo resultante en el depósito, se realizó una prueba con él en un laboratorio. En ella se empleó una señal de test consistente en una senoide de valor de pico igual al rango dinámico del cuantificador. El resultado del test dio una calidad de cuantificación superior a los 60 dB de las especificaciones. Explique el motivo y calcule cuántos decibelios de más deben obtenerse en teoría.
3. Una vez colocado el prototipo en el depósito, se observa que las variaciones del nivel de agua no superan los ± 25 litros respecto a la altura óptima. Valore numéricamente qué consecuencias tendrá este hecho en la calidad y en el error máximo de cuantificación.

Independientemente de lo calculado en los apartados anteriores, a partir de ahora considere que el cuantificador es uniforme con corte central (o *mid-riser*), que el número de bits es igual a 8, su rango dinámico es de ± 50 V, y que el bit de signo positivo es igual a “1”.

4. Encuentre las palabras digitales y el error de cuantificación que se obtendrán cuando el depósito tenga 40 litros por encima del nivel óptimo, y cuando tenga 30 litros por debajo del óptimo.
5. Se desea mantener la fidelidad de los datos en el proceso de digitalización del nivel de agua del depósito. Calcule el caudal (litros/segundo) máximo de llenado o vaciado que se puede permitir.

¹Departamento de Ingeniería Audiovisual y Comunicaciones, de la Universidad Politécnica de Madrid.

Problema 6.3 (Junio de 2002)

Sea un sistema de transmisión MIC como el de la figura 6.1, donde la señal de entrada toma un valor de pico de 1 V, tiene un valor medio 0 y el muestreo es ideal.

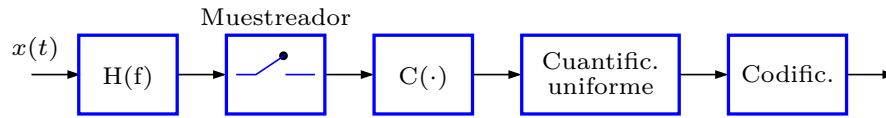


Figura 6.1: Transmisor del sistema MIC.

El espectro de la señal de entrada y la función de transferencia del filtro se observan en la figura 6.2.

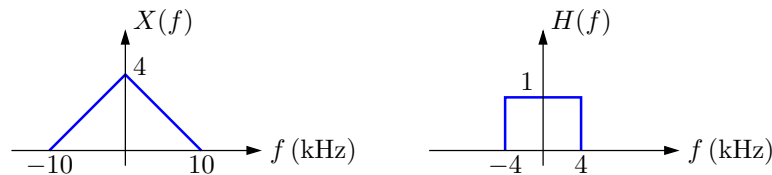


Figura 6.2: Espectro, $X(f)$, de la señal de entrada y transferencia, $H(f)$, del filtro.

La función de compresión sigue la Ley A ($A = 87,6$). Se recuerda que las ecuaciones de la Ley A son:

$$C(x) = \begin{cases} \frac{A|x|}{1+\ln A} \operatorname{sign}(x) ; & 0 \leq \frac{|x|}{x_{sc}} \leq \frac{1}{A} \\ x_{sc} \frac{1+\ln\left(A \frac{|x|}{x_{sc}}\right)}{1+\ln A} \operatorname{sign}(x) ; & \frac{1}{A} \leq \frac{|x|}{x_{sc}} \leq 1 \end{cases}$$

En la figura 6.3 se observa la característica de compresión con Ley A.

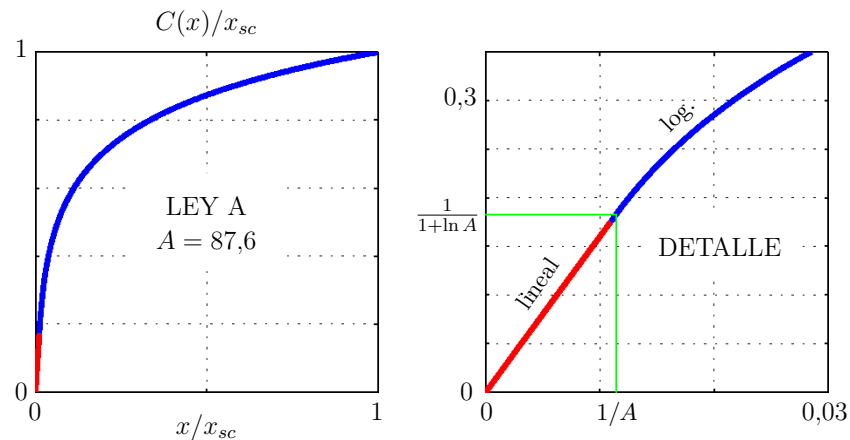


Figura 6.3: Compresión con Ley A.

1. Calcule la frecuencia mínima de muestreo para evitar solapamientos.
2. Suponiendo el muestreo ideal, dibuje el espectro a la salida del muestreador, indicando los valores más significativos.
3. Calcule cuántos bits más son necesarios para tener igual calidad en el caso de utilizar un cuantificador uniforme.
4. Suponiendo un cuantificador de 8 bits, donde el primer bit es el de signo ("1" muestras positivas), obtenga la palabra código para las muestras 3ª y 6ª, cuyos valores a la salida del muestreador son 0,1 y $-0,6$ voltios, respectivamente.
5. Calcule el error cometido en ambos casos a la salida del cuantificador uniforme.

A partir de ahora, considere que el cuantificador es uniforme.

6. ¿Cuánto vale la potencia de ruido con el mismo número de bits (ocho)?
7. Si aumentamos en un bit la cuantificación (es decir, pasamos a 9 bits), ¿cuánto disminuye la potencia de ruido?

Problema 6.4 (Septiembre de 2002)

Disponemos del sistema MIC de la figura 6.4, donde:

- La señal de entrada al sistema es una señal normalizada (valor de pico 1 voltio).
- El compresor sigue la Ley A, con $A = 87,6$.
- El cuantificador uniforme es de tipo *midrise* (con corte central), de 8 bits y con nivel de sobrecarga 1 voltio.

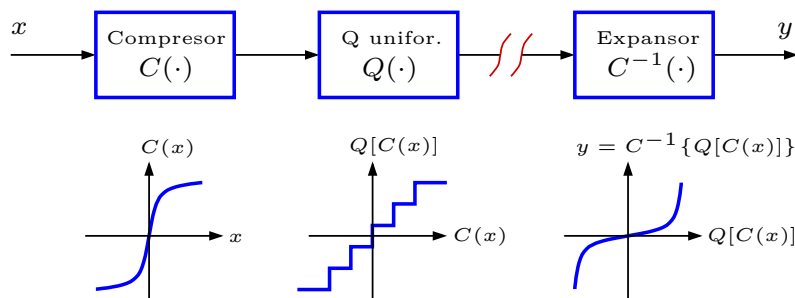


Figura 6.4: Sistema MIC.

$$C(x) = \begin{cases} \frac{A|x|}{1+\ln A} \operatorname{sign}(x) ; & 0 \leq \frac{|x|}{x_{sc}} \leq \frac{1}{A} \\ x_{sc} \frac{1+\ln\left(A \frac{|x|}{x_{sc}}\right)}{1+\ln A} \operatorname{sign}(x) ; & \frac{1}{A} \leq \frac{|x|}{x_{sc}} \leq 1 \end{cases}$$

1. Determine los valores que tendremos a la salida del compresor, si a la entrada tenemos 0,0025 y $-0,75$ voltios.
2. Para las mismas entradas que en el apartado anterior, ¿qué valores de tensión tendremos a la salida del cuantificador uniforme?, ¿cuáles serán las palabras código correspondientes?
3. Dibuje la gráfica que representa la tensión de salida en función de la tensión de entrada del expansor. Indique los valores más representativos, así como las expresiones matemáticas que relacionan ambas tensiones.
4. Suponiendo que en el receptor se recibe la señal tal como se transmite, y para las señales de entrada de los apartados anteriores, determine los valores de tensión que tendremos a la salida del expansor. Indique los errores cometidos en todo el sistema, y compárelos con los que tendríamos si sólo se hubiese utilizado cuantificación uniforme de 8 bits. Comente los resultados.

Problema 6.5 (Junio de 2004)

Disponemos del sistema MIC de la figura 6.5, donde:

- La señal de entrada al sistema es una señal normalizada (valor de pico 1 voltio).
- El compresor sigue la Ley A, con $A = 87,6$.
- El cuantificador uniforme es de tipo *midrise* (con corte central), de 8 bits y con nivel de sobrecarga 1 voltio.

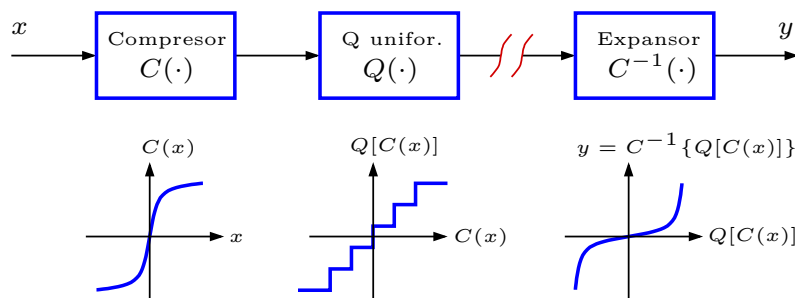


Figura 6.5: Sistema MIC.

$$C(x) = \begin{cases} \frac{A|x|}{1+\ln A} \operatorname{sign}(x) ; & 0 \leq \frac{|x|}{x_{sc}} \leq \frac{1}{A} \\ x_{sc} \frac{1+\ln\left(A \frac{|x|}{x_{sc}}\right)}{1+\ln A} \operatorname{sign}(x) ; & \frac{1}{A} \leq \frac{|x|}{x_{sc}} \leq 1 \end{cases}$$

Determine el error cometido a la salida del expansor (punto y en la figura), suponiendo que se ha recibido correctamente la información, si a la entrada del sistema tenemos $x = -0,0078$ voltios.

Problema 6.6 (Junio de 2006)

Una información musical analógica, con ancho de banda 20 kHz, se digitaliza con un cuantificador uniforme *mid-rise* de 16 bits, con codificación binaria simétrica. El valor de sobrecarga del cuantificador es de 3 V.

1. Para la muestra 0,925 V, calcule la palabra código que se enviará al canal.
2. Debido al ruido del canal, al receptor le llega la palabra del apartado anterior con un error en el tercer bit menos significativo. Calcule la tensión que se obtendrá a la salida del conversor D/A.

Problema 6.7 (Junio de 2007)

En un sistema MIC con Ley A ($A = 87,6$) y valor de sobrecarga $x_{sc} = \pm 1$ V, cierta muestra da lugar a la palabra binaria “01011001” (con codificación binaria simétrica, bit de mayor peso de signo, $+$ \Rightarrow “1”). ¿Entre qué valores puede estar la muestra original, en voltios?

$$C(x) = \begin{cases} \frac{A|x|}{1+\ln A} \operatorname{sign}(x) ; & 0 \leq \frac{|x|}{x_{sc}} \leq \frac{1}{A} \\ x_{sc} \frac{1+\ln\left(A \frac{|x|}{x_{sc}}\right)}{1+\ln A} \operatorname{sign}(x) ; & \frac{1}{A} \leq \frac{|x|}{x_{sc}} \leq 1 \end{cases}$$

Problema 6.8 (Enero de 2008)

Sea un sistema MIC típico, con Ley A ($A = 87,6$) y valor de sobrecarga $x_{sc} = \pm 1$ V (se adjuntan las fórmulas del compresor).

$$C(x) = \begin{cases} \frac{A|x|}{1+\ln A} \operatorname{sign}(x) ; & 0 \leq \frac{|x|}{x_{sc}} \leq \frac{1}{A} \\ x_{sc} \frac{1+\ln\left(A \frac{|x|}{x_{sc}}\right)}{1+\ln A} \operatorname{sign}(x) ; & \frac{1}{A} \leq \frac{|x|}{x_{sc}} \leq 1 \end{cases}$$

1. Calcule para las muestras $x_1 = 0,98765$ y $x_2 = -0,00123$ (voltios) las palabras binarias, y los errores cometidos a la salida del sistema.
2. ¿Cuánto vale la ganancia de compansión del sistema, en veces de señal?

Problema 6.9 (Junio de 2010)

En un sistema de comunicaciones digitales MIC, con cuantificación no uniforme de ley A ($A = 87,6$), se recibe la palabra código 01011101 (bit más significativo el primero por la izquierda). El valor de pico de la señal de entrada es igual al valor de sobrecarga del compresor y del cuantificador uniforme (*midrise*): $x_p = x_{sc} = 2$ V. En la figura 6.6 se observa un diagrama de bloques simplificado del sistema. Las ecuaciones de la ley A son:

$$C(x) = \begin{cases} \frac{A|x|}{1+\ln A} \operatorname{sign}(x) ; & 0 \leq \frac{|x|}{x_{sc}} \leq \frac{1}{A} \\ x_{sc} \frac{1+\ln\left(A \frac{|x|}{x_{sc}}\right)}{1+\ln A} \operatorname{sign}(x) ; & \frac{1}{A} \leq \frac{|x|}{x_{sc}} \leq 1 \end{cases}$$

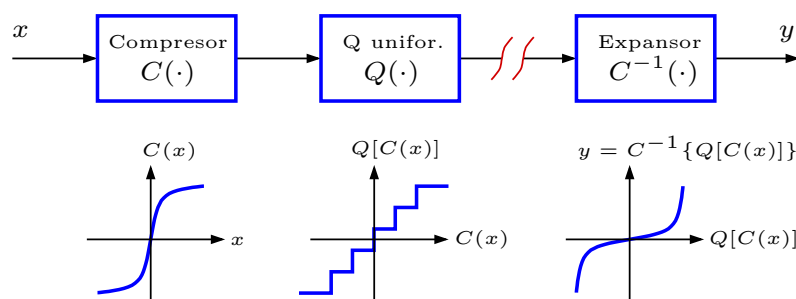


Figura 6.6: Diagrama de bloques simplificado.

Calcule el valor de tensión que se obtiene a la salida del expansor.

Problema 6.10 (Julio de 2010)

Datos de un sistema MIC: Trama de 40 canales vocales, más 2 de señalización y control (1 de señalización + 1 de control). Los canales de señalización y control tienen 10 bits cada uno. Se cuantifica con 1024 niveles, con Ley A ($A = 70$), y codificación binaria simétrica. Niveles de sobrecarga $x_{sc} = \pm 1$ V. Se trabaja a fondo de escala. Ancho de banda de las señales vocales $W = 6$ kHz. Frecuencia de muestreo 1,2 veces la frecuencia de Nyquist.

1. Calcule la calidad $(S/N)_q$ del sistema, suponiendo que la señal de entrada tiene una distribución uniforme de amplitudes en $[-x_{sc}, x_{sc}]$. ¿Cree que la señal de entrada en este sistema sigue esta distribución? ¿Por qué?
2. Calcule el régimen binario del sistema.
3. Para la muestra $x = -0,01$ V, calcule los bits transmitidos.
4. Calcule la tensión que se recupera a la salida del sistema cuando se reciben los bits del apartado anterior.

Problema 6.11 (Enero de 2012)

Sea un conversor analógico a digital (ADC) con una longitud de palabra de 10 bits y un fondo de escala de 1,5 V. La señal de entrada responde a la siguiente expresión:

$$x(t) = 0,2 \cos(2\pi 100 t) + 0,5 \sin(2\pi 1200 t)$$

Se muestrea a 1,5 veces la frecuencia de Nyquist.

1. Determine el tamaño del escalón de cuantificación y la potencia de ruido de cuantificación.
2. Calcule la relación señal a ruido de cuantificación.
3. ¿Cuál sería la reducción en número de bits por muestra que se conseguiría con un cuantificador no uniforme, ley A , con parámetro $A = 14,7$?
4. Obtenga el código de salida correspondiente a la muestra 164, para el cuantificador uniforme. Considere que la primera muestra se toma en $t = 0$.

Problema 6.12 (Junio de 2012)

Se dispone de un conversor analógico-digital que emplea cuantificación uniforme, tiene un fondo de escala de ± 6 V, y muestrea a 100 kHz. La señal a la entrada es un tono de amplitud 2 V, y se requiere una relación señal a ruido de cuantificación mínima de 60 dB.

1. Determine el número de bits de resolución, n .
2. Calcule cuánto valdrá finalmente la relación señal a ruido de cuantificación con el número de bits determinado en el apartado anterior.
3. Se construye un multiplex MDT (o TDM) con las salidas de 8 sistemas conversores A/D idénticos al descrito, añadiendo al comienzo de cada trama 10 bits de señalización. Determine el tiempo de trama y el régimen binario total.

(Nota: si no ha conseguido resolver el apartado primero, haga los cálculos en función de un n genérico.)

Problema 6.13 (Julio de 2013)

Dado un Conversor Analógico a Digital (ADC) con una longitud de palabra de 12 bits y un fondo de escala de 2,5 V, a cuya entrada se inyecta la señal:

$$x(t) = 0,2 \cos(2\pi 100 t) + 0,5 \sin(2\pi 1200 t)$$

siendo muestreada a 2,5 veces su frecuencia de Nyquist.

1. Determine el tamaño del escalón de cuantificación y la potencia de ruido de cuantificación.
2. Calcule la relación señal a ruido de cuantificación.
3. ¿Cuál debería ser el valor del parámetro A de un cuantificador no uniforme (ley A) que permita reducir el número de bits a 9, manteniendo la misma relación señal a ruido de cuantificación?
4. Obtenga el código de salida correspondiente a la muestra del instante $164 T_s$, para el cuantificador uniforme.

Tema 7

TX DIG. BB CON FILTRADO

Problema 7.1

Disponemos de un sistema MIC binario que transmite sus datos a un canal paso bajo limitado en banda a 100 kHz. El número de niveles del cuantificador del MIC es 32, y la función de transferencia del canal paso bajo puede modelarse como un coseno alzado con factor de redondeo $\alpha = 0,6$.

1. Calcule régimen binario máximo que puede transmitirse por el canal.
2. Calcule el ancho de banda máximo que puede tener la señal analógica a la entrada del MIC.

Problema 7.2 (Septiembre de 1993)

Se dispone del transmisor MIC representado en la figura 7.1.

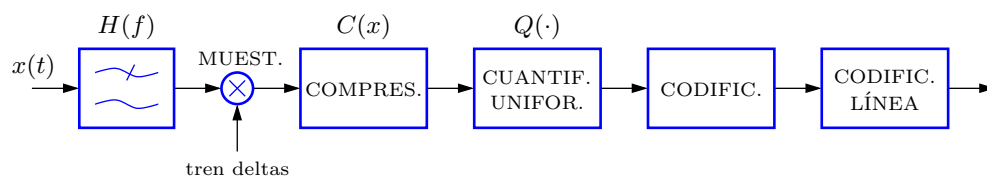


Figura 7.1: Diagrama de bloques del transmisor MIC.

El espectro de la señal de entrada, $X(f)$, la función de transferencia del filtro, $H(f)$, la característica de compresión, $C(x)$, y el error del cuantificador uniforme, $e(x)$, se muestran en las figuras 7.2 y 7.3.

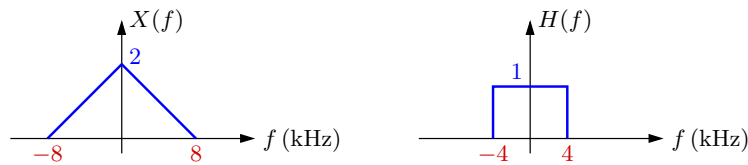


Figura 7.2: Espectro de la señal de entrada y función de transferencia del filtro.

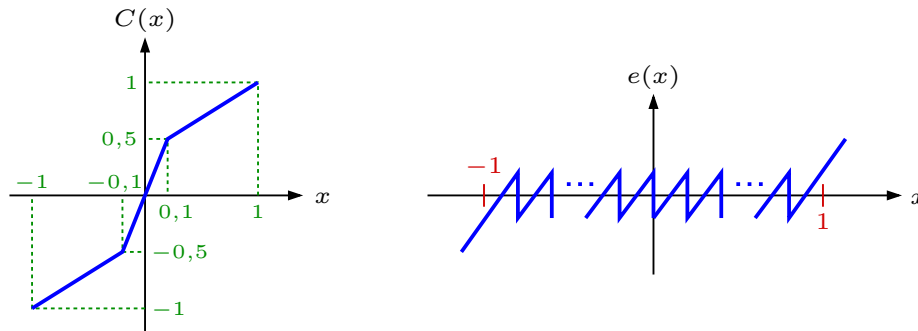


Figura 7.3: Función de compresión y error del cuantificador uniforme.

Es fácil comprobar que la característica de compresión corresponde analíticamente a:

$$C(x) = \begin{cases} \frac{5x-4}{9} ; & x < -0,1 \\ 5x ; & |x| \leq 0,1 \\ \frac{5x+4}{9} ; & x > 0,1 \end{cases}$$

1. Calcule la frecuencia de muestreo mínima para evitar solapamiento.
2. Suponiendo que el muestreo es ideal, dibuje el espectro a la salida del muestreador.
3. Considere que el valor absoluto de la señal de entrada al compresor toma valores superiores a 0,1 voltios durante la mayor parte del tiempo. ¿Es aconsejable el uso del compresor? ¿Por qué?
4. La cuantificación se realiza con 12 bits. El primero corresponde al bit de signo (“1” para las muestras positivas) y el resto representa el módulo de la señal a cuantificar. Obtenga la palabra código para una tensión de salida del muestreador de $-0,3$ voltios.

Se emplea en el transmisor un código de línea con dos señales: $h_1(t)$, si se transmite un “1”; y $h_2(t)$, si se transmite un “0”. En la figura 7.4 se representan ambas señales.

5. Razone cuál es el máximo valor de T (ver la figura 7.4) para que no exista interferencia intersímbolo en la transmisión. (Aquí T no es el tiempo de símbolo.)

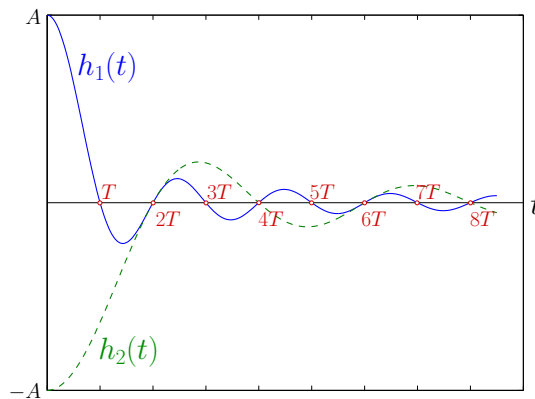


Figura 7.4: Señales recibidas.

Problema 7.3 (Junio de 1994)

Se desea analizar el sistema de comunicaciones de la figura 7.5.

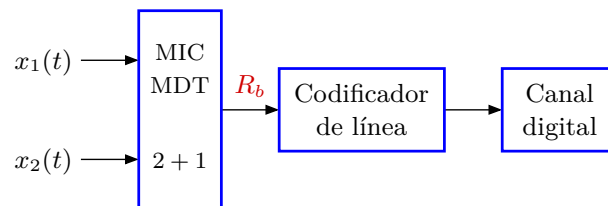


Figura 7.5: Diagrama de bloques del sistema bajo estudio.

Datos:

- Las fuentes de información $x_1(t)$ y $x_2(t)$ son analógicas, paso bajo, y cada una ocupa un ancho de banda de 10 kHz.
- El canal del sincronismo/señalización ocupa la mitad del tiempo de un canal de información, y se agrega a la cabecera de la trama.
- La frecuencia de muestreo de cada canal es la mínima posible.
- El cuantificador entrega 10 bits por muestra.
- No se utiliza compansión.
- El margen dinámico del cuantificador es $[-2, 2]$ voltios.

1. Dibuje la estructura de la trama, indicando el tiempo de trama, el de bit y el de canal.
2. Por el primer canal se introduce la señal $x_1(t) = 2 \cos(2\pi 1000t)$ voltios, y por el segundo $x_2(t) = 0,5$ voltios (constante). La primera muestra se toma en el instante $t = 0$ segundos. Dibuje la trama generada para la segunda muestra de ambos canales,

indicando los valores binarios (“0” o “1”). En el canal de sincronismo identifique con “X” cada bit.

3. Calcule el error de cuantificación de las muestras del apartado anterior.
4. Suponga que se transmite en banda base, por un canal en coseno alzado con factor de redondeo $\alpha = 0,5$. Indique cuál debe ser el mínimo ancho de banda del canal digital para que no aparezca interferencia intersímbolo.

Problema 7.4 (Junio de 1994)

Una cadena de radiodifusión de FM estéreo, con cobertura nacional, quiere distribuir sus programas entre las distintas emisoras que la componen. Por motivos de mercado, económicos y tecnológicos, la dirección de la cadena ha impuesto que la distribución de los programas se realice vía satélite, utilizando señales digitales.

Para ello, en primer lugar se digitalizan las señales normalizadas correspondientes al canal izquierdo, $x_I(t)$, y al canal derecho, $x_D(t)$. Posteriormente, ambos canales son multiplexados en el tiempo. En la figura 7.6 se observa un diagrama de bloques del proceso.

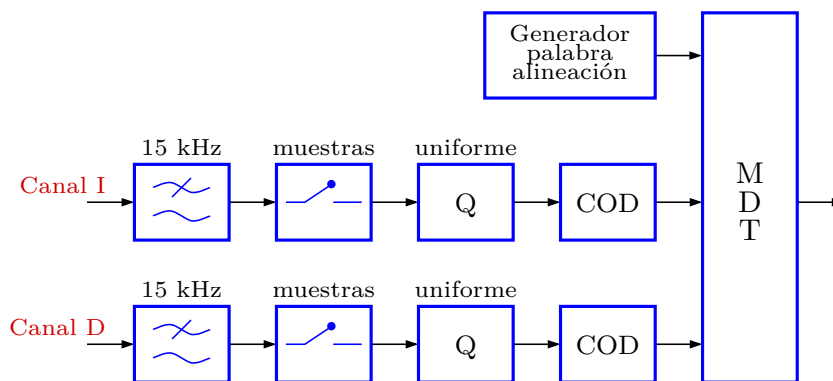


Figura 7.6: Subsistema de digitalización de los canales analógicos.

Las señales son muestreadas a la vez, y la multiplexación temporal se realiza muestra a muestra. La trama se forma con una palabra de alineación y, después, las palabras código de las muestras correspondientes a los canales izquierdo y derecho.

La normativa internacional aconseja una frecuencia de muestreo, para cada canal, de 32 kHz, y la utilización de un cuantificador uniforme simétrico de 16 bits con tensión de sobrecarga de 1 voltio. La palabra de alineación de trama es 10110001.

1. Calcule el régimen binario a la salida del múltiplex. Especifique el número de bits de la trama y el tiempo de trama.
2. Obtenga el contenido binario de la primera trama (en $t = 0$), si las muestras de las señales valen $x_I(0) = 0,15$ y $x_D(0) = 0,74$ voltios

3. Calcule el error de cuantificación cometido con la muestra del canal derecho.

Una vez que el programa del centro productor ha sido digitalizado, es preciso mandar la información a una estación terrena de satélite situada a 25 km de éste. Se opta por una transmisión binaria en banda base. En la figura 7.7 se observa el diagrama de bloques del sistema.

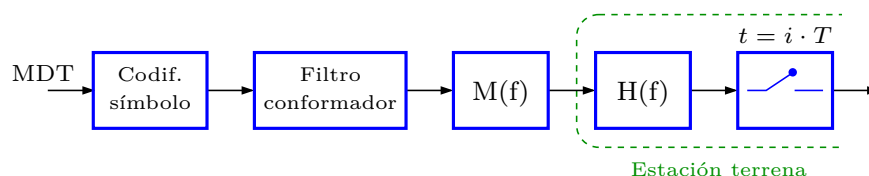


Figura 7.7: Modelo del canal digital banda base.

El filtro conformador, $U(f)$, tiene una respuesta impulsiva (en t) de pulso rectangular, con duración $T_s = T_b = T$ y amplitud 1.

Como medio de transmisión se utiliza un cable coaxial, cuya función de transferencia se modela según la expresión:

$$M(f) = 10^{[-\alpha(f)/20]} e^{-j \cdot \varphi(f)}$$

donde las funciones $\alpha(f)$ y $\varphi(f)$ son conocidas y no lineales.

4. Calcule la función de transferencia, $H(f)$, del filtro receptor de la estación terrena para que no exista interferencia entre símbolos en los instantes nT (siendo n cualquier número natural). Escoja la solución de menor ancho de banda.
5. Razone qué factor de redondeo de un filtro en coseno alzado minimizaría la interferencia entre símbolos cuando exista error en el instante de muestreo.

Problema 7.5 (Septiembre de 1995)

Se dispone de un sistema multiplex digital MIC-MDT de 32 canales, distribuidos de la siguiente forma: 30 canales para la transmisión de señales vocales telefónicas, 1 canal para alineación de trama, y 1 canal para señalización. Las características de todos estos canales son:

- Canal para señal telefónica:
 - Frecuencia de muestreo de la señal vocal: 8 kHz.
 - Tipo de cuantificador: uniforme de 12 bits.
- Canal para alineación de trama:
 - Genera una palabra de 8 bits por trama.

- Canal para señalización:

- Genera una palabra de 8 bits por trama.

1. Calcule el régimen binario a la salida del multiplex.
2. Calcule el tiempo de duración de cada canal de la trama multiplex digital.

A fin de reducir el régimen binario de salida, se decide alterar la estructura de todos los canales dedicados a la transmisión de las señales vocales telefónicas, cambiando el cuantificador uniforme de 12 bits por un cuantificador no uniforme con ley de compresión A ($A = 87,6$).

3. Calcule el número de bits del nuevo cuantificador para conseguir en recepción la misma calidad de voz que en el caso anterior.
4. Calcule el nuevo régimen binario a la salida del multiplex digital.

Después del sistema MIC-MDT (con el cuantificador Ley A), se introduce un codificador de línea que hace corresponder los bits de salida con las formas de onda de la figura 7.8.

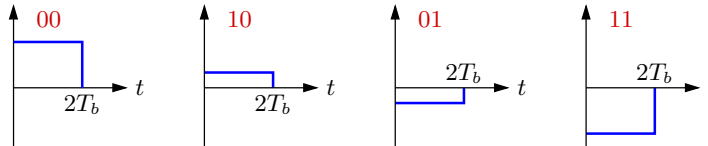


Figura 7.8: Criterio de asignación de formas de onda.

5. Obtenga el ancho de banda que debe tener un canal de Nyquist para poder realizar la transmisión de las formas de onda sin que se produzca interferencia intersímbolo (tome el cuantificador calculado en el apartado tercero).
6. Para realizar la transmisión se dispone de un canal en coseno alzado con un factor de redondeo $\alpha = 0,5$ y un ancho de banda $B = 512$ kHz. ¿Cuál debe ser el valor de la frecuencia de muestreo de las señales telefónicas para poder realizar la transmisión sin interferencia intersímbolo? ¿Existe algún inconveniente si se emplea esa frecuencia de muestreo?

Problema 7.6 (Febrero de 1996)

En la figura 7.9 se representa esquemáticamente un diagrama de bloques extraído de un sistema práctico. De él se sabe que el conmutador permanece, alternativamente, 10 μs en la posición 1 y 50 μs en la posición 2; y que $a(t)$, $b(t)$, $c(t)$ y $d(t)$ son señales analógicas paso bajo, todas con el mismo ancho de banda.

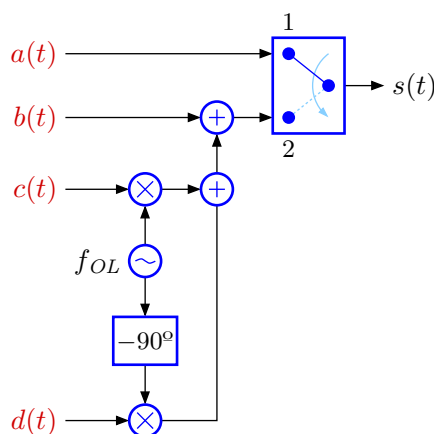


Figura 7.9: Esquema del sistema bajo estudio.

1. Describa las operaciones que se llevan a cabo sobre las señales, identificando los tipos de multiplexados que se efectúan.
2. Calcule la frecuencia máxima de las señales $a(t)$, $b(t)$, $c(t)$ y $d(t)$, y la frecuencia del oscilador, f_{OL} , para que el sistema funcione correctamente.
3. Proponga un esquema que permita recuperar las señales $a(t)$, $b(t)$, $c(t)$ y $d(t)$ a partir de la señal $s(t)$. Razone si en dicho esquema sería necesario introducir algún tipo de sincronización para garantizar su correcto funcionamiento.

Problema 7.7 (Diciembre de 1996)

Se desea transmitir n canales vocales telefónicos por un canal digital banda base. Para ello se emplea un MIC-MDT, que muestrea cada canal a 10 kHz y codifica cada muestra con 8 bits, seguido de dos amplificadores, en un orden aún por determinar. El canal es un cable coaxial de 114 dB de atenuación. En la figura 7.10 se observa el sistema propuesto.

De los amplificadores se ha medido, por separado, su ganancia en potencia (G) y la densidad espectral de potencia de ruido unilateral a su salida (G_{ns}), con un ruido a la entrada $T_0 = 300$ K y en condiciones de adaptación de impedancias, con los resultados del cuadro.

Dato: $10 \log(k T_0) = -174$ dBm/Hz.

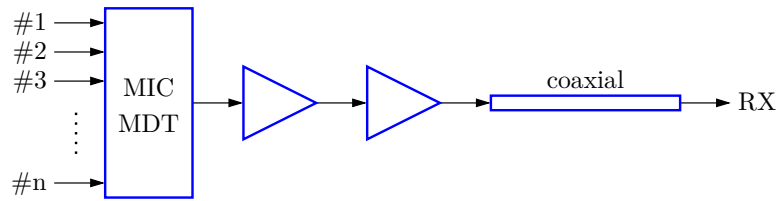


Figura 7.10: Sistema propuesto.

Amplificador	Ganancia	G_{ns} a T_0
A	$G_A = 30$ dB	$G_{nsA} = 10^{-16}$ W/Hz
B	$G_B = 36$ dB	$G_{nsB} = 10^{-15}$ W/Hz

1. Calcule el factor de ruido de ambos amplificadores.
2. ¿Cuál de los dos amplificadores colocaría primero? Justifique la respuesta y calcule el factor de ruido equivalente de los dos amplificadores en cascada.
3. Suponga que todos los canales vocales tienen una distribución de amplitud de tensión uniforme entre -1 y 1 voltios. Obtenga la relación (S/N) de cuantificación de cada uno de ellos.
4. La función de transferencia equivalente del canal digital en banda base es de tipo coseno alzado, con factor de *roll-off* igual a $0,6$ y ancho de banda 20 MHz. Determine el número máximo de canales que se pueden transmitir por este sistema.
5. Cite dos posibles parámetros de diseño sobre los que podría actuar, y cómo, para aumentar el número de canales vocales que pueden transmitirse.
6. El MIC-MDT entrega una potencia de señal a su salida de -32 dBm, y una potencia de ruido equivalente a T_0 . Obtenga la relación (E_b/N_0) a la entrada del receptor. Tome el orden de amplificadores que haya determinado para la pregunta segunda. (Considere que ahora el ruido de cuantificación es despreciable.)

Problema 7.8 (Junio de 1999)

Sea el sistema de la figura 7.11, donde:

- Los bloques 1 y 10 son filtros paso bajo ideales.
- El bloque 2 es un muestreador ideal.
- El bloque 3 es un compresor con característica (ver figura 7.12):

$$y = \frac{2}{\pi} \cos^{-1}(1 - x)$$

(\cos^{-1} indica la función arco-coseno.)

- El bloque 4 es un cuantificador uniforme con un codificador binario simétrico. El valor de sobrecarga es $x_{sc} = \pm 1$ V.
- El bloque 5 entrega: una delta positiva, cuando recibe un “1”; nada, cuando recibe un “0”.
- El bloque 6 tiene una transferencia (ver figura 7.13):

$$H(f) = A \operatorname{rect}\left(\frac{f}{2W}\right)$$

- El bloque 8 realiza la decodificación de la cuantificación.

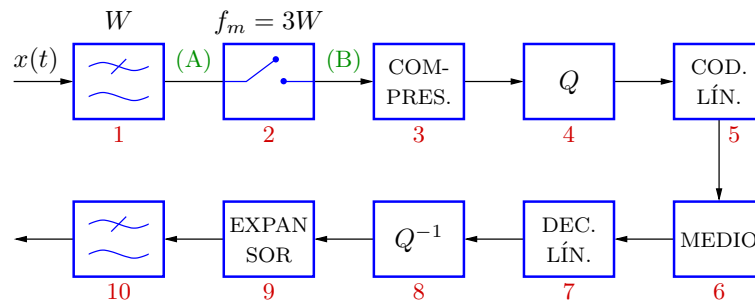


Figura 7.11: Diagrama de bloques del sistema propuesto.

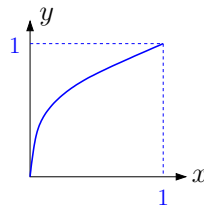


Figura 7.12: Característica del compresor, en el primer cuadrante.

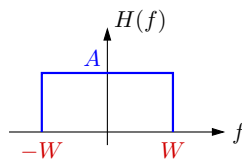


Figura 7.13: Transferencia del medio.

1. ¿Qué cometido tiene el filtro del bloque 1?
2. La frecuencia de muestreo del bloque 2, ¿cumple el teorema del muestreo?, ¿se puede muestrear a mayor velocidad?
3. Obtenga la característica analítica del expansor.
4. Para la muestra $x(t_0)$ el codificador entrega la palabra “1000000010101010”. ¿Cuánto vale la señal original en el instante t_0 ?

5. Calcule la interferencia intersimbólica producida por los símbolos anterior y posterior, cuando se transmite a un régimen binario $R_b = 1,5 W$. ¿Cómo podría evitarse la interferencia intersimbólica?

Notas:

- Recuerde que la transformada inversa de Fourier de un pulso rectangular es una *sinc*:

$$x(t) = 2W \operatorname{sinc}(2W t) \iff X(f) = \operatorname{rect}\left(\frac{f}{2W}\right)$$

- La función *sinc* vale:

$$\operatorname{sinc}(x) = \frac{\operatorname{sen}(\pi x)}{\pi x}$$

Problema 7.9 (Septiembre de 2001)

Se dispone de un hipotético sistema, como el mostrado en la figura 7.14, cuyo propósito es generar una señal, $y(t)$, que porte en formato digital y analógico, simultáneamente, la información, $x(t)$, entregada por cierta fuente.

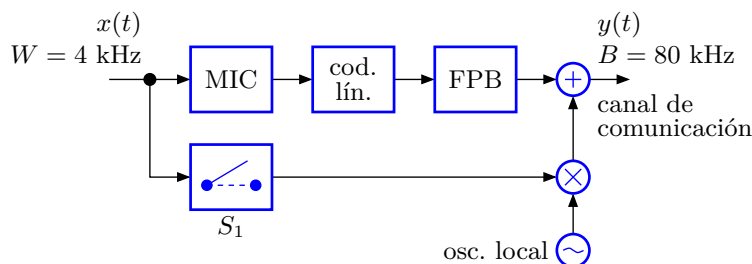


Figura 7.14: Sistema para transmitir en formato digital y analógico.

La señal $x(t)$ es analógica, paso bajo, con ancho de banda $W = 4$ kHz, y aleatoria, con una distribución estadística de amplitud de tipo uniforme y valor de pico $x_p = 1$ V.

Del codificador MIC sólo se sabe que trabaja a fondo de escala. El resto de sus parámetros se deben determinar.

El codificador de línea es binario.

El filtro paso bajo (FPB) tiene como misión evitar la interferencia intersímbolo en el receptor, filtrando la señal digital que entrega el codificador de línea según una característica en coseno alzado.

El ancho de banda del canal de comunicación es, estrictamente, $B = 80$ kHz.

Con el interruptor S_1 abierto:

1. Indique la longitud de palabra, en bits, que debe tener el codificador MIC para conseguir una calidad de cuantificación, $(S/N)_q$, mejor que 45 dB.
2. Obtenga la palabra binaria entregada por el MIC y calcule el error de cuantificación que se produce cuando $x(t) = 0,4$ V y cuando $x(t) = -0,8$ V. Emplee el bit “1” para codificar el signo positivo.
3. Deduzca, razonadamente, los valores mínimo y máximo que puede tener la frecuencia de muestreo del codificador MIC, para que el sistema funcione correctamente.

Con el interruptor S_1 cerrado:

4. Tomando como frecuencia de muestreo 10 kHz, calcule el máximo factor de redondeo, α , que puede tener el coseno alzado para enviar sin problemas la señal $y(t)$ por el canal de comunicación.
5. Para un factor de redondeo, α , igual a 0,9, calcule la frecuencia de muestreo máxima que podría utilizarse en el MIC para enviar sin problemas la señal $y(t)$ por el canal de comunicación.

Problema 7.10 (Junio de 2003)

Una señal musical analógica se transmite por un sistema digital banda base. La conversión analógico digital se realiza con un MIC, y se *modula* —no es una modulación estrictamente hablando— en 4-PAM. En la figura 7.15 se detalla el diagrama de bloques de parte del sistema.

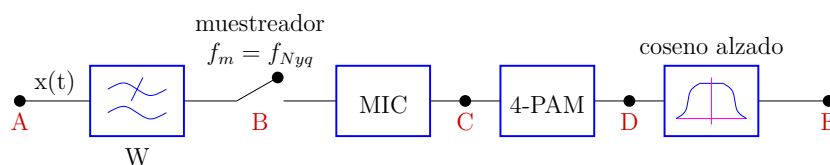


Figura 7.15: Diagrama de bloques.

Observaciones:

- La señal musical analógica, $x(t)$ (punto A), está normalizada en tensión y tiene un ancho de banda $W = 15$ kHz.
- El muestreador (punto B) usa la frecuencia de Nyquist.
- El bloque MIC trabaja con $n = 8$ bits, y un cuantificador no uniforme de Ley A, siendo $A = 50$. El valor de sobrecarga es $x_{sc} = \pm 1$ V.

- Las ecuaciones de la Ley A son:

$$C(x) = \begin{cases} \frac{A|x|}{1+\ln A} \operatorname{sign}(x) ; & 0 \leq \frac{|x|}{x_{sc}} \leq \frac{1}{A} \\ x_{sc} \frac{1+\ln\left(A \frac{|x|}{x_{sc}}\right)}{1+\ln A} \operatorname{sign}(x) ; & \frac{1}{A} \leq \frac{|x|}{x_{sc}} \leq 1 \end{cases}$$

- El *modulador* 4-PAM trabaja con la asignación de la figura 7.16.
- El filtro en coseno alzado tiene un factor de redondeo $\alpha = 0,5$.

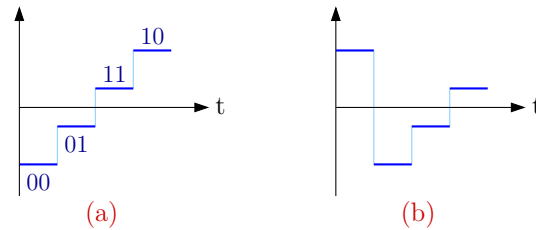


Figura 7.16: (a) Asignación de la 4-PAM, y (b) señal recibida en el punto D.

En un momento determinado, se recibe en el punto D la señal de la figura 7.16.

Responda a las siguientes preguntas, brevemente, pero argumentando y explicando los pasos realizados.

1. Calcule el régimen simbólico del sistema, R_s , el régimen binario, R_b , la frecuencia de muestreo, f_m , y el ancho de banda del filtro paso bajo anti-solapamiento, W .
2. Calcule el ancho de banda necesario, B , en el filtro en coseno alzado.
3. Manteniendo el filtro propuesto en la respuesta anterior, si disminuimos el régimen simbólico, R_s , a 100 kbaudios, ¿tendremos interferencia intersimbólica?, ¿por qué?
4. Calcule el margen de valores de la señal musical, $x(t)$, que puede haber producido la señal recibida en el punto D.

Problema 7.11 (Septiembre de 2004)

Para enviar una señal vocal, normalizada en tensión, por un canal radioeléctrico, se siguen los siguientes pasos:

1. Se filtra a la señal vocal, paso bajo, con ancho de banda $W = 6$ kHz.
2. Se muestrea a $f_m = 14$ kHz.
3. Se cuantifica y codifica con $n = 10$ bits/muestra. El cuantificador es no uniforme (Ley A, con $A = 87,6$), y la codificación binaria simétrica. Se trabaja a fondo de escala.

4. Se modula con una modulación digital *lineal*, de 4 símbolos, con frecuencia de portadora $f_c = 400$ MHz.

Considerando que el canal es en coseno alzado, con $\alpha = 0,2$, calcule el ancho de banda necesario para la transmisión.

Problema 7.12 (Julio de 2011)

En la figura 7.17 se observa el canal de un sistema de telecomunicación digital en banda base. Mediante el criterio de Nyquist en el dominio de la frecuencia:

1. Razone si la transmisión tiene o no interferencia intersimbólica.
2. Si procede, calcule la velocidad máxima de transmisión sin IIS.

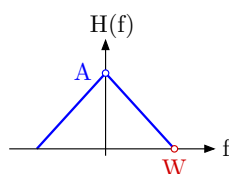


Figura 7.17: Transferencia del canal banda base.

Problema 7.13 (Julio de 2012)

Se pretende analizar un sistema MIC-MDT compuesto por 30 canales vocales telefónicos, muestreados cada uno a 16 kHz, y codificados con 16 bits por muestra. A la trama formada se le añaden 2 canales de señalización de 8 bits cada uno. El canal de comunicaciones se puede modelar como un coseno alzado con factor de redondeo $\alpha = 0,2$.

1. Para la transmisión banda base del MIC-MDT, determine el régimen binario y el ancho de banda ocupado.
2. El ancho de banda disponible es $B = 3609,6$ kHz (en lugar del obtenido en el apartado anterior). ¿Cuántos bits por muestra se deben usar para poder transmitir los 30 canales vocales, manteniendo la misma frecuencia de muestreo? Considere que los canales de señalización no sufren ningún cambio. Calcule la calidad señal a ruido del sistema.
3. A la salida del MIC-MDT se produce la secuencia mostrada en la figura 7.18. Codifíquela utilizando HDB3. La última polaridad alterna y la última violación fueron ambas positivas.

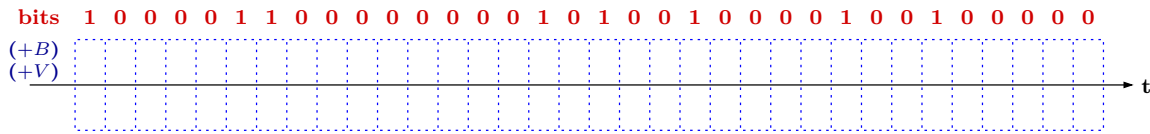


Figura 7.18: Secuencia MIC-MDT, y cuadrícula para rellenar con la señal HDB3.

4. Se cambia el código de línea anterior por el multinivel mostrado en la figura 7.19. Determine el régimen simbólico (con el número de bits por muestra del apartado segundo). Dibuje el diagrama de ojos con un eje temporal correspondiente a 3 símbolos.

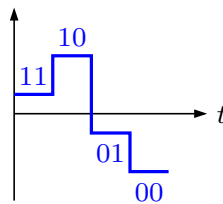


Figura 7.19: Nuevo código de línea multinivel.

Problema 7.14 (Enero de 2013)

Una señal analógica se transmite por un sistema digital en banda base. La figura 7.20 detalla el diagrama de bloques de parte del sistema.

- La señal, con distribución uniforme, está normalizada y tiene un ancho de banda $W = 15$ kHz.
- Se muestrea a 1,1 veces la frecuencia de Nyquist.
- La conversión analógico digital se realiza con palabras de $n = 8$ bits y se comprime con la Ley A ($A = 50$). La codificación es binaria simétrica. El valor de la tensión de sobrecarga es $x_{sc} = \pm 1$ V.
- Se codifica en línea con un modulador 4-PAM, con la asignación de bits de la figura 7.21.
- Se aplica un filtrado en coseno alzado.

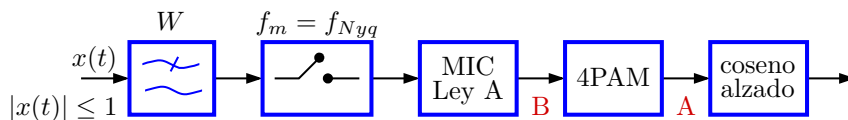


Figura 7.20: Diagrama de bloques de parte del sistema.

$$C(x) = \begin{cases} \frac{A|x|}{1+\ln A} \operatorname{sign}(x) ; & 0 \leq \frac{|x|}{x_{sc}} \leq \frac{1}{A} \\ x_{sc} \frac{1+\ln\left(A \frac{|x|}{x_{sc}}\right)}{1+\ln A} \operatorname{sign}(x) ; & \frac{1}{A} \leq \frac{|x|}{x_{sc}} \leq 1 \end{cases}$$

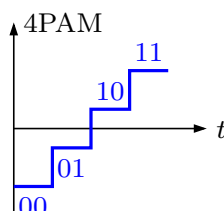


Figura 7.21: Asignación de bits del codificador de línea.

1. Calcule la frecuencia de muestreo, f_m , el ancho de banda del filtro paso bajo anti-solapamiento, W , y el régimen binario, R_b .
2. Calcule el régimen simbólico y el valor de α del coseno alzado para que el ancho de banda transmitido, B , sea de 100 kHz.
3. ¿Qué relación señal a ruido de cuantificación hay presente en el punto B?
4. Represente la señal producida en el punto A por una muestra $x = 0,015$ V. ¿Qué margen de valores de entrada x produce el mismo valor de salida en el punto A?

Problema 7.15 (Junio de 2013)

Datos de un sistema MIC: Ancho de banda de la señal vocal de entrada 5 kHz. Se muestrea a 1,2 veces la frecuencia de Nyquist. Se utiliza compansión con Ley A ($A = 50$). Cada muestra se codifica con 10 bits, usando código binario simétrico. Niveles de sobrecarga $x_{sc} = \pm 1$ V. Se trabaja a fondo de escala. Transmisión en BB, con un codificador de línea HDB2. Filtrado en línea con un coseno alzado ($\alpha = 0,2$).

1. Calcule el ancho de banda necesario para transmitir sin IIS.
2. Al final del extremo receptor, llega la muestra recuperada $\hat{x} = -0,001247193341$ V. Calcule la palabra binaria con la que se ha codificado dicha muestra.
3. Dibuje la señal BB que se ha transmitido por la línea para la muestra bajo estudio (antes de ser filtrada por el coseno alzado). Suponga polaridad previa negativa ($-B$) y violación previa negativa ($-V$). Use para su dibujo la plantilla que se suministra en la figura 7.22. Si no ha resuelto el apartado anterior tome la palabra (código binario simétrico): 0000001000.

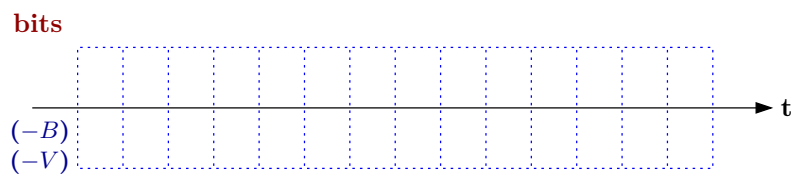


Figura 7.22: Plantilla para dibujar la señal HDB2.

Tema 8

TX DIG. BB CON RUIDO

Problema 8.1 (Junio de 1996)

Se desea transmitir cierta información binaria, procedente de un ordenador, a través de un canal de comunicación banda base. Para ello se emplea un codificador de línea tal que agrupa en pares los bits que le llegan, $\{b_n\}$, realizando a continuación la asignación de formas de onda indicada en la figura 8.1.

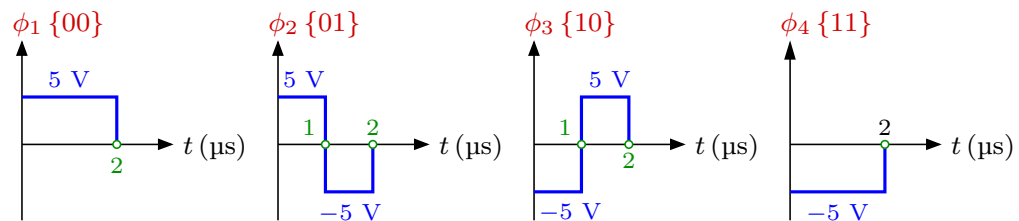


Figura 8.1: Criterio de asignación de formas de onda, $\{s_n(t)\}$, del codificador de línea.

Seguidamente, la señal entregada por el codificador de línea se manda a través de un medio de transmisión, que puede modelarse como un atenuador pasivo de 115 dB a una temperatura física de 27 °C. En la figura 8.2 se observa el modelo descrito.

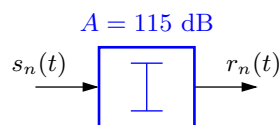


Figura 8.2: Modelo simplificado del medio de transmisión.

Finalmente, existe un receptor encargado de extraer la información, compuesto por una etapa amplificadora de entrada, cuya misión es devolver el nivel adecuado a la señal procedente del medio, y por un detector, que es el que recupera la información binaria. El esquema del detector, así como los valores de la ganancia y el factor de ruido del amplificador de entrada, se muestran en la figura 8.3.

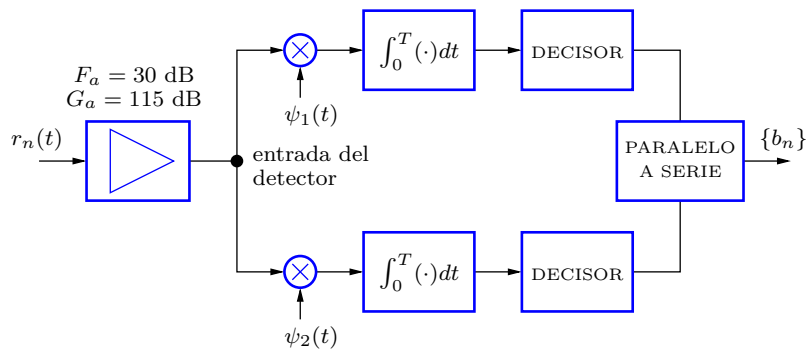


Figura 8.3: Diagrama de bloques del receptor.

1. Calcule el régimen binario, R_b , del sistema.
2. Obtenga una base generadora ortonormal, $\{\psi_1(t), \psi_2(t)\}$, de las formas de onda entregadas por el codificador de línea.
3. Represente la constelación de las señales generadas por el codificador de línea.
4. Calcule la energía media por símbolo, E_s , y la densidad espectral de potencia de ruido, N_0 , a la entrada del detector (ver la figura 8.3). Considere $T_0 = 300$ K.
5. Explique claramente y sin extenderse cómo funciona la parte detectora del receptor mostrado en la figura 8.3.
6. Calcule la probabilidad de error de bit, P_b , de la secuencia binaria entregada a la salida del detector.
7. Si se observara la secuencia binaria entregada por el detector, ¿qué tiempo medio habría que esperar para encontrar un error?

Problema 8.2 (Junio de 1997)

Para realizar una transmisión de datos en banda base se emplea el sistema de la figura 8.4. El codificador de línea utiliza dos señales, que se van a elegir entre las tres de la figura 8.5.

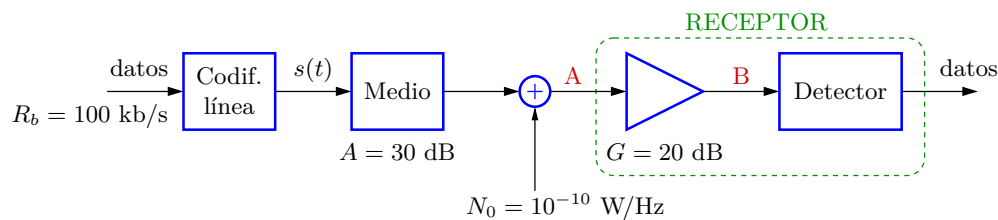


Figura 8.4: Sistema banda base.

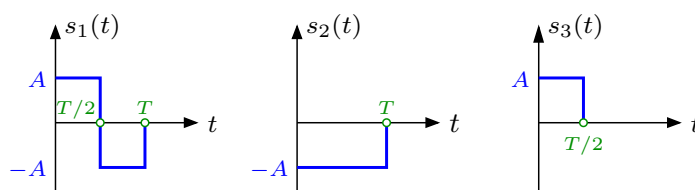


Figura 8.5: Señales susceptibles de ser transmitidas.

1. De las tres señales de la figura 8.5, elija las dos que den lugar a una menor probabilidad de error de bit.

Por motivos prácticos, se decide emplear las señales 1 y 2.

2. Si queremos que la probabilidad de error de bit sea menor que 10^{-3} , ¿cuál será el valor mínimo de (S/N) de bit admisible a la entrada del detector? Considere que los dos símbolos son equiprobables.

El ruido de todo el sistema (térmico más otras fuentes) se supone concentrado a la entrada del receptor, con una densidad espectral de potencia $N_0 = 10^{-10}$ W/Hz. El amplificador es ideal: no genera ruido ($F_a = 0$ dB).

3. Si la amplitud de la señal $s(t)$ a la salida del codificador vale $A = 1$ voltio, calcule la relación (S/N) de bit en los puntos (A) y (B).
4. Si el amplificador tuviera un factor de ruido $F_a = 5$ dB, comente razonadamente cuánto valdría la nueva relación (S/N) de bit en el punto (B).
5. Represente el espectro bilateral de la señal en línea si se emplea un código formado por las señales 1 y 2, indicando únicamente las frecuencias más significativas en función del período de símbolo (T). Justifique cuál sería el ancho de banda razonable para transmitir esta señal.

Problema 8.3 (Septiembre de 1997)

Se quiere diseñar un sistema MIC para transmitir una señal de audio con alta fidelidad por un canal digital en banda base. La estructura del sistema se observa en la figura 8.6.

La señal de audio que se desea transmitir, $x(t)$, tiene una distribución uniforme de amplitud, un ancho de banda $W = 20$ kHz y una potencia media $p_x = 10$ mW.

1. Calcule el número mínimo de bits que debe tener el conversor A/D para que el ruido de cuantificación sea inferior a -30 dBm.

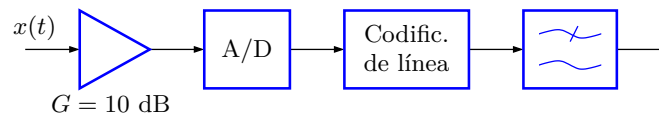


Figura 8.6: Sistema MIC.

Se opta por un conversor A/D con 10 bits y frecuencia de muestreo igual a 1,1 veces la frecuencia de Nyquist; un filtro de salida en coseno alzado con $\alpha = 0,2$ y ancho de banda de 250 kHz; y un codificador de línea binario, que genera el código de la figura 8.7.

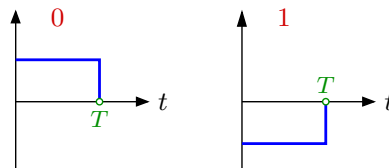


Figura 8.7: Señales del codificador.

2. Razone si puede aparecer algún tipo de problema en la transmisión de la información.

Se sustituye el codificador de línea anterior por uno que genera el código mostrado en la figura 8.8.

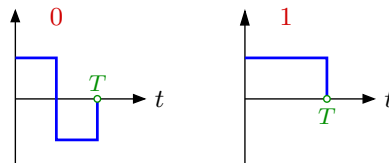


Figura 8.8: Señales del nuevo codificador.

3. Calcule el mínimo ancho de banda del filtro de salida para que la comunicación pueda realizarse correctamente.
4. ¿Con cuál de los dos códigos definidos en los apartados anteriores se obtiene una probabilidad de error más pequeña, si la potencia transmitida es la misma? Razone la respuesta.
5. ¿Es posible encontrar otro código de línea que reduzca más aún la probabilidad de error? Razone la respuesta.

Problema 8.4 (Junio de 1998)

El sistema MIC de la figura 8.9 se emplea para transmitir una señal de voz que tiene un ancho de banda $W = 4$ kHz. El cuantificador es uniforme, el codificador binario NRZ unipolar y la función de transferencia del canal de transmisión, normalizada en amplitud, es la de la figura 8.10.

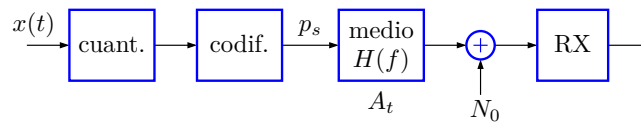


Figura 8.9: Sistema MIC.

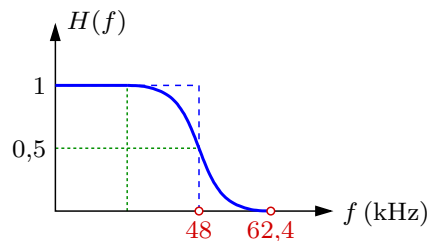


Figura 8.10: Medio (normalizado en amplitud).

Datos:

- Potencia a la salida del codificador: $p_s = 2$ W.
- Atenuación de medio: $A_t = 60$ dB.
- Densidad espectral de ruido: $N_0 = 1,30 \cdot 10^{-12}$ W/Hz.

1. Calcule el número máximo de bits del cuantificador uniforme y el régimen binario máximo para que no haya interferencia entre símbolos.
2. Considere que se muestrea $x(t)$ a 1,5 veces la frecuencia de Nyquist, el codificador entrega una potencia media de 2 W, y se desea conseguir una probabilidad de error de bit en el receptor menor que 10^{-5} . ¿Cuál es el número máximo de bits que puede tener el cuantificador?
3. Si queremos reducir la probabilidad de error, ¿qué sería mejor: aumentar en 5 dB la potencia a la salida del codificador, o colocar un amplificador con 10 dB de ganancia y 1 dB de factor de ruido a la entrada del receptor? Justifique su respuesta.

Problema 8.5 (Septiembre de 1998)

El sistema de la figura 8.11 se emplea para transmitir una señal de vídeo B/N por una fibra óptica. La señal que se desea transmitir, $x(t)$, tiene un ancho de banda en banda base de $W = 5$ MHz. En el receptor se requiere una relación (S/N) mínima de 52 dB y una resolución de 1024 tonos de grises. El codificador empleado es binario, NRZ unipolar.

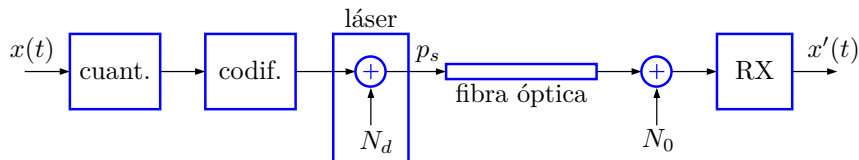


Figura 8.11: Sistema propuesto.

Datos:

- Potencia inyectada a la fibra por el láser: $p_s = 10$ mW.
- Densidad espectral de ruido del láser: $N_d = 10^{-13}$ W/Hz.
- Densidad espectral de ruido del receptor: $N_0 = 10^{-14}$ W/Hz.

1. Calcule el mínimo régimen binario del sistema, así como el mínimo ancho de banda del canal de transmisión.

Finalmente se establece el régimen binario en 80 Mb/s.

2. Sabiendo que la fibra óptica tiene una atenuación de 2 dB/km y que no introduce ruido, calcule su longitud máxima para conseguir en recepción una probabilidad de error $P_b < 10^{-6}$.
3. Comente cómo influye el ruido del diodo láser en el sistema. ¿Qué limitación introduce?

Problema 8.6 (Junio de 2001)

En una comunicación digital en banda base se emplean las señales $\{s_i(t)\}$ que se observan en la figura 8.12.

1. Las señales $\{s_i(t)\}$, ¿son linealmente independientes? Justifique su respuesta.
2. Encuentre una base ortonormal completa, $\{\psi_i(t)\}$, para las señales $\{s_i(t)\}$.
3. Dibuje las señales $\{s_i(t)\}$ en función de las $\{\psi_i(t)\}$, y calcule sus coordenadas.

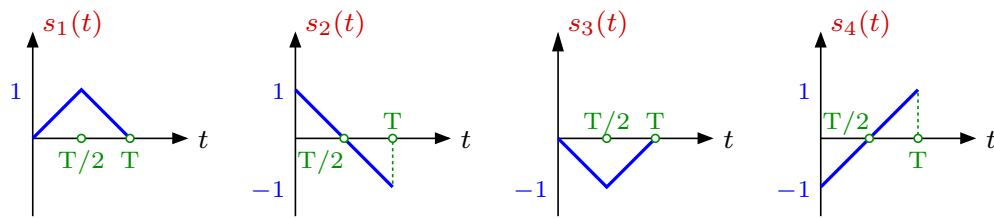


Figura 8.12: Señales empleadas.

Las señales $\{s_i(t)\}$ se sustituyen por 4 pulsos cuadrados, todos de duración T , con diferentes amplitudes.

Las nuevas señales banda base atraviesan un conjunto de elementos que podemos modelar como filtros. En conjunto, el canal de transmisión, con ancho de banda B_{BB} , tiene una transferencia en el espectro con forma triangular, como se observa en la figura 8.13. Su transformada inversa de Fourier es una función sinc al cuadrado, que también se observa en la figura 8.13. Teniendo en cuenta que se pretende transmitir sin interferencia intersimbólica, responda a las siguientes cuestiones.

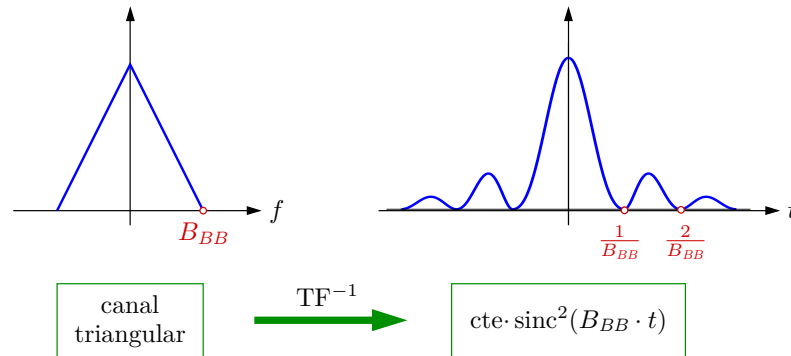


Figura 8.13: Transferencia y respuesta impulsiva del medio.

4. Calcule el régimen simbólico máximo. ¿Cuál es el régimen binario en este caso?
5. ¿Se cumple el criterio de Nyquist en el dominio de la frecuencia con $R_s = 0,5 B_{BB}$? Justifique su respuesta con un dibujo (evidentemente en el dominio de la frecuencia).
6. ¿Se cumple el criterio de Nyquist en el dominio del tiempo con $R_s = B_{BB}/3$? Justifique su respuesta con un dibujo (evidentemente en el dominio del tiempo).

Problema 8.7 (Febrero de 2004)

En un sistema de comunicaciones digitales en banda base se transmite el equivalente a 32 canales vocales telefónicos multiplexados en el dominio del tiempo. Cada uno de ellos es muestreado a 8 kHz, y se codifica cada muestra con 8 bits. La codificación de línea utilizada es NRZ polar con “1” = 0,2 V y “0” = -0,2 V.

1. Calcule el ancho de banda de Nyquist de la señal transmitida.
2. Si filtramos la señal a transmitir y la enviamos por medio de una línea de transmisión con atenuación 106 dB, ¿cuánto valdrá, teóricamente, la probabilidad de error de bit en el receptor si éste realiza la detección por muestreo y tiene una figura de ruido de 9 dB? Datos:
 - $\text{Prob}(\text{“1”}) = \text{Prob}(\text{“0”}) = 0,5$.
 - Temperatura de ruido a la entrada del receptor: $T_0 = 300$ K.
 - El filtro de recepción tiene igual ancho de banda que la señal transmitida.
 - Puede consultar los cuadros (tablas) o la gráfica de la función *erfc* en los apéndices.
3. ¿Qué niveles de tensión (asignación que implique menor consumo de potencia) tendríamos que transmitir para obtener una probabilidad de error de 10^{-9} ? Suponga que mantenemos los demás parámetros del sistema sin cambios.

Problema 8.8 (Junio de 2004)

Sea un sistema de comunicaciones en banda base con las siguientes características:

- Transmisor:
 - Codificación de línea: NRZ (± 2 V).
 - Régimen binario: 155 Mbits/s.
 - Canal:
 - Sistema lineal e invariante, aditivo de ruido blanco gaussiano.
 - Atenuación del canal: 110 dB.
 - Receptor:
 - Temperatura de ruido a la entrada del receptor: 300 K.
 - Temperatura de ruido equivalente del receptor: 700 K.
 - Filtro adaptado a la señal transmitida.
1. Considere que el código NRZ es polar. Calcule la probabilidad de bit erróneo. (Para resolver este apartado y el siguiente, puede consultar los cuadros —tablas— o la gráfica de la función *erfc* en los apéndices.)
 2. Considere que el código NRZ es bipolar. Calcule la probabilidad de bit erróneo.

Problema 8.9 (Noviembre de 2004)

Calcule el régimen binario en línea del siguiente sistema de comunicaciones digitales en banda base, si la probabilidad de bit erróneo es de $5 \cdot 10^{-11}$.

Datos:

- Transmisor:
 - Codificación de línea: NRZ polar (± 10 V).
- Canal:
 - Sistema lineal e invariante, aditivo de ruido blanco gaussiano.
 - Atenuación del canal: 130 dB.
- Receptor:
 - Temperatura de ruido a la entrada del receptor: 300 K.
 - Temperatura de ruido equivalente del receptor: 900 K.
 - Filtro adaptado a la señal transmitida.

Puede consultar los cuadros (tablas) o la gráfica de la función *erfc* en los apéndices.

Problema 8.10 (Junio de 2008)

Sea un sistema MIC de 32 canales, muestreado a 8 kHz, y cuantificado con 8 bits por muestra. El codificador de línea transmite las señales de la figura 8.14, con un filtrado en coseno alzado (factor de redondeo $\alpha = 0,5$). Sabiendo que el medio atenúa 60 dB y la densidad espectral unilateral de ruido a la entrada del receptor es $N_0 = 30 \cdot 10^{-15}$ W/Hz, calcule el ancho de banda ocupado por la transmisión y las probabilidades de símbolo y bit erróneo.

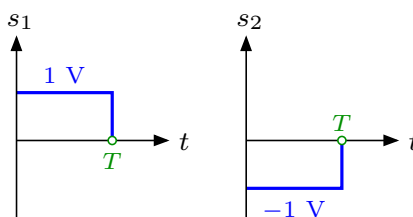


Figura 8.14: Símbolos transmitidos.

Problema 8.11 (Enero de 2012)

Sean las señales de la figura 8.15.

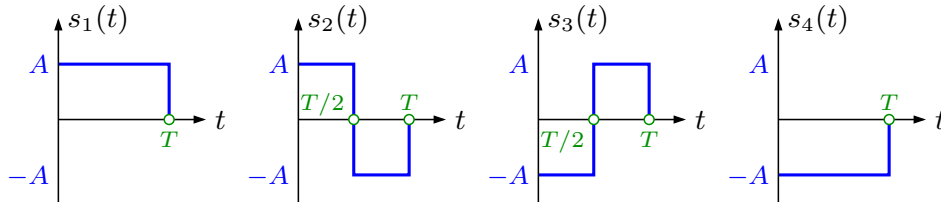


Figura 8.15: Conjunto de señales bajo estudio.

1. Obtenga una base ortonormal (normalizada en energía) en la que no aparezca ninguna de las señales anteriores.
2. Determine las coordenadas de las señales $\{s_i(t)\}$ en función de la base obtenida. Dibuje la constelación resultante.
3. Dibuje los filtros adaptados a las señales de la base. Indique claramente a qué señal corresponde cada filtro.

Problema 8.12 (Junio de 2012)

Se quiere transmitir en banda base una información digital de régimen binario $R_b = 1$ Mbps utilizando las cuatro señales de la figura 8.16.

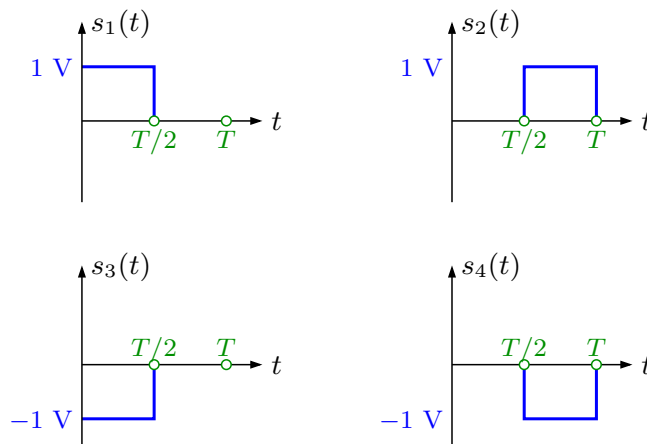


Figura 8.16: Señales banda base.

1. Determine el valor de T .
2. Determine una base ortonormal a partir de las señales $s_1(t)$ y $s_2(t)$.

3. Calcule las coordenadas de las señales en función de la base obtenida. Dibuje la representación geométrica de las señales sobre la base.

Problema 8.13 (Julio de 2012)

Sean las señales $\{s_i(t)\}$ de la figura 8.17.

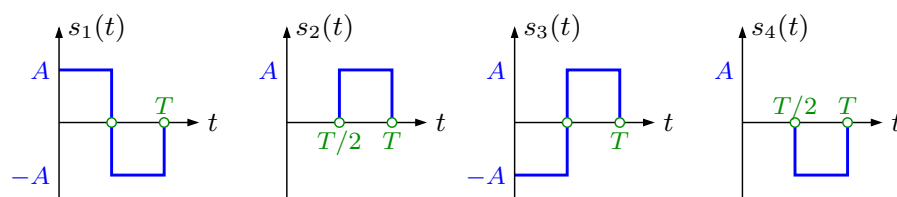


Figura 8.17: Señales $\{s_i(t)\}$.

1. Determine una base ortonormal (dibuje las señales).
2. Obtenga las coordenadas de las señales $\{s_i(t)\}$ en función de la base del apartado anterior. Dibuje las señales en el espacio N-dimensional de la base.
3. Dibuje la respuesta impulsiva de los filtros adaptados a las señales de la base.

Problema 8.14 (Junio de 2013)

Dado el siguiente conjunto de símbolos, todos definidos en el intervalo $0 \leq t < 1$:

$$s_1(t) = \cos(2\pi t) + \text{sen}(2\pi t)$$

$$s_2(t) = -\cos(2\pi t) + \text{sen}(2\pi t)$$

$$s_3(t) = -\cos(4\pi t) + \text{sen}(2\pi t)$$

$$s_4(t) = \cos(4\pi t) - \text{sen}(2\pi t)$$

$$s_5(t) = \cos(2\pi t) - \text{sen}(2\pi t)$$

$$s_6(t) = -\cos(2\pi t) - \text{sen}(2\pi t)$$

1. Obtenga una base ortonormal.
2. Obtenga las coordenadas de los símbolos en la base ortonormal. Dibuje la constelación resultante.
3. Dibuje y escriba la expresión analítica de los filtros adaptados a las señales base.

Tema 9

MODULACIÓN DIGITAL

Problema 9.1

Se desea implementar un sistema de comunicación digital cuyo régimen binario sea de 2048 kb/s. Se dispone de un modulador digital capaz de generar 8 señales digitales diferentes.

1. ¿Cuál es el número máximo de bits de información que se puede enviar por cada señal transmitida? ¿Cuánto vale el régimen del sistema? ¿Y el período de símbolo?

Las señales transmitidas por el canal son:

$$s_i(t) = \begin{cases} A_i \cos[\omega_c t + (\pi/4)(i-1)] & ; \quad 0 \leq t < T \\ 0 & ; \quad \text{Resto} \end{cases} \quad \left| \quad i = 1, 2, \dots, 8 \right.$$

donde

$$A_i = \begin{cases} B & \text{si } i \text{ es un número par} \\ C & \text{si } i \text{ es un número impar} \end{cases}$$

y

$$\omega_c = \frac{2\pi}{T} 100$$

Las señales $s_i(t)$ pueden descomponerse como combinación lineal de las señales:

$$\phi_1(t) = \begin{cases} \cos(\omega_c t) & ; \quad 0 \leq t < T \\ 0 & ; \quad \text{Resto} \end{cases} \quad \phi_2(t) = \begin{cases} \text{sen}(\omega_c t) & ; \quad 0 \leq t < T \\ 0 & ; \quad \text{Resto} \end{cases}$$

2. Demuestre que las señales $\phi_1(t)$ y $\phi_2(t)$ son ortogonales. Normalícelas generando $\Psi_1(t)$ y $\Psi_2(t)$. ($\{\Psi_i(t)\}$ forman una base ortonormal completa para las señales $\{s_i(t)\}$.)

3. Dibuje la constelación que forman las señales $\{s_i(t)\}$, usando la base $\{\Psi_i(t)\}$. Suponga que C es mayor que B .
4. Encuentre la distancia entre las señales $s_1(t)$ y $s_2(t)$ — d_{12} —, $s_1(t)$ y $s_3(t)$ — d_{13} —, y $s_2(t)$ y $s_8(t)$ — d_{28} —.
5. Calcule la relación entre las amplitudes B y C para que se cumpla que $d_{28} = d_{12}$.

A partir de ahora, tome la relación entre B y C calculada en el apartado anterior.

6. Calcule la energía media transmitida en función de la amplitud B .
7. Dibuje las regiones de decisión que minimizan la probabilidad de error.
8. La densidad espectral unilateral de potencia de ruido a la entrada del receptor es N_0 . Halle las cotas máxima y mínima de la probabilidad de error. Considere que el medio de transmisión tiene una atenuación a_t en veces de señal.

Problema 9.2

Datos de un sistema de comunicaciones:

- Existe adaptación de impedancias en todo el sistema.
 - Régimen binario: $R_b = 155$ Mb/s.
 - Atenuación del canal a la frecuencia de trabajo: $A_t = 92$ dB.
 - Temperatura de ruido de la entrada del receptor: $T_0 = 300$ K.
 - Factor de ruido del receptor: 3 dB.
 - BER máxima admitida a la salida del demodulador: 10^{-7} .
 - La modulación puede ser 16QAM o 64QAM.
 - La codificación de los símbolos es tal que al decodificar un símbolo erróneo sólo se produce un bit erróneo.
 - Filtro utilizado en transmisión: raíz coseno alzado, con factor de *roll-off*: 0,2.
 - Filtro utilizado en recepción: raíz coseno alzado, con factor de *roll-off*: 0,2.
 - El ancho de banda del ruido térmico es igual al de la señal.
1. Compruebe en las gráficas de calidad de los apéndices que: a) para la 16QAM se requiere una relación $E_b/N_0 \approx 15$ dB; b) para la 64QAM se requiere una relación $E_b/N_0 \approx 19$ dB. (Tenga en cuenta que no son aproximaciones muy precisas.)
 2. Compruebe las aproximaciones del apartado anterior usando las fórmulas de calidad de las QAM y las tablas de la función erfc de los apéndices.

3. Tomando como buenas las aproximaciones del primer apartado, calcule la potencia que se debe transmitir para cada modulación. Añada un margen de seguridad de 6 dB.
4. Calcule el ancho de banda que se ocupará con cada modulación.
5. Razone si el sistema tiene o no interferencia intersimbólica.

Problema 9.3 (Febrero de 1994)

Se desea transmitir las señales analógicas procedentes de dos sensores de una estación meteorológica, con destino a un centro de procesamiento remoto. Para realizar la transmisión se utiliza el sistema que se representa en la figura 9.1. La línea de transmisión tiene un ancho de banda de 14 kHz, comprendidos entre 100 kHz y 114 kHz.

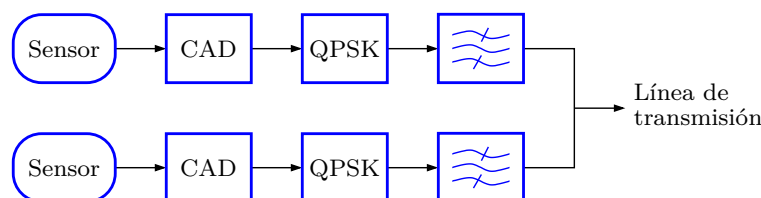


Figura 9.1: Sistema de transmisión de la estación meteorológica.

La señal analógica obtenida a la salida de los sensores tiene una tensión de pico de ± 1 voltios, igual al margen dinámico del cuantificador.

La salida de cada sensor es procesada por el bloque CAD (Convertor Analógico Digital). El procesado consiste en: a) muestreo a la frecuencia de Nyquist, b) cuantificación uniforme —con un error de cuantificación máximo de $7812,5/2 \mu\text{V}$ —, y c) codificación binaria simétrica.

La salida de cada uno de los CAD's ataca a un modulador QPSK, cuya salida es filtrada en paso banda, antes de mezclarse con la salida del otro modulador y ser enviada por la línea de transmisión compartida. La multiplexación en frecuencia se realiza dejando una banda de guarda de 2 kHz entre ambos canales (entre ambas QPSK).

La señal de los sensores tiene una frecuencia máxima de 375 Hz. Considere que las modulaciones QPSK se filtran en coseno alzado con $\alpha = 1$.

1. Calcule el número de bits que se asignan a cada muestra en cada uno de los CAD's.
2. Calcule el régimen binario a la entrada de cada uno de los moduladores.
3. Explique por qué debe ser cuatro el número mínimo de fases de los moduladores.
4. Dibuje el espectro de la multiplexación de salida. Indique todos los valores de interés (portadoras, ancho de banda de cada QPSK, guarda).

5. Calcule la palabra código de una muestra de 0,6 V. Tome el bit de signo “1” para muestras positivas.
6. Se cambia la línea de transmisión, manteniendo constantes el resto de los parámetros (CAD's, sensores, señales, bandas de guarda). Ahora el ancho de banda disponible es de 10 kHz, entre 100 kHz y 110 kHz. Indique el nuevo número de fases de cada modulador MPSK, y las nuevas frecuencias de interés del espectro multiplexado.
7. La línea de transmisión atenúa 160 dB. La potencia media transmitida vale 10 W (potencia del conjunto transmitido). El receptor de una de las modulaciones MPSK multiplexadas consta de los bloques mostrados en la figura 9.2. La atenuación del primer filtro es despreciable. La línea de transmisión es, a efectos de ruido, un dipolo con temperatura de ruido T_0 .

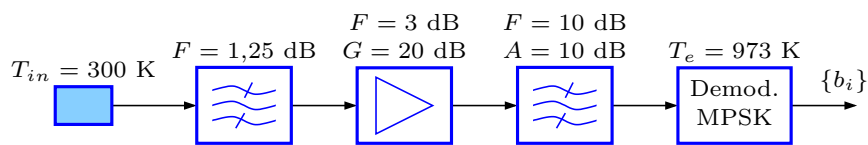


Figura 9.2: Diagrama de bloques del receptor.

- Calcule la densidad espectral unilateral de ruido a la entrada del detector, dentro de la banda de trabajo, suponiendo que los filtros son ideales y atenúan por igual todas las frecuencias del canal.
8. Calcule la energía media por bit recibida a la entrada del detector.
 9. Obtenga el valor de la probabilidad de símbolo erróneo. Puede consultar las gráficas de calidad de los apéndices.
 10. Estime la probabilidad de bit erróneo, en caso de emplearse una codificación de Gray.

Problema 9.4 (Junio de 1994)

Un centro productor de programas de radiodifusión manda la información, ya digitalizada, a una estación terrena de satélite. Una vez que la información ha sido detectada y recuperada en la estación terrena, pasa a ser codificada, es decir: se le añade redundancia con el fin de reducir la probabilidad de error total. Esto provoca un aumento en el número de bits a transmitir y en el régimen binario del sistema. La información codificada es modulada y enviada al satélite, donde se regenera y se retransmite a cada centro emisor (ver la figura 9.3). Se pueden distinguir dos enlaces distintos: el enlace ascendente, que va de la estación terrena al satélite, y el enlace descendente, que va desde el satélite a las distintas emisoras. Para el enlace ascendente se utiliza una modulación 16QAM, mientras que en el enlace descendente se utiliza QPSK. La constelación de las señales del enlace ascendente se observa en la figura 9.4.

La frecuencia central del enlace ascendente es 17 GHz, mientras que la del descendente es 12 GHz. La potencia transmitida en el enlace ascendente es de 80 W, mientras que en el enlace descendente es 4 W. El régimen binario del sistema vale 2 Mb/s.

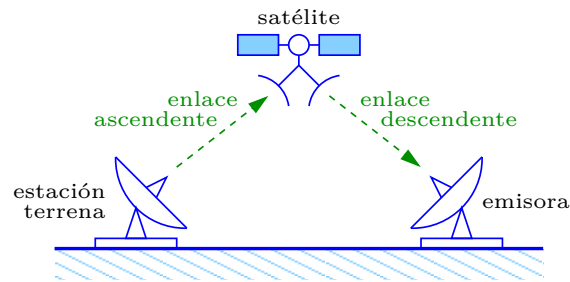


Figura 9.3: Sistema de comunicación por satélite propuesto.

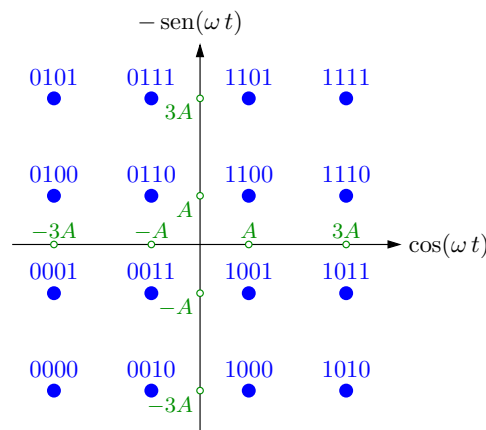


Figura 9.4: Constelación de las señales del enlace ascendente.

1. Calcule el número de períodos de portadora que hay en cada período de símbolo, para el enlace ascendente y para el enlace descendente.
2. Se transmite la información “101101101111” (el primer bit, de mayor peso, es el izquierdo). Dibuje la señal transmitida en el enlace ascendente, indicando claramente la amplitud, la fase inicial y el instante de comienzo de cada símbolo.

En la figura 9.5 se observa el diagrama de bloques del receptor del enlace descendente.

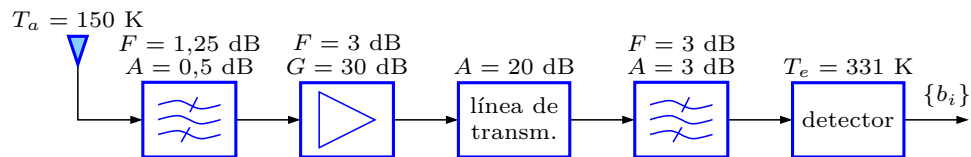


Figura 9.5: Diagrama de bloques del receptor del enlace descendente.

3. Calcule la densidad espectral de potencia de ruido unilateral, total equivalente, a la entrada del detector, dentro del ancho de banda de trabajo.
4. La atenuación desde el satélite hasta el receptor del enlace descendente es igual a 134 dB . Calcule la energía media por bit que llega al detector (enlace descendente).

5. En el enlace descendente, calcule la probabilidad de error de símbolo y la probabilidad de error de bit, si se utiliza una codificación de Gray. Puede usar las gráficas de calidad de los apéndices.
6. La probabilidad de bit erróneo del enlace ascendente es de 10^{-8} . Calcule la BER total (teniendo en cuenta el enlace ascendente y el descendente).
7. El enlace ascendente usa 16QAM, y el descendente QPSK. Razone si este reparto es adecuado o sería preferible intercambiar las modulaciones.

Problema 9.5 (Junio de 1995)

Una empresa de telecomunicación ha desarrollado un módem que transmite el conjunto de señales descrito en la figura 9.6, donde también se especifica la codificación empleada. Los ejes x e y representan, respectivamente, a las señales $\Psi_1(t)$ y $\Psi_2(t)$. Las señales $\Psi_i(t)$ son:

$$\Psi_1(t) = \begin{cases} \sqrt{\frac{2}{T}} \cos\left(\frac{6\pi t}{T}\right) ; & 0 \leq t < T \\ 0 ; & \text{resto} \end{cases}$$

$$\Psi_2(t) = \begin{cases} -\sqrt{\frac{2}{T}} \sin\left(\frac{6\pi t}{T}\right) ; & 0 \leq t < T \\ 0 ; & \text{resto} \end{cases}$$

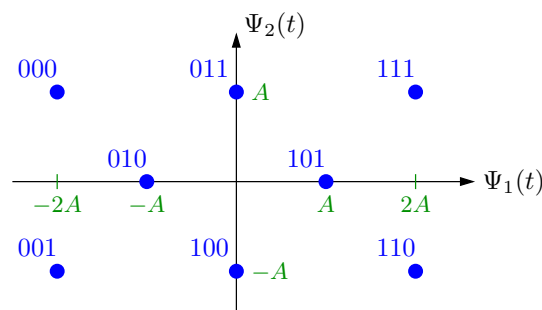


Figura 9.6: Constelación y codificación de la modulación utilizada.

1. El régimen binario de trabajo del módem es 14400 bits/s. Calcule el valor del período de símbolo, T .
2. Demuestre que las señales $\Psi_1(t)$ y $\Psi_2(t)$ son ortonormales.
3. La energía media transmitida por símbolo es de 300 μJ . Calcule el valor de A (ver figura 9.6). Calcule la energía media transmitida por bit. Calcule la potencia media transmitida.
4. Represente, aproximadamente, la señal temporal transmitida cuando la información binaria que se desea enviar es “011001010111” (primer bit a la izquierda).

La función de transferencia del medio empleado es:

$$M(f) = 10^{-4} \exp(-j 2\pi f 0,001)$$

y en la figura 9.7 se representa el diagrama de bloques del receptor utilizado:

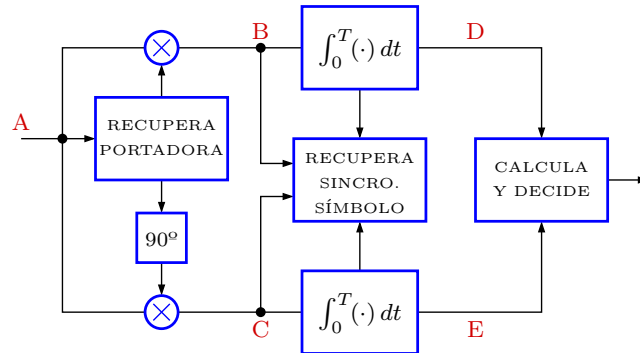


Figura 9.7: Diagrama de bloques del receptor. El bloque recuperador de portadora entrega sinusoides normalizadas en valor de pico.

5. Exprese matemáticamente las señales correspondientes a los dos primeros símbolos transmitidos en los puntos A, B, C, D y E (ver figura 9.7). Indique claramente la amplitud de las señales y los intervalos temporales. (Considere que el bloque recuperador de portadora entrega sinusoides normalizadas en valor de pico.)
6. Estime entre qué límites se encuentra la probabilidad de símbolo erróneo, si el valor de la densidad espectral de potencia de ruido unilateral es de $N_0 = 3 \cdot 10^{-14}$ Julios. Puede consultar las tablas de la función erfc de los apéndices.
7. Razone que la codificación empleada en la constelación de la figura 9.6 no sigue una codificación de Gray y que, además, no existe ninguna codificación de Gray para esta constelación.
8. Dibuje las regiones de decisión sobre la constelación.

Problema 9.6 (Septiembre de 1995)

Se desea transmitir una señal digital, cuyo régimen binario es 750 kb/s, a través de un canal de radio centrado en 250 MHz y con ancho de banda 300 kHz. Para ello se dispone de un modulador que transmite las formas de onda definidas en la figura 9.8, donde $\Psi_1(t)$ y $\Psi_2(t)$ son las señales ortonormales:

$$\Psi_1(t) = \begin{cases} \sqrt{\frac{2}{T}} \cos\left(\frac{2\pi n t}{T}\right) ; & 0 \leq t < T \\ 0 ; & \text{resto} \end{cases}$$

$$\Psi_2(t) = \begin{cases} -\sqrt{\frac{2}{T}} \sin\left(\frac{2\pi n t}{T}\right) ; & 0 \leq t < T \\ 0 ; & \text{resto} \end{cases}$$

donde T es el período de símbolo, y n es un número natural a determinar.

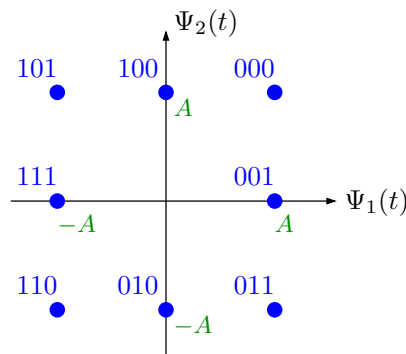


Figura 9.8: Constelación y codificación de la modulación utilizada.

1. Determine el período de símbolo del sistema, T .
2. Calcule el valor de n necesario para que la frecuencia de portadora sea 250 MHz.
3. Si se utiliza un filtro en coseno alzado, ¿cuál es el máximo valor del factor de redondeo, α , para que la señal entre dentro del ancho de banda asignado?
4. Considere, a partir de ahora, que $A = 5,164 \cdot 10^{-3}$. Calcule, siempre en transmisión, la energía media por símbolo, la potencia media y la energía media por bit.
5. El medio atenúa la señal 60 dB y la retrasa $T/(4n)$. Dibuje las señales transmitida y recibida cuando se transmite la secuencia binaria “101110001100”. Indique claramente el instante de comienzo de cada símbolo, su fase inicial, su amplitud, y el número de períodos de portadora en cada período de símbolo.
6. Dibuje las regiones de decisión para la constelación considerada, suponiendo que los símbolos son equiprobables.
7. Calcule los límites entre los que se encuentra la probabilidad de error, cuando la densidad espectral de potencia de ruido, a la entrada del receptor óptimo, es $N_0 = 3 \cdot 10^{-13}$ Julios.

Problema 9.7 (Febrero de 1996)

Sea el modulador 2FSK de la figura 9.9, que emplea dos osciladores distintos para generar las dos frecuencias de los dos símbolos. Si la señal de datos, $x(t)$, es “0” entonces la salida es $s(t) = s_1(t)$, y si es “1” $s(t) = s_2(t)$.

Datos:

- $R_b = 100$ kb/s.
- $f_1 = 400$ kHz.
- $f_2 = 600$ kHz.
- $\theta_1 = 0^\circ$.

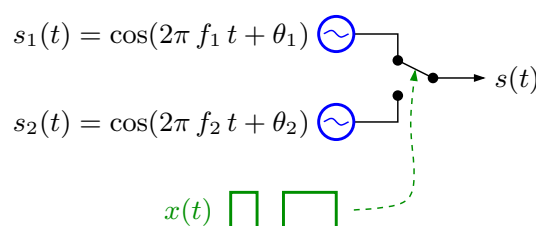


Figura 9.9: Modulador 2FSK.

- $\theta_2 = 90^\circ$.

1. Obtenga la expresión de la señal 2FSK en el dominio del tiempo, en función de la señal de entrada $x(t)$ y de la separación entre frecuencias contiguas $\Delta f = f_2 - f_1$. Represente su espectro de forma aproximada, indicando las frecuencias principales. Calcule el ancho de banda de la señal.
2. Con el objeto de reducir el ancho de banda ocupado, se va a disminuir la desviación de frecuencia del modulador. Calcule el mínimo valor posible para la separación entre frecuencias contiguas, sabiendo que ha de mantenerse la ortogonalidad entre los dos símbolos, $s_1(t)$ y $s_2(t)$. Comente razonadamente si se podría reducir aún más Δf sin alterar el régimen binario.
3. Calcule la probabilidad de bit erróneo si se emplea un receptor no coherente con relación $E_b/N_0 = 14$ dB (a la entrada). Represente un esquema detallado de un receptor óptimo coherente para FSK.

Nota: La probabilidad de bit erróneo para FSK, con recepción no coherente se puede calcular mediante:

$$P_b = \frac{1}{2} \exp\left(-\frac{E_b}{2N_0}\right)$$

4. Represente, detalladamente, la señal modulada en función del tiempo para la secuencia de datos “1011”. Con objeto de simplificar la gráfica, represente un número pequeño de ciclos de portadora por cada período de símbolo.

Problema 9.8 (Junio de 1996)

Una fuente digital entrega a un modulador palabras de tres bits. Las combinaciones 000 y 111 no están permitidas. En la figura 9.10 se observa la señal de salida del modulador cuando la entrada es “001.010.011.100.101.110” (por claridad sólo se representan dos períodos en cada símbolo).

Datos:

- $f_1 = 180$ MHz.

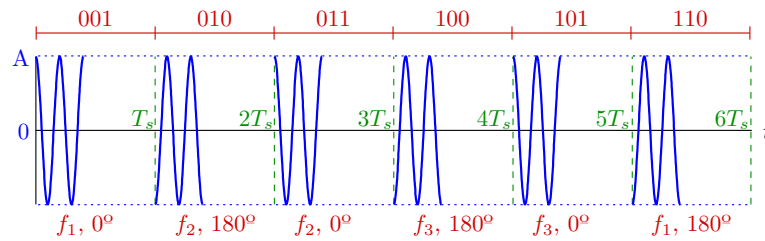


Figura 9.10: Señal de salida del modulador.

- $f_2 = 200$ MHz.
 - $f_3 = 220$ MHz.
 - $T_s = 5$ μ s.
 - $A = 20$ V.
1. ¿Cuál es el número de símbolos, M , del sistema presentado?
 2. ¿Cuántos *unos* consecutivos se pueden transmitir?, ¿cuántos *ceros*? ¿Qué utilidad tiene limitar la longitud de las secuencias de bits iguales?
 3. Dibuje la constelación de la modulación, indicando para cada símbolo sus coordenadas respecto a un conjunto de señales ortonormales.
 4. ¿Qué tipo de modulación híbrida se ha realizado?
 5. Razone cuál será el ancho de banda necesario para la señal modulada. Calcule la eficiencia espectral.
 6. Suponga que los símbolos son equiprobables, y que se reciben las señales $x(t)$, $y(t)$ y $z(t)$ de la figura 9.11 (por claridad sólo se representan dos períodos en cada símbolo). ¿Qué palabras escogerá un detector óptimo? ¿Para cuál de las tres señales es más probable cometer un error?

Datos:

- $f_x = 200$ MHz.
- $f_y = 180$ MHz.
- $f_z = 250$ MHz.
- $T_S = 5$ μ s.
- $A = 20$ V.

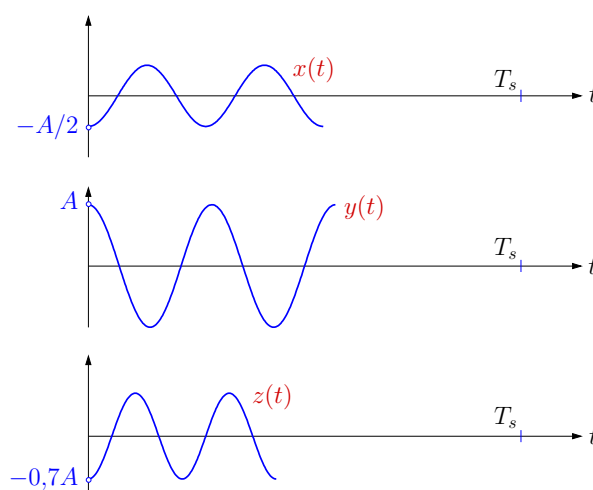


Figura 9.11: Representación temporal de las señales recibidas.

Problema 9.9 (Septiembre de 1996)

Para transmitir datos entre dos puntos se modula una portadora de 900 MHz con una señal digital de $R_b = 4$ Mbps. Con objeto de contrastar la calidad del sistema se envía una secuencia conocida de 300000 bits, 20 de los cuales son recibidos erróneamente. La densidad espectral unilateral de potencia de ruido (total equivalente) en el extremo receptor es $N_0 = 7,887 \cdot 10^{-19}$ W/Hz. Se sabe que en condiciones ideales (es decir: sin ruido) se recibiría la constelación de la figura 9.12. En la figura 9.13 se observa la probabilidad de símbolo erróneo para la modulación empleada.

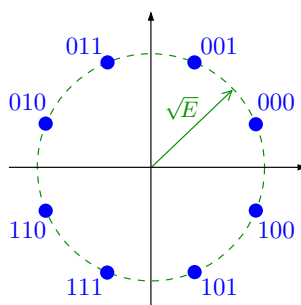


Figura 9.12: Constelación y codificación en el receptor, en condiciones ideales.

1. Explique razonadamente cuál es la modulación empleada.
2. Escriba, en función de la energía por símbolo (E), la expresión analítica de las señales temporales correspondientes a la constelación de la figura 9.12.
3. Halle una base ortonormal para las señales del apartado anterior. ¿Qué coordenadas, en función de E , tendría en dicha base la señal que corresponde a la palabra “011”?
4. Calcule el ancho de banda de la señal transmitida, señalando los criterios y reglas que

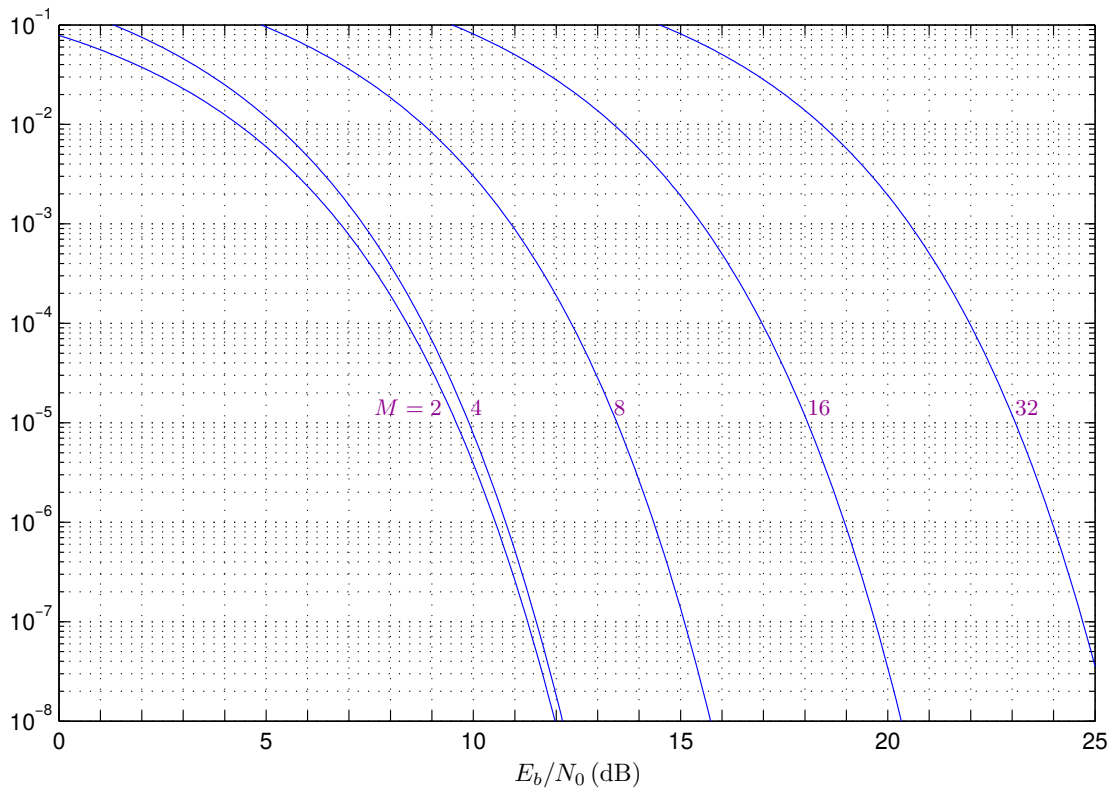


Figura 9.13: Probabilidad de símbolo erróneo de la modulación empleada.

utilice para ello. Dibuje el espectro de forma aproximada, indicando las frecuencias más significativas.

5. Calcule (en recepción) los valores de la energía por bit, E_b , y la amplitud de la señal (con sus unidades correspondientes).
6. Suponiendo símbolos equiprobables, delimite gráficamente las regiones de decisión óptimas en la constelación.
7. Calcule, en función de E , la distancia mínima entre símbolos de la constelación. Manteniendo el número de símbolos y la distancia mínima, proponga una constelación APK que tenga menor energía media. ¿Cuántos dB de diferencia hay entre las energías medias de ambas constelaciones?

Problema 9.10 (Febrero de 1997)

Se dispone de un sistema digital de guiado por control remoto en la banda de VHF, capaz de transmitir simultáneamente dos canales de información binaria. El transmisor responde al modelo de bloques de la figura 9.14.

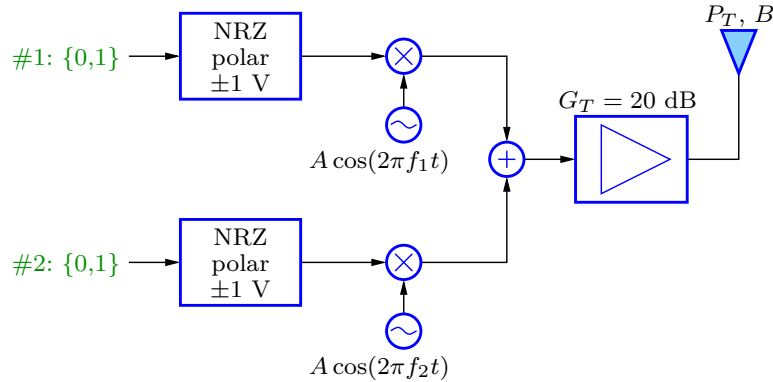


Figura 9.14: Diagrama de bloques del transmisor digital.

El régimen binario de los canales #1 y #2 es el mismo e igual a 64 kbits/s. La amplitud de los osciladores locales es $A = 10$ mV, y sus frecuencias difieren en $f_2 - f_1 = 32$ Hz.

1. Compruebe que el espacio de señales generado por el transmisor puede desarrollarse a partir de una base ortonormal. Indique la dimensión de dicho espacio.
2. Calcule la potencia media, P_T , de la señal transmitida. Calcule su ancho de banda, B .

El receptor empleado en el sistema sigue el diagrama de bloques de la figura 9.15.

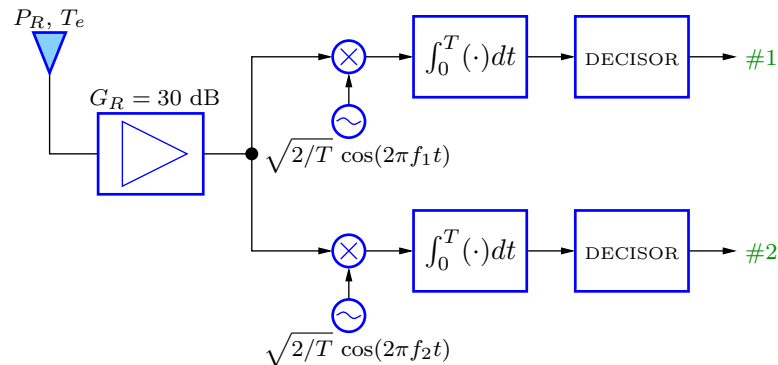


Figura 9.15: Diagrama de bloques del receptor digital. En las portadoras recuperadas, T es el tiempo de símbolo del sistema.

3. Calcule, analíticamente, la probabilidad de error de bit de cada canal, en función de

la potencia media de señal recibida, P_R , y de la temperatura equivalente de ruido (total) a la entrada del receptor, T_e .

4. Para la banda de trabajo considerada, la atenuación por propagación de la señal es:

$$A_t(\text{dB}) = 80 + 20 \log[d(\text{km})]$$

siendo $d(\text{km})$ la distancia que separa el receptor del transmisor, expresada en kilómetros. Considere que el radio de acción del sistema de control remoto se define como la zona donde la probabilidad de error de bit, de cualquiera de los canales, está por debajo de 10^{-6} . La temperatura equivalente de ruido a la entrada del receptor es $T_e = 40 \cdot 10^6$ K. Teniendo en cuenta todo ello, encuentre el radio de acción del sistema bajo estudio. (Puede usar las tablas de la función erfc de los apéndices.)

Problema 9.11 (Junio de 1997)

En un sistema de comunicaciones se transmite a una velocidad $R_b = 1000$ kbps, mediante una modulación 4-ASK. De las señales $\{s_i(t)\}$ permitidas, se conocen dos, que son (en voltios):

$$\begin{aligned} s_2(t) &= -\cos(\omega_c t + \pi/3) ; & 0 \leq t \leq T \\ s_4(t) &= 3 \cos(\omega_c t + \pi/3) ; & 0 \leq t \leq T \end{aligned}$$

1. Si la señal moduladora viaja por un canal con transferencia en coseno alzado ($\alpha = 0,4$), ¿cuál es el mínimo ancho de banda (del canal banda base) que evitaría la interferencia intersimbólica? En esas condiciones, ¿qué ancho de banda ocuparía la señal 4-ASK?
2. Encuentre una base ortonormal $\{\Psi_i(t)\}$ para las señales $\{s_i(t)\}$. Calcule el valor de las coordenadas de cada señal $s_i(t)$ en función de $\{\Psi_i(t)\}$. Dibuje la constelación de las señales $\{s_i(t)\}$, y asigne a los símbolos una codificación de Gray tal que la palabra correspondiente a $s_2(t)$ sea "11". Proponga una constelación de 4 símbolos con menor energía media por símbolo, manteniendo la distancia mínima entre símbolos.
3. Calcule la probabilidad de bit erróneo, teniendo en cuenta que la señal sufre una atenuación en el medio de 60 dB, y que el ruido se modela mediante $N_0 = 6,45 \cdot 10^{-20}$ W/Hz. Puede consultar las tablas de la función erfc de los apéndices.
4. Manteniendo la distancia mínima entre símbolos, y sin variar el ruido, se sustituye la modulación 4-ASK por una QPSK. Acote la nueva probabilidad de bit erróneo. Compárela con la anterior y comente el resultado. Si se introduce un desfase fijo, $\theta_0 = 45^\circ$, en la constelación QPSK, ¿aumenta o disminuye la probabilidad de bit erróneo?, ¿por qué?

Problema 9.12 (Septiembre de 1997)

En un sistema digital, el transmisor modula en 2-FSK con las siguientes características:

- Frecuencia portadora: $f_c = 500$ MHz.
- Separación de frecuencia entre símbolos contiguos: $\Delta f = 50$ kHz.
- Potencia transmitida: $P_T = 4,5$ W.
- Velocidad de transmisión: $R_s = 50$ kbaudios.

1. ¿Cuál es la velocidad de transmisión más alta (en bits/s y en baudios) que puede usarse en el sistema? ¿Por qué?
2. Dibuje la constelación, indicando una asignación de símbolos y el valor de la distancia entre símbolos contiguos.
3. Si se aumenta Δf al triple de su valor, ¿qué cambios se producen en la constelación? ¿Por qué?
4. Calcule el ancho de banda que ocupa la señal modulada para la separación Δf del enunciado. Dibuje aproximadamente su espectro, indicando las frecuencias más notables.

En un momento determinado, se transmite la secuencia “011010000101”.

5. Dibuje la señal que entrega el transmisor para los tres primeros símbolos, indicando los valores significativos de amplitud, frecuencia y tiempo. (Tome referencia coseno y fase inicial nula. Siga la asignación de símbolos que hizo en un apartado anterior.)
6. Escriba la expresión analítica de la señal correspondiente al tercer símbolo.

En la figura 9.16 se observa el receptor del sistema digital. s_1 es la señal que se transmite cuando la información es “1”, y s_2 se corresponde con “0”.

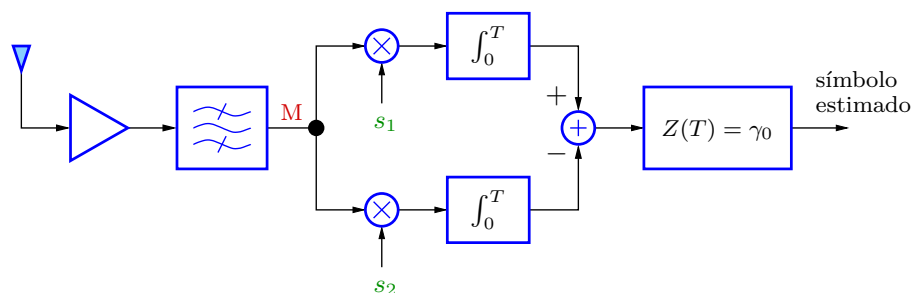


Figura 9.16: Diagrama de bloques del receptor.

Se han recibido dos señales, cuya expresión en el punto M es:

$$y_A(t) = \cos(2\pi \cdot 500,025 \cdot 10^6 t)$$

$$y_B(t) = 2 \cos(2\pi \cdot 500 \cdot 10^6 t)$$

7. Calcule el valor de $Z(T)$ que se obtiene para $y_A(t)$ y para $y_B(t)$. ¿Qué decisiones tomará el detector en ambos casos? (Nota: considere, ya que las 2 señales recibidas tienen igual fase, que la FSK es coherente.)

Problema 9.13 (Junio de 1998)

Se quiere diseñar un sistema de comunicación paso banda para poder ofertar un servicio de radiodifusión digital (DAB) a nivel nacional. El ancho de banda disponible es de 1,5 MHz, y el número de cadenas radiofónicas que se desea transmitir simultáneamente es de seis, siendo cada una de ellas estéreo (dos canales de audio: izquierdo y derecho). La información digital procedente de cada cadena radiofónica se modula en QPSK, multiplexándose después las seis en frecuencia.

1. Calcule el máximo régimen binario que podría conseguirse en cualquiera de los canales de audio (izquierdo o derecho). A partir del resultado anterior, calcule el régimen binario total del sistema de radiodifusión. (Indique claramente las premisas que haya considerado oportunas.)
2. Manteniendo las premisas consideradas en el apartado anterior, proponga el diagrama de bloques de un posible receptor que permita recuperar la información digital de cada cadena radiofónica por separado.
3. Obtenga la relación (E_b/N_0) necesaria a la entrada del receptor para que la probabilidad de error de bit por canal de audio no sea peor que 10^{-9} . Puede consultar las tablas de la función erfc de los apéndices.

Problema 9.14 (Noviembre de 1998)

Una empresa de mensajería decide implantar un sistema de comunicación para contactar con sus repartidores. Por motivos de mercado y económicos se decide que el sistema sea digital, aunque se duda entre que la señal a transmitir sea BPSK o ASK (OOK). Además, queda por determinar la forma de multiplexar los dos canales necesarios, de 25 kbps, $b_1[n]$ y $b_2[n]$.

Los bits que se envían por cada canal a partir del instante $t = 0$ son: $b_1[n] = [100110]$ y $b_2[n] = [101101]$.

Empiece considerando que la multiplexación se realiza en el tiempo, bit a bit. La frecuencia de portadora es 100 kHz (referencia coseno).

1. Dibuje la señal transmitida en el intervalo temporal $(0, t_0)$, donde $t_0 = 100 \mu\text{s}$, cuando la modulación empleada es ASK (OOK).
2. Dibuje la señal transmitida en el mismo intervalo temporal del apartado anterior, cuando la modulación empleada es BPSK.
3. ¿Cuál es el mínimo ancho de banda que permite la eliminación de interferencia entre símbolos de la señal BPSK? ¿Y el máximo ancho de banda?

Considere ahora que la multiplexación se realiza en frecuencia, modulando cada canal en BPSK.

4. Una vez filtradas las señales para su posterior transmisión (suponga filtros ideales), ¿cuál es la mínima separación de frecuencia entre las portadoras que permite, a la vez, eliminar la interferencia entre símbolos y evitar el solapamiento entre los canales?
5. Dibuje el espectro de las señales transmitidas en el apartado anterior. La frecuencia central de todo el sistema es 100 kHz.
6. Si la modulación a emplear es BPSK, ¿cuál debe ser la relación entre las potencias de las señales recibidas en el caso de multiplexar en el tiempo, y en el caso de multiplexar en frecuencia, para que la probabilidad de error sea la misma en ambas situaciones?
7. Calcule cómo varía la probabilidad de error de una modulación BPSK en función del error cometido al estimar la fase de la portadora en el receptor.

Problema 9.15 (Junio de 1999)

Un sistema de comunicación transmite las señales descritas en la figura 9.17, donde también se especifica la codificación empleada. Las señales ortonormales de la base son:

$$\Psi_1(t) = \begin{cases} \sqrt{\frac{2}{T}} \cos\left(\frac{4\pi t}{T}\right) ; & 0 \leq t < T \\ 0 ; & \text{resto} \end{cases}$$

$$\Psi_2(t) = \begin{cases} -\sqrt{\frac{2}{T}} \sin\left(\frac{4\pi t}{T}\right) ; & 0 \leq t < T \\ 0 ; & \text{resto} \end{cases}$$

1. Teniendo en cuenta que el régimen binario del sistema es 2052 kb/s, calcule el valor del período de símbolo, T .

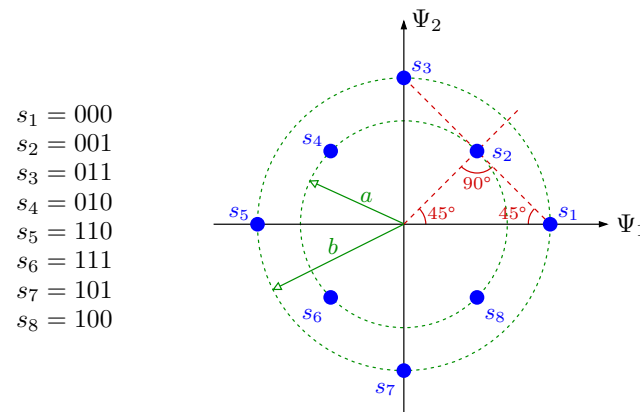


Figura 9.17: Constelación transmitida y codificación.

2. Considere que la probabilidad de transmitir cualquier señal es la misma, la potencia media transmitida es 10 W y la relación entre los coeficientes a y b (radios de las circunferencias) es $b = a\sqrt{2}$. Encuentre el valor de dichos coeficientes.
3. Dibuje las regiones de decisión sobre la constelación de la figura auxiliar 9.18. Tenga en cuenta que los símbolos s_1 , s_2 y s_3 están alineados.

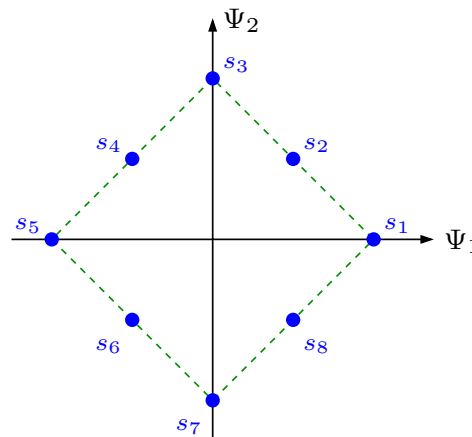


Figura 9.18: Figura auxiliar.

4. Si medio atenúa 130 dB, calcule la máxima densidad espectral unilateral de ruido a la entrada para asegurar que la probabilidad de símbolo erróneo es inferior a 10^{-5} . Puede consultar las tablas de la función erfc de los apéndices.
5. Indique si esta constelación es óptima. Razone la respuesta brevemente.

Problema 9.16 (Septiembre de 1999)

Una señal modulada digitalmente se transmite a una velocidad de 64 kbps a través de un canal de comunicación con ancho de banda infinito, recibándose a la entrada del detector la constelación mostrada en la figura 9.19, donde los símbolos son equiprobables y $k = 5 \cdot 10^{-8}$ V.

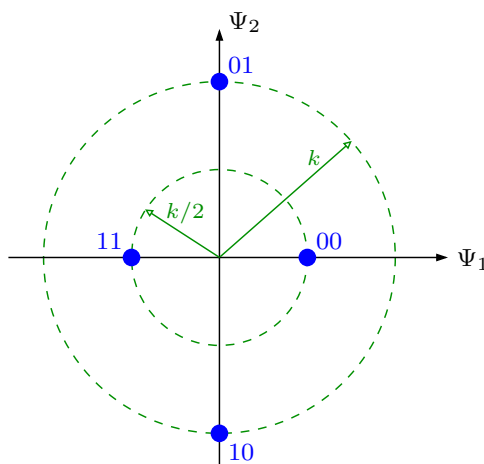


Figura 9.19: Constelación recibida, en ejes ortonormales.

1. ¿De qué tipo de modulación se trata? Calcule la energía media por bit de la señal que llega a la entrada del detector.
2. Calcule la potencia media y la tensión de pico de dicha señal.
3. Obtenga el ancho de banda y la eficiencia espectral de la modulación.
4. Dibuje las regiones de decisión óptimas de la constelación.
5. Si la densidad espectral de ruido a la entrada del detector es $N_0 = 10^{-16}$ W/Hz, obtenga un límite superior de la probabilidad de bit erróneo. Puede consultar las tablas de la función erfc de los apéndices.

Problema 9.17 (Junio de 2000)

La Unión Europea de Radiotelevisión nos proporciona la normativa EN 300 429, donde se recogen las especificaciones actuales sobre televisión digital por cable. En la figura 9.20 se describe el diagrama de bloques del transmisor.

Las imágenes y el sonido procedentes de uno o varios canales de televisión son codificados en MPEG-2. Estos datos entran al interfaz físico de la figura 9.20, que introduce un byte (8 bits) de sincronismo cada 187 bytes de datos, generando la trama.

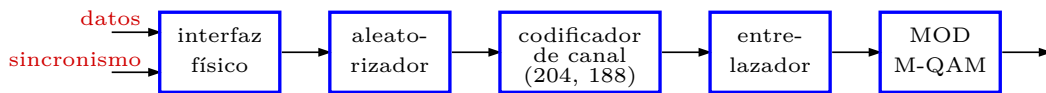


Figura 9.20: Diagrama de bloques del transmisor.

A continuación, las tramas pasan por un aleatorizador que, manteniendo las palabras de sincronismo, consigue una aleatoriedad alta de los datos. El régimen binario a la salida de este bloque es el mismo que a su entrada.

A cada grupo de 188 bytes (trama) que entra al codificador de canal se le añaden 16 bytes de redundancia, obteniendo a la salida tramas de 204 bytes.

El entrelazador *baraja* los bytes de salida del codificador de canal para que las posibles rachas de error se distribuyan a lo largo de toda la imagen.

El último bloque es un modulador M-QAM. Según la norma, los posibles valores que puede tomar M son: 16, 32, 64, 128 o 256. Adicionalmente, la norma EN 300 429 especifica que con el fin de poder intercambiar distintos servicios sobre cable, el ancho de banda de cada canal queda fijado en 8 MHz, y que la interferencia intersímbolo es anulada al utilizar un canal coseno alzado con factor de redondeo (α) de 0,15.

1. Calcule, para cada modulación que admite la norma EN 300 429, cuál es el máximo régimen binario de *datos* que se puede transmitir por un canal.
2. Si el régimen binario de un canal de TV digital (vídeo y sonido estéreo) es de 8 Mb/s, ¿cuántos canales de televisión se pueden transmitir en función del tipo de modulación empleado?

Finalmente, se utiliza la modulación 64-QAM para realizar la transmisión. La constelación, con su codificación, se observa en la figura 9.21. El medio de transmisión empleado es un cable coaxial cuya atenuación es de 20 dB/km; la frecuencia central del canal es 800 MHz, y la potencia entregada por el modulador al medio es de 10 dBm.

3. Si la información que se debe transmitir es “110011001010100000100111”, dibuje la señal a la salida del modulador. Dibuje únicamente dos ciclos de portadora por cada período de símbolo, indicando sobre el dibujo la fase inicial de la señal y su amplitud.
4. Suponiendo que el receptor y el transmisor son ideales, ¿cuál es la máxima longitud de cable que se puede poner para que la probabilidad de bit erróneo sea inferior a 10^{-4} ? Puede consultar las tablas de la función erfc de los apéndices.
5. Se considera que la transmisión es *quasi-libre* de error cuando la probabilidad de bit erróneo a la entrada del decodificador MPEG-2 es inferior a 10^{-9} . Según la norma, esto se obtiene cuando la probabilidad de bit erróneo a la salida el detector es igual o inferior a 10^{-4} . ¿Cuál es el bloque (de la figura 9.20) encargado de reducir la probabilidad de bit erróneo? Razone la respuesta.

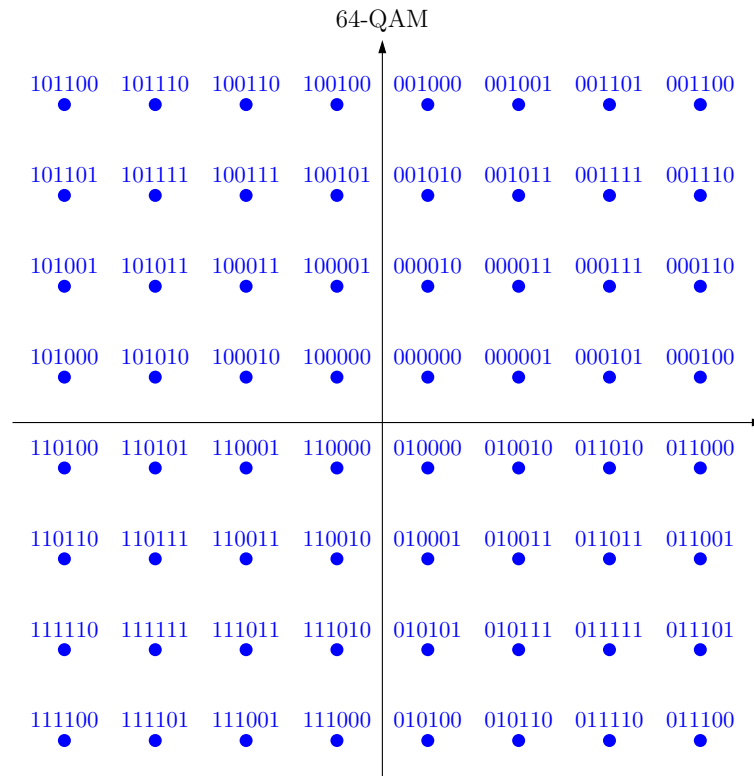


Figura 9.21: Constelación 64-QAM.

Problema 9.18 (Septiembre de 2000)

Para transmitir N canales telefónicos se emplea un sistema tipo MIC (PCM). La trama se complementa con redundancia contra errores, doblando el régimen binario. Como resultado de todo ello, el modulador recibe una velocidad $R_b = 9$ Mb/s, y genera las siguientes señales (en voltios, para t en segundos):

$$s_1(t) = 4 \cos(5718 \cdot 10^6 \cdot t)$$

$$s_2(t) = 4 \cos(5718 \cdot 10^6 \cdot t + \pi/2)$$

$$s_3(t) = 4 \cos(5718 \cdot 10^6 \cdot t + \pi)$$

$$s_4(t) = 4 \cos(5718 \cdot 10^6 \cdot t + 3\pi/2)$$

Tras recorrer 2 km, en los que se atenúa $A = 99$ dB, la señal modulada alcanza el receptor, donde se enfrenta a un ruido blanco gaussiano aditivo cuya densidad espectral bilateral de ruido es $N_0/2 = 5,5 \cdot 10^{-18}$ W/Hz.

1. Identifique, razonadamente, el tipo de modulación utilizado.
2. Calcule la frecuencia de portadora, f_c , la potencia media transmitida, P_{TX} (dBm), el régimen simbólico del modulador, R , y el ancho de banda que ocupa la señal modulada, B .

3. Proponga una base ortonormal, $\{\Psi_i(t)\}$, para las señales $\{s_i(t)\}$. Dibuje las señales $\{s_i(t)\}$ en función de las $\{\Psi_i(t)\}$, y calcule sus coordenadas.
4. Dibuje las fronteras de decisión en la constelación del apartado anterior. Si los símbolos s_2 y s_4 fueran más probables que s_1 y s_3 , argumente y dibuje los cambios cualitativos que sufrirían las fronteras de decisión.
5. Dibuje el diagrama de bloques de un demodulador I/Q adecuado para las señales transmitidas. Comente brevemente su funcionamiento.
6. Calcule la energía media por símbolo, E_s , en el receptor.
7. Calcule la probabilidad de bit erróneo (suponga que se utiliza una codificación de Gray).

Problema 9.19 (Junio de 2001)

Se pretende analizar el sistema de comunicaciones 4-FSK a 2 Mbps de la figura 9.22.

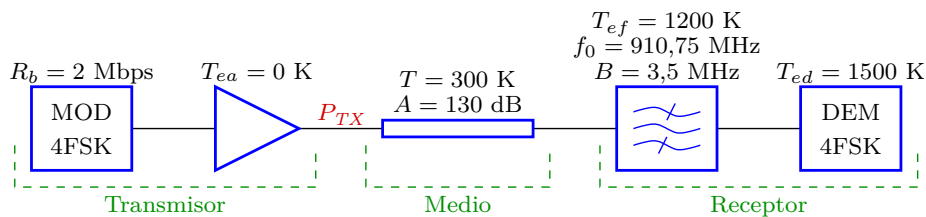


Figura 9.22: Diagrama de bloques del sistema 4-FSK.

El bloque de salida del transmisor es un amplificador de potencia, con un nivel de ruido despreciable y potencia media de salida, P_{TX} , a determinar.

El medio de transmisión es un cable coaxial de 130 dB de atenuación, que se encuentra a una temperatura física de 300 K.

El receptor tiene en su entrada un filtro paso banda centrado en 910,75 MHz, con ancho de banda de 3,5 MHz. La atenuación en la banda de paso es despreciable, y su temperatura equivalente de ruido es de 1200 K. El detector 4-FSK empleado es óptimo, y tiene una temperatura equivalente de ruido igual a 1500 K.

1. Determine el tipo de osciladores (coherentes en fase o de fase independiente) que debe utilizarse en el modulador 4-FSK para que el sistema funcione correctamente. Asimismo, y a partir de los datos del enunciado, calcule la frecuencia exacta de oscilación de dichos osciladores.
2. Explique, cualitativamente, la forma de la constelación de la modulación empleada, e indique, para cada uno de los símbolos, cuántos símbolos adyacentes hay.

3. Calcule la temperatura equivalente de ruido de todo el sistema a la entrada del detector 4-FSK, y la potencia media de ruido en el mismo lugar.
4. Calcule la potencia media que debe entregar el amplificador del transmisor, P_{TX} (dBm), para que la probabilidad de error de bit del detector 4-FSK sea mejor que $5 \cdot 10^{-7}$. (Consulte en las gráficas de calidad de los apéndices.)
5. Obtenga la eficiencia espectral del sistema. Proponga una modulación de cuatro símbolos mejor en este aspecto.

Problema 9.20 (Septiembre de 2001)

Para establecer una comunicación de datos por cable se emplea el sistema de la figura 9.23. El cable utilizado es coaxial, presenta una atenuación $\alpha = 5$ dB/100m a 100 MHz, y se encuentra a temperatura ambiente $T_0 = 300$ K. Los filtros son ideales, con un ancho de banda $B = 10$ MHz. Cada amplificador tiene una figura de ruido $F_a = 7$ dB y la ganancia necesaria para compensar las pérdidas de un tramo de cable $L = 1$ km. La información se transmite modulada en QPSK, mediante una portadora de 100 MHz. La constelación que se transmite (punto A) aparece en la figura 9.24, con ejes ortonormales.

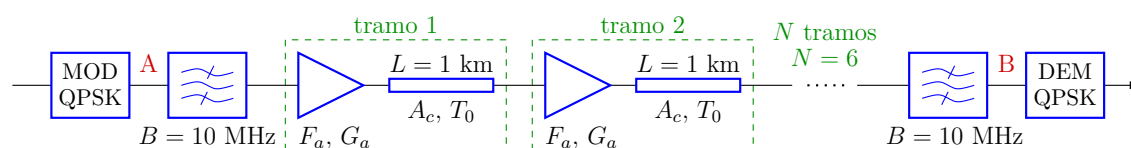


Figura 9.23: Diagrama de bloques del sistema empleado.

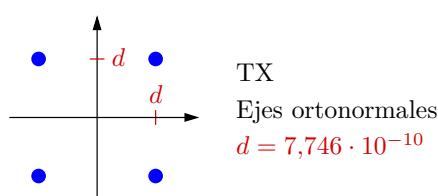


Figura 9.24: Constelación QPSK transmitida en ejes ortonormales.

1. ¿Cuál debe ser la frecuencia central de los filtros? ¿A qué velocidad, en b/s y en baudios, se puede transmitir por el sistema? ¿Por qué?
2. Calcule la temperatura equivalente de ruido T_e en el punto A del conjunto de N amplificadores y cables. Deje el resultado en función de T_0 , f_a , a_c y N . ¿Cuánto vale la densidad espectral de ruido, N_0 (Julios), a la entrada del demodulador (punto B)?
3. Calcule la energía por bit, E_b , en el receptor (punto B).
4. Calcule la probabilidad de bit erróneo, P_b . Comente el resultado. (Puede consultar las tablas de la función erfc de los apéndices.)

Problema 9.21 (Septiembre de 2001)

Para transmitir información de audio se emplea el sistema de la figura 9.25.

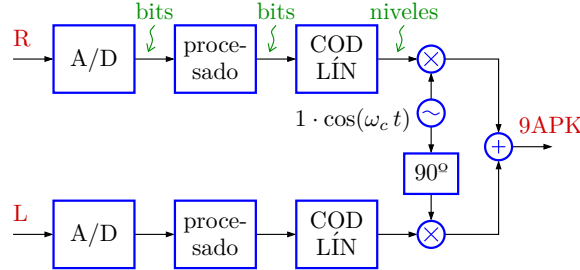


Figura 9.25: Modulador de audio estéreo.

Las informaciones originales son los canales L y R de audio analógico estéreo. El canal R (al L le ocurre exactamente igual) ocupa de 20 a 20000 Hz; en la conversión analógico/digital se muestra a 1,2 veces la frecuencia de Nyquist, y se codifica cada muestra con $n = 16$ bits. La información binaria de R (a la de L le ocurre igual) se procesa digitalmente aumentando el régimen binario en un factor de $4/3$. La información binaria resultante de R (a L le ocurre igual) se convierte en 3 amplitudes, tal y como se observa en la figura 9.26, en un codificador de línea. El procesamiento digital ha eliminado las parejas de 2 ceros seguidos, y por lo tanto no se requiere ninguna forma de señal para codificarlas. Las amplitudes de los codificadores de línea modulan a sendos tonos en cuadratura, que posteriormente se multiplexan, dando lugar a una modulación 9-APK. El medio por el que se transmiten las señales generadas atenúa $A_t = 80$ dB, y a la entrada del receptor la densidad espectral de ruido vale $N_0 = 1,5625 \cdot 10^{-14}$ W/Hz.

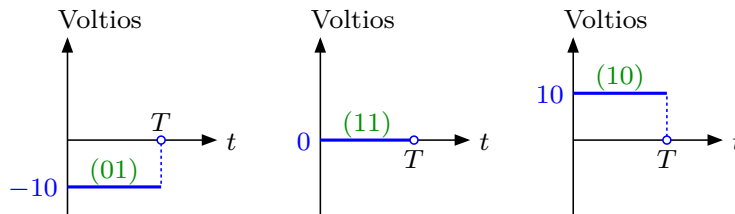


Figura 9.26: Formas de señal del codificador de línea.

1. Escriba la expresión analítica de las señales $\{s_i(t)\}$ a la salida del modulador de la figura 9.25.
2. Encuentre una base ortonormal $\{\Psi_i(t)\}$ para las señales $\{s_i(t)\}$. Calcule las coordenadas de dichas señales y dibújelas en los ejes $\{\Psi_i(t)\}$. Deje los resultados en función de T .
3. Calcule el régimen binario y el régimen simbólico a la salida del modulador.
4. Calcule la probabilidad de bit erróneo en el receptor. Puede consultar las tablas de la función erfc de los apéndices.

5. Suponga que el medio de transmisión es un filtro paso banda con $B = 10$ MHz, y que la calidad mínima requerida es $P_b = 2 \cdot 10^{-8}$. Para incrementar el régimen de transmisión se cambia la 9-APK por una FSK con M grande. Justifique que la elección es acertada.

Problema 9.22 (Junio de 2002)

En una comunicación digital, a $R_b = 60$ Mb/s, se transmite la constelación representada en la figura 9.27.

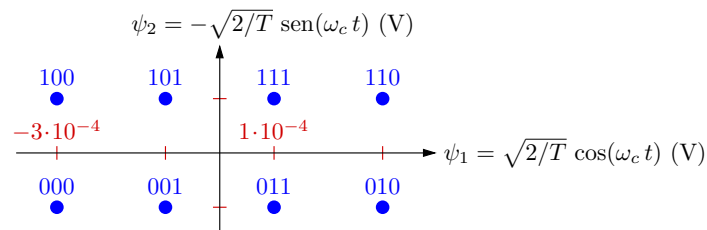


Figura 9.27: Constelación en el punto A. T es el tiempo de símbolo.

El sistema de comunicación completo se observa en la figura 9.28. El medio se modela como un filtro en coseno alzado ($\alpha = 0,5$) que atenúa 60 dB en la banda de paso. A la entrada del receptor (punto B), se mide una densidad espectral bilateral de ruido $N_0/2 = 5,625 \cdot 10^{-16}$ W/Hz.



Figura 9.28: Sistema de comunicación.

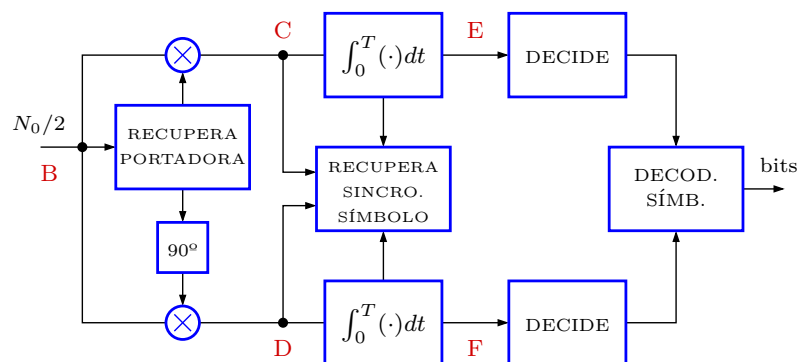


Figura 9.29: Esquema del receptor.

Nota 1: para los apartados 2 y 3 considere que se ha transmitido la secuencia de bits "010".

Nota 2: las portadoras recuperadas son ψ_1 (en I) y ψ_2 (en Q).

Nota 3: utilice las gráficas de los apéndices para los cálculos de calidad.

1. Calcule el ancho de banda que ha de tener el medio para que la transmisión se realice sin interferencia intersimbólica.
2. Escriba la forma analítica de la señal recibida en el punto B. Indique los valores de la amplitud y la fase. (Desprecie el retardo del medio.)
3. Calcule las señales recibidas en los puntos E y F. Comente cualitativamente qué señales hay en los puntos C y D.
4. Calcule la probabilidad de bit erróneo, P_b .

Problema 9.23 (Septiembre de 2002)

Se transmiten dos señales digitalizadas, con velocidad 4 Mbps cada una, modulando en cuadratura con sendas portadoras de 450 MHz, de manera que, en condiciones ideales, la constelación en recepción es la de la figura 9.30. El régimen binario total es de 8 Mbps. La densidad espectral unilateral de ruido a la entrada del receptor vale $N_0 = 0,2 \cdot 10^{-17}$ W/Hz; y al enviar una secuencia de $40 \cdot 10^6$ bits, 200 son recibidos erróneamente. En la figura 9.31 se observa la calidad de la modulación en función de relación (E_b/N_0) , con el número de símbolos como parámetro.

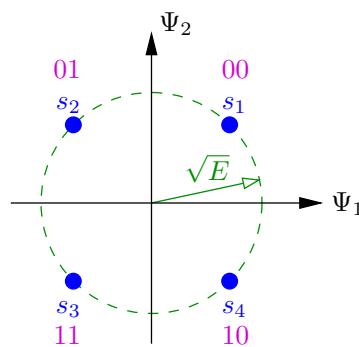


Figura 9.30: Constelación en recepción.

1. ¿Qué tipo de señales moduladas intervienen en el eje I y en el Q? ¿Se trata de una modulación lineal o no lineal? Dibuje la forma del espectro indicando los valores más importantes.
2. Dibuje el modulador necesario para enviar la señal, indicando el régimen simbólico en cada punto.
3. Dibuje la señal correspondiente a la secuencia de bits “11101101”, representando dos ciclos de portadora en cada símbolo. Indique las amplitudes (en función de E) y las fases.

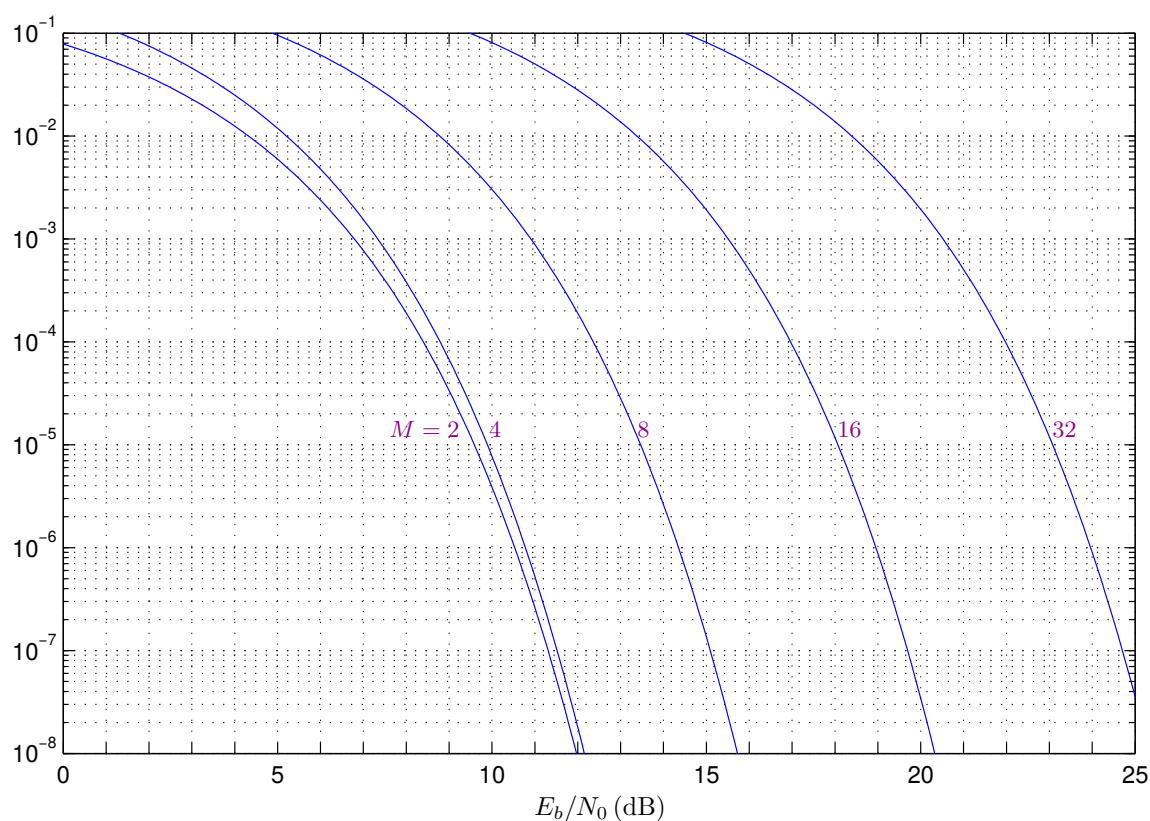


Figura 9.31: Calidad (P_s) de la modulación utilizada en función de E_b/N_0 .

4. ¿Cuanto vale la energía por bit E_b en función de E ?
5. ¿Cuál es la distancia mínima entre símbolos en función de E (ver figura 9.30)?
6. Indique gráficamente, en la constelación, las regiones óptimas de decisión. Suponga símbolos equiprobables.
7. Calcule la potencia que se recibe cuando la calidad es $BER = 5 \cdot 10^{-8}$.

Problema 9.24 (Junio de 2003)

Se transmite una información digital, cuyo régimen binario es $R_b = 2$ Mbps, a través de un medio, modulando según la constelación de la figura 9.32, a una frecuencia de 20 GHz. Esta señal es enviada a través de un medio con una atenuación $A_t = 20$ dB. En la entrada del receptor hay una densidad espectral bilateral de ruido $N_0/2 = 62,65 \cdot 10^{-15}$ W/Hz.

1. Calcule el número de períodos de portadora que hay en cada período de símbolo.
2. Indique la expresión en el dominio del tiempo, a la entrada del receptor, para las secuencias de bits: a) “1111”; b) “0100”.

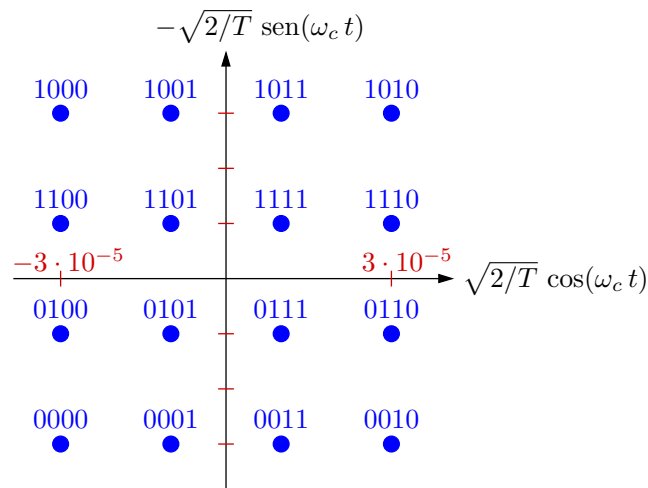


Figura 9.32: Constelación transmitida. La codificación es de Gray.

3. Calcule la energía media por símbolo en el receptor.
4. Calcule la probabilidad de bit erróneo por el método gráfico. (Utilice las curvas de los apéndices.)
5. ¿De cuánto es la mejora, en E_b/N_0 , con respecto a 16-PSK?

Problema 9.25 (Septiembre de 2003)

En un sistema digital, el transmisor modula en 2-FSK. Las señales que envía son (en voltios, con el tiempo, t , en segundos):

$$s_1(t) = 3 \cdot \cos(2\pi \cdot 499,975 \cdot 10^6 \cdot t)$$

$$s_2(t) = 3 \cdot \cos(2\pi \cdot 500,025 \cdot 10^6 \cdot t)$$

$s_1(t)$ se envía cuando la información es “1”, y $s_2(t)$ cuando la información es “0”. Se transmite a la velocidad más alta compatible con la ortogonalidad entre símbolos.

En el diagrama de bloques de la figura 9.33 se observa el receptor del sistema digital. El amplificador tiene una ganancia $g_A = 900$ veces de potencia. Las portadoras recuperadas son:

$$r_1(t) = 1 \cdot \cos(2\pi \cdot 499,975 \cdot 10^6 \cdot t)$$

$$r_2(t) = 1 \cdot \cos(2\pi \cdot 500,025 \cdot 10^6 \cdot t)$$

En el punto M se han recibido las siguientes señales:

- $y_A(t)$: un coseno de amplitud 1 voltio, con desfase nulo y frecuencia 500,025 MHz.

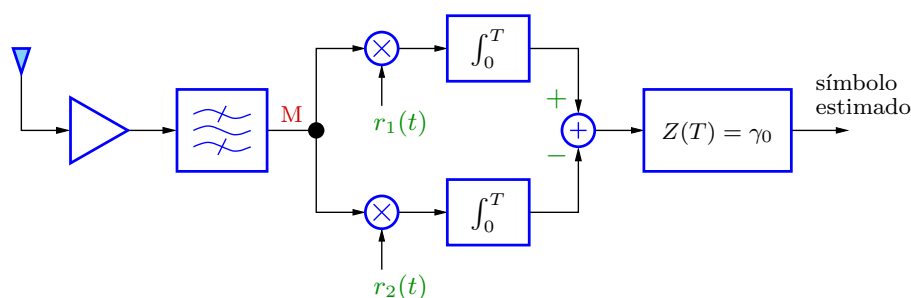


Figura 9.33: Diagrama de bloques del receptor.

- $y_B(t)$: un coseno de amplitud 1 voltio, con desfase nulo y frecuencia 500,075 MHz.
1. Calcule la velocidad de transmisión del sistema (en bits/s y en baudios).
 2. Calcule el ancho de banda de la transmisión. Indique claramente los criterios que utiliza.
 3. Si se aumenta Δf al doble de su valor, ¿qué ganamos y qué perdemos?
 4. Calcule la atenuación del medio, $A_t(\text{dB})$.
 5. Calcule el valor de $Z(T)$ que se obtendría para las señales $y_A(t)$ y $y_B(t)$. ¿Qué decisiones tomaría el detector en ambos casos?

Problema 9.26 (Junio de 2004)

En la figura 9.34 se observa el diagrama de bloques de un transmisor. $x_R(t)$ y $x_L(t)$ — punto A— son los canales derecho e izquierdo, respectivamente, de una grabación musical analógica de alta fidelidad. El valor de pico de ambas señales es de 1 voltio, y su factor de cresta es aproximadamente raíz de tres ($K_c = \sqrt{3}$). Los filtros paso bajo de 15 kHz —entre A y B— son ideales. La frecuencia con la que se muestrea es ligeramente superior a la de Nyquist: $f_m = (16/15) f_{Nyq}$. Los cuantificadores, Q , son uniformes, de 16 bits, y trabajan a fondo de escala. Los codificadores de la conversión A/D —entre D y E— siguen la norma binaria simétrica (1 con muestras positivas). Cada codificador de línea (COD. LÍN.) entrega pulsos cuadrados de cuatro amplitudes diferentes: -6 , -2 , 2 y 6 voltios. La asignación de símbolos (en los dos canales) es: $-6 \rightarrow "00"$; $-2 \rightarrow "01"$; $2 \rightarrow "11"$; $6 \rightarrow "10"$. Los filtros entre F y G son en coseno alzado, con factor de redondeo $\alpha = 0,3$. El oscilador local (OL) genera un coseno de amplitud 2 voltios y frecuencia f_c : $c(t) = 2 \cos(\omega_c t)$.

1. Calcule las velocidades de transmisión (régimen binario y régimen simbólico) en los puntos F e I del transmisor.
2. Dibuje la constelación obtenida en el punto I, indicando claramente los ejes y las coordenadas. ¿Qué modulación es?

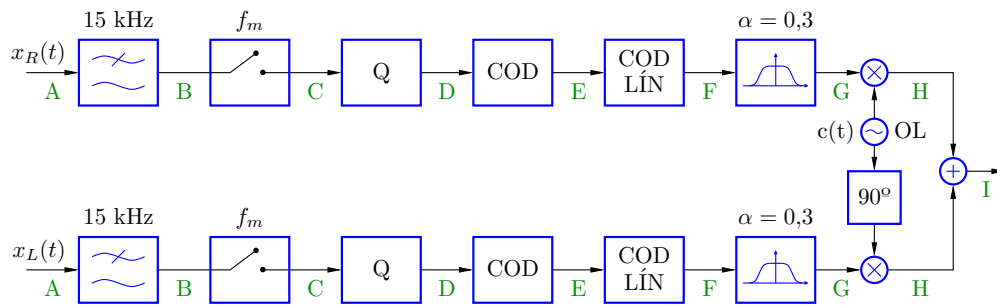


Figura 9.34: Diagrama del bloques del transmisor.

3. Calcule la energía por bit, $E_b(\text{J})$, en el punto I.
4. En el instante $t = 0$ se obtienen las muestras —punto C— $x_R = 0,1$ y $x_L = -0,1$ (en voltios). Dibuje la señal resultante en F —para cada canal—, y determine qué símbolos (y en qué orden) se envían de la constelación final —punto I—. (Nota: indique claramente tiempos y amplitudes en su dibujo.)
5. Calcule el ancho de banda de los filtros en coseno alzado.
6. Calcule, teniendo en cuenta el resultado del apartado anterior, el ancho de banda de la señal modulada —punto I—.
7. ¿Cuál es la máxima calidad, (S/N) dB, que puede conseguirse con este transmisor?

Problema 9.27 (Septiembre de 2004)

Se desea transmitir varias señales musicales por un sistema digital que utiliza modulación DBPSK con detección *no* coherente. Las características del sistema se detallan a continuación.

Características del sistema:

- Modulador-Transmisor:
 - Señal moduladora: MDT de 128 canales musicales, de ancho de banda 20 kHz cada uno, y digitalizados con un conversor A/D de 20 bits a una frecuencia de muestreo de 48 kHz.
 - Frecuencia de la portadora: 8 GHz.
 - Potencia de portadora: 200 W.
 - Filtrado en coseno alzado: $\alpha = 0,25$.
- Canal:
 - Sistema lineal e invariante, aditivo de ruido blanco gaussiano.
 - Atenuación en dB: $54 + 20 \log_{10}[f(\text{MHz})]$.
- Receptor-Demodulador:

- Temperatura de ruido a la entrada del receptor: 200 K.
- Figura de ruido del receptor: 1 dB.
- Filtro de radiofrecuencia de ancho de banda igual al de salida del transmisor.
- Notas:
 - Se supone adaptación de impedancias en todo el sistema.
 - Constante de Boltzmann: $1,38 \cdot 10^{-23}$ J/K.
 - Tasa de bits erróneos para DPSK con demodulación no coherente:

$$BER|_{DBPSK} \approx \frac{1}{2} \exp \left[\frac{-E_b}{N_0(1 + \alpha)} \right]$$

Determine la tasa de bits erróneos en recepción.

Problema 9.28 (Septiembre de 2004)

En unas pruebas de laboratorio, un modulador 8-PSK envía $R_b = 1$ Mb/s, por cierto medio, y se obtiene una calidad $BER = 10^{-3}$. Se establece una comparación del modulador lineal con uno no lineal, con las siguientes premisas:

- El ancho de banda disponible (en el medio, en el transmisor, en el receptor) es muy grande.
- Se mantiene el mismo medio.
- Por lo tanto, suponga que la densidad espectral de potencia de ruido total no cambia.
- Se mantiene el régimen binario.
- Se transmite la misma potencia media.
- Se exige la misma calidad final (igual BER que la 8-PSK).
- Se cambia el modulador 8-PSK por M-FSK.
- Puede consultar las gráficas de calidad de las modulaciones PSK y FSK en los apéndices.

¿Qué valores de M (en la M-FSK) cumplen los requisitos? Comente el resultado.

Problema 9.29 (Noviembre de 2004)

Diseñe un sistema de telecomunicación que cumpla las siguientes restricciones:

- Debe transmitir datos a $R_b = 139,264$ Mbps.
- Se filtra en coseno alzado, con factor de redondeo $\alpha = 0,3$.
- La potencia transmitida no puede ser mayor que 10 W.
- El canal radioeléctrico asignado a la transmisión está centrado en 2,4 GHz y ocupa $B = 50$ MHz.
- La atenuación del trayecto radioeléctrico se calcula según la fórmula:

$$A(\text{dB}) = 90 + 10 \log[d(\text{km})]$$

- El receptor se situará a la mayor distancia posible del transmisor.
- Se estima que todo el ruido del sistema es equivalente a una densidad espectral de potencia de ruido blanco (AWGN) $N_0 = 2,17 \cdot 10^{-19}$ W/Hz, situada a la entrada del receptor.
- Se requiere una calidad $BER = 10^{-7}$.
- Se adjunta la figura 9.35 con las gráficas de P_s en función de E_b/N_0 para diferentes modulaciones.

Debe especificar, justificando adecuadamente todas sus respuestas, la frecuencia de la portadora, la modulación escogida, el régimen simbólico, el ancho de banda ocupado, la potencia transmitida, la distancia que cubre el trayecto radioeléctrico, la atenuación del radiocanal, la relación E_b/N_0 a la entrada del receptor, y la calidad BER obtenida.

Problema 9.30 (Febrero de 2006)

Un circuito recuperador de portadora se puede modelar con el diagrama de bloques de la figura 9.36. El primer bloque es un *multiplicador de frecuencia*, y el segundo es un *divisor de frecuencia*. Como es lógico, el circuito debe eliminar la información o variación existente en la fase (M símbolos diferentes), para quedarse con la portadora.

1. Suponga que el circuito recibe la señal modulada en fase de M símbolos posibles:

$$A \cos\left(2\pi f_c t + \varphi + \frac{2\pi i}{M}\right); \quad \text{fase: } \theta_i = \varphi + 2\pi i/M; \quad i = 1, 2, \dots, M$$

Demuestre que el circuito recupera la portadora. (La portadora es: $\cos[2\pi f_c t + \varphi]$.)

2. Suponga que se recibe una QPSK con fases: $\theta_1 = \pi/4$, $\theta_2 = 3\pi/4$, $\theta_3 = 5\pi/4$, $\theta_4 = 7\pi/4$. Calcule la fase recuperada para cada una de las 4 informaciones; compare con la fase que realmente tiene la señal portadora (φ). Comente el resultado.

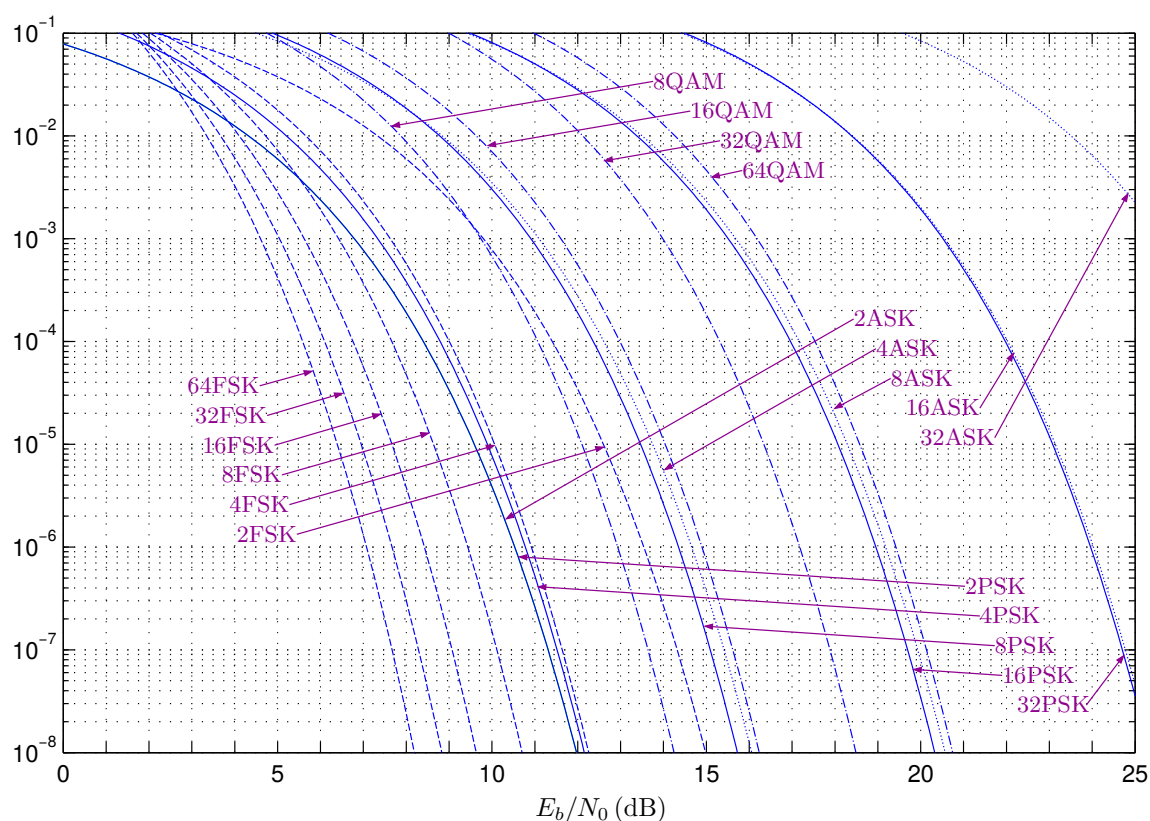


Figura 9.35: Probabilidad de error de símbolo (P_s) en función de E_b/N_0 (dB) para diferentes modulaciones.

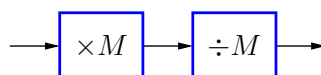


Figura 9.36: Circuito recuperador de portadora.

Problema 9.31 (Febrero de 2006)

Datos de un sistema de comunicaciones digitales via radio:

- Hay adaptación de impedancias en todo el sistema (50Ω).
- Modulador-transmisor:
 - Régimen binario: 125 Mbits/s.
 - Modulación: 16QAM.
 - Frecuencia de portadora: 7,5 GHz.
 - Potencia equivalente de pico: 160 mW.
 - Filtrado ideal de Nyquist ($\alpha = 0$).
- Canal:
 - Sistema lineal e invariante, aditivo de ruido blanco gaussiano.

- Atenuación: 93 dB.
- Receptor-demodulador:
 - Temperatura de ruido a la entrada del receptor: 300 K.
 - Figura de ruido del receptor: 3 dB.
 - Filtro de radiofrecuencia de ancho de banda igual al de salida del transmisor.
- Puede consultar las fórmulas de calidad de la 16QAM y los cuadros (tablas) o la gráfica de la función *erfc* en los apéndices.

1. Calcule la relación E_b/N_0 (dB) en el receptor.
2. Suponiendo codificación óptima (de Gray), calcule la BER.

Problema 9.32 (Junio de 2006)

Se desea transmitir una información de 155 Mbits/s por un canal de 40 MHz de ancho de banda. El filtrado es en coseno alzado, con factor de *roll-off* igual a 0,3.

Entre las modulaciones: 2FSK, 4FSK, QPSK, 16QAM y 64QAM, elija, razonando, la que ofrece mejor probabilidad de bit en nuestro sistema. Calcule el régimen simbólico y el ancho de banda ocupado de la modulación seleccionada.

Problema 9.33 (Septiembre de 2006)

En el sistema de telecomunicación de la figura 9.37, que funciona con una relación (E_b/N_0) muy alta y sin interferencia intersimbólica, se obtienen las medidas de la figura 9.38. En la figura 9.37 los cuatro filtros son iguales.

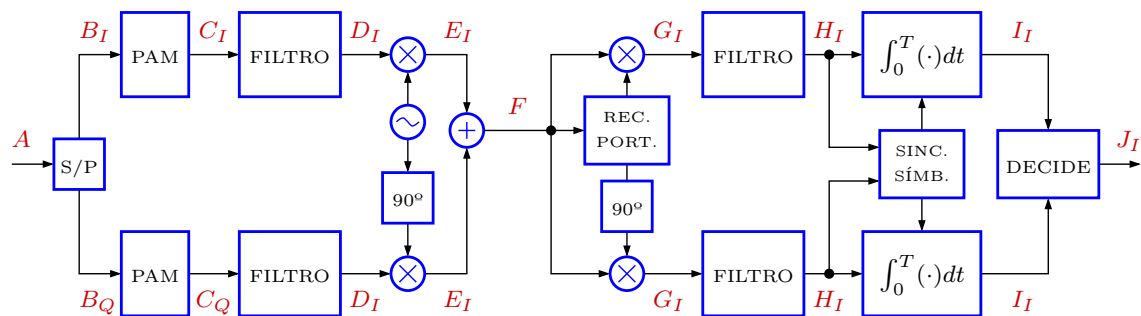


Figura 9.37: Diagrama de bloques del sistema medido. Los cuatro filtros son iguales.

1. Indique, *razonadamente*, en qué punto de la figura 9.37 se ha tomado cada medida. (Los puntos del diagrama se identifican con letras —ver figura 9.37—, mientras que

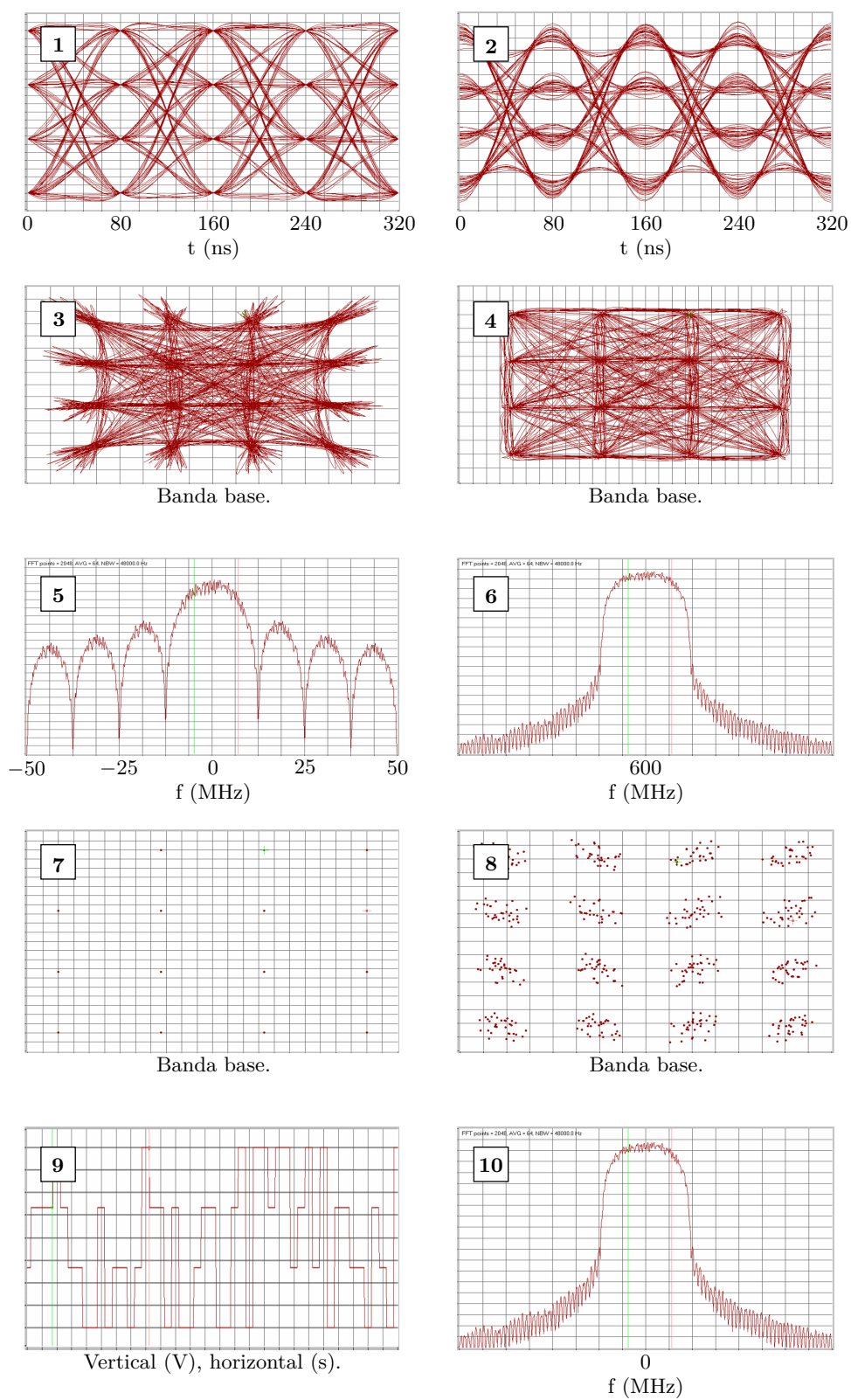


Figura 9.38: Medidas realizadas sobre el sistema de telecomunicación de la figura 9.37.

las medidas se identifican con números —ver figura 9.38—. (Hay medidas que se pueden haber tomado en varios puntos.)

2. Explique brevemente qué sabemos del sistema a partir de las medidas.

Problema 9.34 (Septiembre de 2006)

Se desea transmitir una información MIC por un canal paso banda. La trama MIC está formada por 7 afluentes (canales de información vocal), y 1 canal de señalización y control. Todos los canales ocupan el mismo tiempo. Las señales vocales ocupan $W = 4$ kHz, se muestrean a 1,25 veces la frecuencia de Nyquist, y se codifican con 8 bits por muestra. Para el canal paso banda, se modula en 4-FSK *no coherente*, con filtrado en coseno alzado ($\alpha = 0,5$).

1. Calcule el régimen binario y el simbólico del sistema.
2. Dibuje la trama MIC, e indique los valores significativos.
3. Calcule el ancho de banda del sistema.

Problema 9.35 (Septiembre de 2006)

Datos de un sistema de comunicaciones digitales:

- Hay adaptación de impedancias en todo el sistema (50Ω).
- Modulador-transmisor:
 - Régimen binario: 156 Mbits/s.
 - Modulación digital lineal (QAM o PSK).
 - En la figura 9.39 se observa el diagrama de ojos del canal I (el del Q es similar).
 - Frecuencia de la portadora: 8 GHz.
 - Potencia equivalente de pico: 360 mW.
 - Filtrado ideal de Nyquist ($\alpha = 0$).
- Canal:
 - Atenuación: 95,8 dB.
- Receptor-demodulador:
 - Temperatura de ruido a la entrada del receptor: 300 K.
 - Figura de ruido del receptor: 6 dB.

1. Razone cuál es la modulación utilizada. Dibuje la constelación en recepción. Indique una forma de codificación óptima o de Gray.

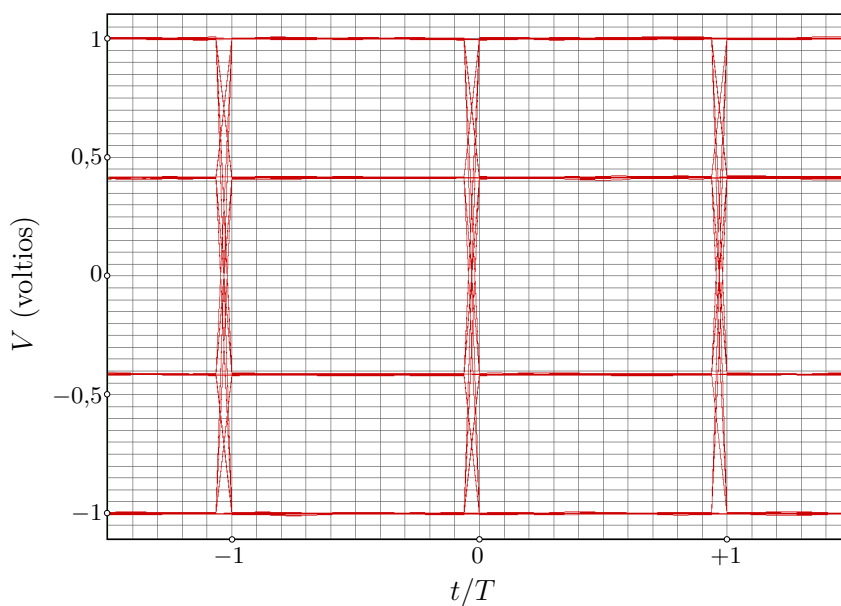


Figura 9.39: Diagrama de ojos en I (el de Q es similar). El eje horizontal temporal está normalizado al tiempo de símbolo. El eje vertical de voltios está normalizado al nivel más alto (que, por tanto, es de 1 V). Se ha añadido un leve ruido para que las trayectorias se aprecien mejor; no considere el ruido para la resolución.

2. Calcule la relación E_b/N_0 (dB) en recepción.
3. Calcule la BER. (Puede consultar las fórmulas de calidad y la gráfica de la función *erfc* en los apéndices.)

Problema 9.36 (Enero de 2007)

Datos de un sistema de comunicaciones digitales:

- Relación potencia media a ruido en el receptor: 21,1 dB.
- Modulación: 16QAM.
- Filtrado en coseno alzado, con $\alpha = 0,25$.
- Régimen binario: 152 Mbits/s.
- Puede consultar las fórmulas de calidad y la gráfica de la función *erfc* en los apéndices.

Calcule la probabilidad de bit erróneo.

Problema 9.37 (Enero de 2007)

1. Calcule el ancho de banda de radiofrecuencia mínimo que se necesita para transmitir un múltiplex digital de 32 canales musicales de alta calidad, si cada uno de ellos tiene un ancho de banda de 20 kHz y se digitaliza con 20 bits a una frecuencia de muestreo de 48 kHz. Modulación utilizada: QPSK; filtrado en coseno alzado con factor de redondeo igual a 0,25.
2. Calcule la energía por símbolo en recepción si se transmite con una potencia equivalente de pico de 100 vatios y el canal, a la frecuencia de trabajo, atenúa 86 dB.

Problema 9.38 (Junio de 2007)

Datos de un sistema de comunicaciones digitales vía radio:

- Modulador-transmisor:
 - Régimen binario: 120 Mbits/s.
 - Modulación: M-APK. La constelación transmitida se observa en la figura 9.40.
 - Frecuencia de portadora: 9 GHz.
 - Potencia equivalente de pico: 4 W.
 - Filtrado raíz de coseno alzado: $\alpha = 0,9$.
 - Canal:
 - Sistema lineal e invariante, aditivo de ruido blanco gaussiano.
 - Atenuación: 106 dB.
 - Receptor-demodulador:
 - Filtro de radiofrecuencia de ancho de banda igual al de salida del transmisor.
 - Temperatura de ruido a la entrada del receptor: 400 K.
 - Figura de ruido del receptor: 9 dB.
 - Demodulador I-Q óptimo. Portadoras recuperadas: los ejes de la figura 9.40.
 - Filtrado raíz de coseno alzado: $\alpha = 0,9$.
 - Todo el sistema está adaptado a 50Ω .
1. Calcule el ancho de banda de la señal a la salida del transmisor. Halle la relación entre las tensiones R_1 y R_2 (ver figura 9.40). Justifique que no es posible realizar una codificación óptima (de Gray) para esta constelación. Dibuje las fronteras de decisión de símbolo. Dibuje aproximadamente los diagramas de ojos en I y en Q que se obtendrían a la salida del demodulador; indique los valores más significativos (suponga que la relación señal a ruido es muy alta, normalice la señal en voltios).
 2. Calcule las relaciones E_s/N_0 y E_b/N_0 (dB) en recepción.

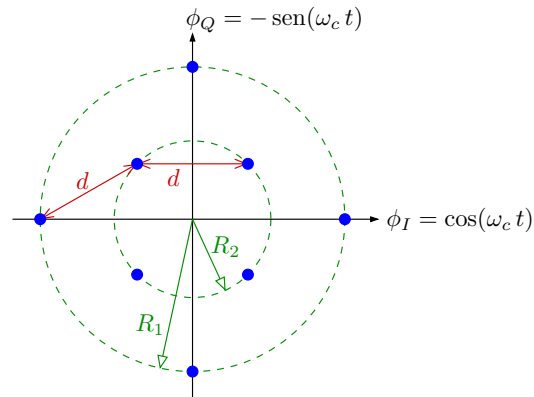


Figura 9.40: Constelación transmitida sobre ejes normalizados en voltios de pico de senoide.

3. Calcule la P_s . Se recuerda que en una M-APK:

$$P_s \leq \frac{M-1}{2} \operatorname{erfc} \left(\frac{1}{2} \sqrt{\frac{E_{dmin}}{N_0}} \right)$$

Puede consultar los cuadros (tablas) de la función *erfc* en los apéndices.

4. Razone entre qué valores estará P_b .
5. Calcule el incremento, o decremento, de la potencia transmitida que permite obtener una $P_s = 3,5 \cdot 10^{-11}$.

Problema 9.39 (Junio de 2007)

Se desea transmitir un régimen binario $R_b = 622$ Mbps, con una calidad $BER = 10^{-8}$. La potencia recibida es $p_{rx} = 10^{-8}$ W, la densidad espectral de ruido en el receptor vale $N_0 = 1,275 \cdot 10^{-18}$ W/Hz, y la modulación ha de ser M-FSK coherente ($M = 2, 4, 8, 16, \dots$). Calcule el número de símbolos (M) que cumple los requisitos, con ancho de banda mínimo. Calcule el ancho de banda de la M-FSK escogida. Comente el resultado.

Notas: 1.- La probabilidad de bit erróneo en M-FSK se puede aproximar por:

$$P_b \approx \frac{M}{4} \operatorname{erfc} \left(\sqrt{\frac{E_b}{2 \cdot N_0} \cdot \log_2 M} \right)$$

2.- Puede consultar los cuadros (tablas) de la función *erfc* en los apéndices.

Problema 9.40 (Septiembre de 2007)

Calcule, en recepción, la relación de energía por símbolo a densidad espectral de ruido (en dB) del sistema de comunicaciones cuyos datos se dan a continuación.

- Modulador-transmisor:
 - Régimen binario: 240 Mbps.
 - Modulación: 16QAM.
 - Filtro raíz de coseno alzado (*roll-off*: 0,5).
 - Potencia equivalente de pico: 100 W.
- Canal:
 - Aditivo de ruido blanco gaussiano.
 - Atenuación: 114 dB.
- Receptor-demodulador:
 - Filtro raíz de coseno alzado (*roll-off*: 0,5).
 - Temperatura de ruido de la entrada: 350 K.
 - Figura de ruido del receptor: 12 dB.
- Impedancia de trabajo del sistema: 50 Ω .

Problema 9.41 (Septiembre de 2007)

Datos de un sistema digital:

- La información está constituida por 18 cadenas musicales estereofónicas de alta calidad, más dos canales adicionales para señalización y alineación (cada uno de 8 bits).
- El conversor analógico-digital, uniforme, cuantifica con 16 bits.
- Ancho de banda de la señal musical: 20 kHz.
- Frecuencia de muestreo del conversor: 20 % por encima de la frecuencia de Nyquist.

1. Calcule el tiempo de trama y el de bit.
2. Calcule la ancho de banda mínimo necesario si se transmite en banda base, con una codificación de línea NRZ bipolar.
3. Calcule el ancho de banda mínimo necesario si se transmite en paso banda, modulando en 64QAM.

Problema 9.42 (Septiembre de 2007)

Sea el siguiente sistema de comunicaciones digital:

- Régimen binario: $R_b = 200$ Mbps.
- Requisito de calidad: $BER = 10^{-6}$.
- Modulación 4-FSK, coherente.
- Frecuencia de portadora: $f_c = 2,4$ GHz.
- Filtrado en coseno alzado, con $\alpha = 0,5$.
- Potencia transmitida: $p_{TX} = 10$ W.
- Atenuación del medio: $A_t = 90$ dB.
- Todo el ruido del sistema equivale a una contribución AWGN a la entrada del receptor con: $N_0 = 3,972 \cdot 10^{-18}$ W/Hz.
- Todo el sistema se encuentra adaptado a $R = 50 \Omega$.
- Puede consultar las gráficas de calidad de la FSK en los apéndices.

1. Dibuje el diagrama de bloques de un receptor óptimo coherente para el sistema descrito. Explique brevemente su funcionamiento.
2. Calcule el ancho de banda que necesitará el filtro de predetección del sistema.
3. Escriba la expresión de las señales analíticas (en voltios, para t segundos) a la entrada del receptor. Calcule el valor de todos sus parámetros. (Nota: No considere el retardo del medio; tome referencia coseno y señales con desfase inicial nulo.)
4. En dos instantes determinados, se reciben las señales (en voltios, para t segundos):

$$r_a(t) = \cos(2\pi \cdot 2275 \cdot 10^6 \cdot t)$$

$$r_b(t) = \cos(2\pi \cdot 2425 \cdot 10^6 \cdot t)$$

¿Qué decisión tomará el receptor con cada una de ellas? (Apoye su respuesta con los cálculos y razonamientos pertinentes.)

5. Calcule la calidad, P_s y P_b , del sistema. ¿Se cumple el requisito de calidad?

Problema 9.43 (Febrero de 2008)

Se desea transmitir por un canal radioeléctrico de 27 MHz de ancho de banda la información de 41 canales musicales estereofónicos de alta calidad (ancho de banda 20 kHz), muestreados a 48 kHz y codificados con cuantificación uniforme de 20 bits. En la trama se añaden 2 canales de 20 bits cada uno para señalización y alineación. Se dispone de tres tipos de modems: QPSK (4QAM), 16QAM y 64QAM, todos ellos con filtrado en coseno alzado (factor de *roll-off* 0,25).

Datos adicionales:

- Potencia equivalente de pico en transmisión: 16 W.
- Frecuencia de trabajo: 8 GHz.
- Atenuación del canal: 114 dB.
- Temperatura de ruido de la antena receptora: 600 K.
- Figura de ruido del receptor: 3 dB.
- Hay adaptación de impedancias en todo el sistema (50Ω).
- En las modulaciones se utiliza codificación óptima, o de Gray.
- Puede consultar las gráficas de calidad de la QAM de los apéndices.

Elija la modulación que, cumpliendo con los requisitos del enunciado, ofrezca mejor calidad. Calcule la probabilidad de bit erróneo de la modulación seleccionada.

Problema 9.44 (Junio de 2008)

Una información de $R_b = 300$ Mbps se transmite a 10 GHz mediante una modulación 8APK de constelación óptima. La potencia media transmitida es $P_T = 0$ dBm, la atenuación del medio vale $A_t = 70$ dB, y la densidad espectral de potencia de ruido unilateral a la entrada del receptor se estima en $N_0 = 12,95 \cdot 10^{-21}$ W/Hz. Todo el sistema está adaptado a $R = 50 \Omega$.

1. Dibuje la constelación recibida de señales moduladas, con ejes normalizados en energía. Calcule las coordenadas de cada señal.
2. Proponga una posible codificación de Gray. Comente el resultado.
3. Acote la probabilidad de error de símbolo. Recuerde que en APK:

$$\frac{1}{M} \operatorname{erfc}\left(\frac{d_{\min}}{2\sqrt{N_0}}\right) \leq P_s \leq \frac{M-1}{2} \operatorname{erfc}\left(\frac{d_{\min}}{2\sqrt{N_0}}\right)$$

donde d_{\min} es la raíz de la energía entre señales contiguas.

4. Dibuje las regiones de decisión de la constelación.

Problema 9.45 (Septiembre de 2008)

Datos de un sistema de comunicaciones digital:

- Modulador-transmisor:
 - Régimen binario: 384 Mbits/s.
 - Modulación: 64QAM.
 - Potencia equivalente de pico: 39,6 W.
- Canal:
 - Aditivo de ruido blanco gaussiano.
 - Atenuación: 100 dB.
 - Filtrado ideal de Nyquist.
- Receptor-demodulador:
 - Temperatura de ruido de la entrada: 300 K.
 - Figura de ruido del receptor: 6 dB.
- Impedancia de trabajo para todo el sistema: 50 Ω .

Calcule, en recepción, la relación energía por bit a densidad espectral de potencia de ruido (en dB).

Problema 9.46 (Septiembre de 2008)

Datos de un sistema digital:

- Información: 22 cadenas musicales estereofónicas de muy alta calidad.
- Ancho de banda de la señal musical: 20 kHz.
- Frecuencia de muestreo del conversor analógico-digital: 25 % mayor que la frecuencia de Nyquist.
- Número de bits del conversor: 18 (cuantificación uniforme).
- La trama incluye dos canales adicionales de 18 bits; el primero para señalización y alineación de tramas, y el segundo (a mitad de trama) para señales de servicios y alarmas.

Calcule el ancho de banda teórico mínimo necesario para transmitir en banda base (codificación NRZ bipolar) y en paso banda (modulación 16QAM). Indique también los tiempos de trama y de bit.

Problema 9.47 (Septiembre de 2008)

Datos de un sistema de comunicaciones:

- Modulador-transmisor:
 - Régimen binario: 384 Mbps.
 - Modulación: 16QAM.
 - Potencia equivalente de pico: 18 W.
- Canal:
 - Aditivo de ruido blanco gaussiano.
 - Atenuación: 103,6 dB.
 - Filtrado ideal de Nyquist.
 - Impedancia de trabajo para todo el sistema: $50\ \Omega$.
- Receptor-demodulador:
 - Temperatura de ruido de la entrada: 250 K.
 - Figura de ruido del receptor: 9 dB.

1. Calcule la probabilidad de bit erróneo.
2. ¿Cuántos dB será necesario incrementar/decrementar la potencia media para obtener una probabilidad de error de bit de 10^{-10} ?

Problema 9.48 (Enero de 2009)

Datos de un sistema digital:

- Modulación: 16QAM.
- Régimen binario: 160 Mbits/s.
- Codificación óptima, o de Gray.
- Relación potencia media a ruido en el receptor: 21,5 dB.
- Puede consultar las fórmulas de calidad de la 16QAM en los apéndices.
- Puede consultar la gráfica o los cuadros (tablas) de la *erfc* en los apéndices.

Calcule la probabilidad de bit erróneo.

Problema 9.49 (Enero de 2009)

1. Sea un múltiplex digital de 40 canales musicales de alta calidad. Cada canal tiene un ancho de banda de 20 kHz y se digitaliza a 20 bits con una frecuencia de muestreo de 48 kHz. Se modula en 8PSK y el filtrado es en coseno alzado con factor de redondeo 0,5. Calcule el ancho de banda necesario para la transmisión.
2. Se transmite una potencia equivalente de pico de 80 vatios, y el canal, a la frecuencia de trabajo, atenúa 87 dB. Calcule la energía por símbolo en recepción.

Problema 9.50 (Enero de 2009)

De un sistema de comunicación digital se saben los siguientes datos:

- En la figura 9.41 se presenta el diagrama de bloques del sistema. La parte del receptor aparece detallada.
 - La modulación empleada es M-QAM.
 - En la figura 9.42 se observan los diagramas de ojos que se recibirían (puntos C_I y C_Q de la figura 9.41) en ausencia de ruido.
 - El modulador entrega al medio (punto A) una potencia media $p_{TX} = 540$ mW.
 - El medio de transmisión atenúa 60 dB.
 - Se filtra en coseno alzado, con factor de redondeo $\alpha = 0,5$.
 - La frecuencia portadora es $f_c = 2,4$ GHz.
 - Todo el ruido del sistema equivale a una contribución unilateral blanca aditiva $N_0 = 31 \cdot 10^{-17}$ W/Hz, a la entrada del receptor (punto B).
 - Se requiere una calidad BER de al menos 10^{-9} .
 - Suponga que todo el sistema está adaptado a $R = 1$ Ω .
 - Use las fórmulas de calidad de las M-QAM. Puede consultarlas en los apéndices.
 - Puede consultar los cuadros (tablas) de la función $erfc$ en los apéndices.
1. Indique, razonadamente, cuál es la modulación que se utiliza. ¿Cuántos símbolos tiene?
 2. Calcule el régimen simbólico y el régimen binario del sistema.
 3. Calcule el ancho de banda que ocupa la señal modulada.
 4. Dibuje la constelación recibida (punto B), antes de sumar el ruido. Utilice ejes ortogonales (normalización de energía); indique las coordenadas de cada señal. Realice una asignación de código según Gray.

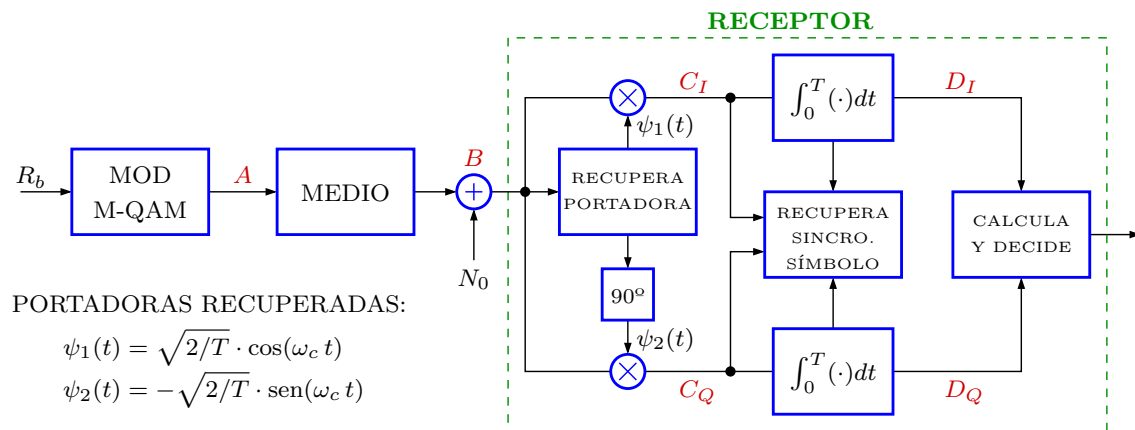


Figura 9.41: Diagrama de bloques del sistema de comunicación, con la parte del receptor detallada.

5. Se recibe en el punto B , ya con ruido, la señal $s(t) = 3,162277 \cdot 10^{-4} \cdot \cos(\omega_c t + \pi/6)$ (en voltios, para t en segundos). Calcule los valores que se obtienen en los puntos D_I y D_Q . ¿Qué decisión tomará el receptor?
6. Estudie si el sistema cumple el objetivo de calidad especificado.

Problema 9.51 (Junio de 2009)

Se desea transmitir por un canal de radio la información de 48 canales *estereofónicos* (ancho de banda 20 kHz), muestreados a 44,1 kHz y codificados con cuantificación uniforme de 16 bits. En la trama se añaden 2 canales, de 16 bits cada uno, para la señalización y alineación. Se dispone de modems 64QAM.

Datos adicionales:

- Potencia equivalente de pico (del transmisor): 24,5 W.
- Frecuencia de trabajo: 8 GHz.
- Atenuación del canal: 113,3 dB.
- Temperatura de ruido de la antena receptora: 300 K.
- Figura de ruido del receptor: 3 dB.
- Se supone adaptación de impedancias en todo el sistema (50Ω).
- En la modulación se utiliza codificación óptima, o de Gray.
- Puede consultar las gráficas de calidad de los apéndices.

1. Calcule la probabilidad de bit erróneo.
2. Por un problema en el apuntamiento de las antenas, la atenuación del canal se incrementa en 1,3 dB. Calcule la nueva probabilidad de bit erróneo.

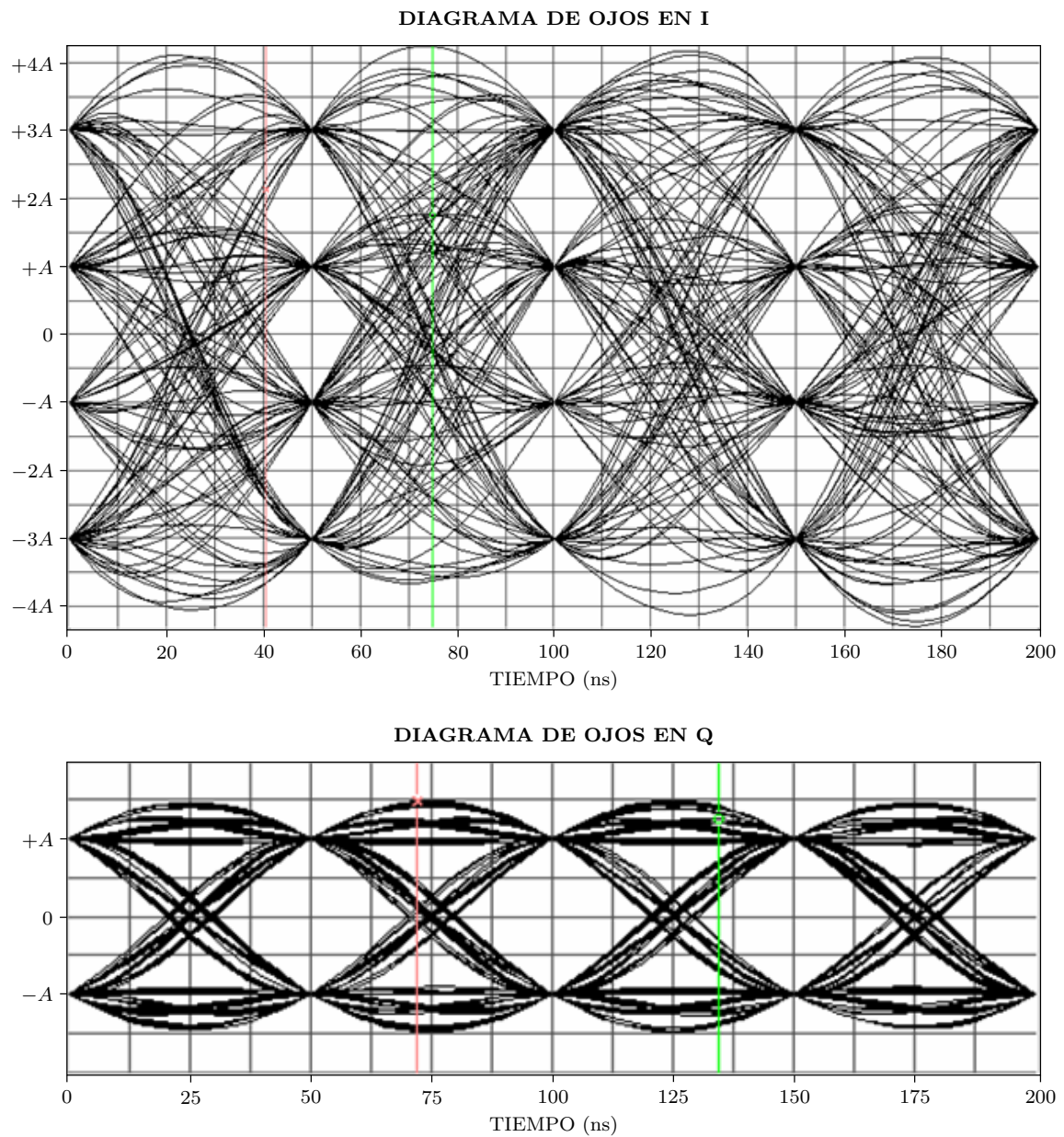


Figura 9.42: Diagrama de ojos en I y Q sin ruido. En los ejes verticales se representan voltios, en función de un parámetro A (desconocido).

3. Manteniendo el problema de apuntamiento, se reduce la figura de ruido del receptor para obtener de nuevo la calidad del primer apartado. ¿Cuánto vale la nueva figura de ruido del receptor?

Problema 9.52 (Junio de 2009)

Se desea transmitir la información de un sistema MIC mediante una M-PSK por un canal paso banda de 5000 kHz. El MIC recibe 10 señales musicales estéreo (cada señal tiene canal izquierdo y derecho), filtradas antisolapamiento a 15 kHz, muestreadas a 35 kHz, y codificadas con 10 bits por muestra. El sistema cuenta con 4 canales de señalización y control, cada uno de 10 bits. Se filtra en coseno alzado, con *roll-off* de 0,5.

1. Calcule qué modulaciones M-PSK cumplen con los requisitos.
2. Seleccione la M-PSK con mejor calidad (para una potencia transmitida fija).
3. Calcule el ancho de banda que realmente ocupa la M-PSK seleccionada.

Problema 9.53 (Septiembre de 2009)

Se desea transmitir una señal digital de 155 Mbits/s por un determinado canal. La comunicación se realiza con las modulaciones siguientes: BPSK, QPSK, 16QAM, 2FSK, 8FSK. Las FSK son coherentes, y siempre se utiliza filtrado en coseno alzado (factor de *roll-off* 0,5).

Calcule el ancho de banda mínimo que debe tener el canal para cada modulación.

Problema 9.54 (Septiembre de 2009)

Se desea enviar la información de varios sensores meteorológicos, desde un observatorio al centro de predicción. El régimen binario, una vez digitalizada y multiplexada la información de todos los sensores, es de 2400 bits/s.

Datos adicionales:

- Potencia transmitida: 2 mW.
- Temperatura de ruido a la entrada del receptor: $T_0 = 300$ K.
- Factor de ruido del receptor: 6 dB.
- Modulación DBPSK con detección no coherente. Su calidad es:

$$P = \frac{1}{2} \exp\left(-\frac{E_b}{N_0}\right)$$

Calcule cuánto vale la atenuación máxima del canal (en dB), si se quiere asegurar una probabilidad de error menor que 10^{-8} .

Problema 9.55 (Enero de 2010)

En la figura 9.43 se observa el detector óptimo de un sistema BPSK. Las señales que llegan a la entrada del detector son: $s_i(t) = \pm A \cos(\omega_c t + \theta)$. La portadora recuperada tiene un error de θ° en la fase, y vale en concreto:

$$c(t) = \sqrt{\frac{2R}{T}} \cos(\omega_c t)$$

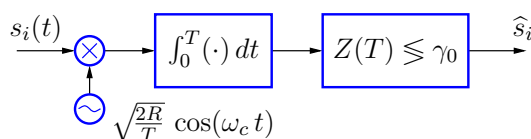


Figura 9.43: Detector óptimo de BPSK.

Explique cómo se ve afectada la calidad del sistema por el error en la fase de la portadora recuperada. Calcule el valor de θ que modifica (E_b/N_0) en 3 dB.

Problema 9.56 (Enero de 2010)

Para transmitir digitalmente 60 canales vocales con alta calidad, se realiza una conversión A/D (análogo/digital) tipo MIC-MDT. Cada canal se muestrea a 1,25 veces la frecuencia de Nyquist. El codificador asigna 10 bits por muestra. La trama se constituye con los 60 canales de voz, 2 canales de señalización y otros 2 canales de control. Cada uno de los canales de señalización y control tiene 10 bits. El medio es un canal paso banda de 12 MHz, y se emplea un modulador 4FSK coherente.

Calcule el máximo ancho de banda del filtro antisolapamiento del conversor A/D.

Problema 9.57 (Enero de 2010)

Se desea transmitir por un canal radio la información de 25 canales musicales *estereofónicos* (con ancho de banda 15 kHz), muestreados a 32 kHz y codificados con cuantificación uniforme de 14 bits. En la trama se añade un canal de 14 bits para señalización y alineación de trama. Se dispone de modems 8APK óptima.

Datos adicionales:

- Potencia equivalente de pico en el transmisor: 3 W.
- Frecuencia de trabajo: 6 GHz.
- Atenuación del canal: 114 dB.

- Temperatura de ruido de la antena receptora: 300 K.
- Figura de ruido del receptor: 6 dB.
- Se supone adaptación de impedancias en todo el sistema ($R = 50 \Omega$).
- Probabilidad de error de bit para la 8APK óptima:

$$P_b \approx \frac{7}{4} \operatorname{erfc} \left(\sqrt{\frac{3}{2 + \sqrt{3}}} \frac{E_b}{N_0} \right)$$

- Puede consultar los cuadros (tablas) o la gráfica de la función *erfc* en los apéndices.
1. Calcule la probabilidad de bit erróneo en recepción.
 2. Dibuje la constelación de la modulación en transmisión. Indique, si es posible, una codificación de Gray. Calcule el ancho de banda mínimo de la señal modulada (según el criterio de Nyquist).

Problema 9.58 (Junio de 2010)

Se desea transmitir una señal digital de 200 Mbits/s por un determinado canal paso bajo. Para ello se utiliza en el transmisor una codificación de línea multinivel (pulsos NRZ) de 4 amplitudes: $\{00 \rightarrow -9 \text{ V}; 01 \rightarrow -3 \text{ V}; 11 \rightarrow +3 \text{ V}; 10 \rightarrow +9 \text{ V}\}$. En recepción se utiliza detección mediante filtro adaptado más muestreo. Para la calidad adecuada, se requiere una probabilidad de símbolo erróneo menor o igual a $5 \cdot 10^{-8}$.

Datos adicionales:

- Atenuación por unidad de longitud de la línea de transmisión: 9 dB/100 m.
 - Temperatura de ruido a la entrada del receptor: 300 K.
 - Factor de ruido del receptor: 5 dB.
 - Impedancia de trabajo: 75Ω .
 - Puede consultar la gráfica y los cuadros (tablas) de la función *erfc* en los apéndices.
1. Calcule la longitud máxima de la línea de transmisión que une el transmisor con el receptor.
 2. ¿Cuánto vale la probabilidad de error de bit?
 3. ¿Cuál es el ancho de banda mínimo necesario para el canal digital?

Problema 9.59 (Junio de 2010)

Datos de un sistema de comunicación digital:

- En la figura 9.44 se observa el diagrama de bloques del sistema.
- Modulación empleada: 4-ASK, con señales $s_i(t) = A_i \cdot \cos(\omega_c t)$.
- Régimen binario: $R_b = 100$ Mbps.
- Potencia media transmitida (punto A): $P_{TX} = 20$ dBm.
- Atenuación del medio de transmisión: $A_t = 60$ dB.
- Filtrado en coseno alzado, con factor de redondeo: $\alpha = 0,5$.
- Frecuencia portadora: $f_c = 600$ MHz.
- Ruido AWGN total: $N_0 = 2,144 \cdot 10^{-17}$ W/Hz (a la entrada del RX, punto B).
- Todo el sistema está adaptado a $R = 1 \Omega$.
- Puede consultar la fórmula de la calidad, P_s , para M-ASK en los apéndices.
- Puede consultar los cuadros (tablas) de la función $erfc$ en los apéndices.

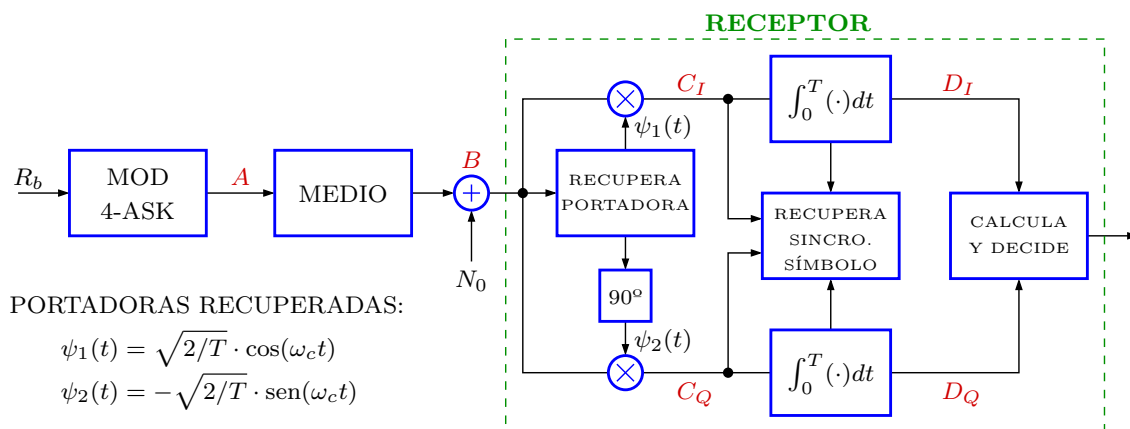


Figura 9.44: Diagrama de bloques del sistema de comunicación.

1. Calcule el régimen simbólico de la señal ASK, R_s (Mbaudios).
2. Calcule el ancho de banda ocupado por la modulación, B (MHz).
3. Calcule la energía media recibida por símbolo, E_s (J).
4. Calcule la relación señal a ruido de bit en recepción, E_b/N_0 (veces de pot.).
5. Calcule las probabilidades de símbolo y bit erróneos, P_s y P_b .
6. Dibuje la constelación recibida (punto B), antes de sumar el ruido. Utilice ejes ortogonales (normalización de energía); indique las coordenadas de cada señal. Realice una asignación de código según Gray.

7. Indique los umbrales de decisión de la constelación anterior.
8. Se recibe en el punto B , ya con ruido, la señal $s_r(t) = 6 \cdot 10^{-4} \cdot \cos(\omega_c t + 4\pi/3)$ (en voltios, para t en segundos). Calcule los valores que se obtienen en los puntos D_I y D_Q . ¿Qué decisión tomará el receptor?

Problema 9.60 (Julio de 2010)

Datos de un sistema de comunicaciones: Régimen binario $R_b = 55$ Mbps. Canal paso banda en coseno alzado, con $\alpha = 0,5$, y ancho de banda $B = 30$ MHz. Calidad requerida $BER = 10^{-8}$. Potencia media recibida $p_{RX} = 7,1 \cdot 10^{-9}$ W. Densidad espectral de ruido a la entrada del receptor $N_0 = 4,1 \cdot 10^{-18}$ W/Hz.

Seleccione la modulación más adecuada de las mostradas en la figura 9.45. Para ello:

1. Calcule el régimen simbólico máximo que se puede transmitir, R_s (Mbaudios).
2. Estudie qué valores de M (número de símbolos) son compatibles con el resultado anterior.
3. Calcule la relación E_b/N_0 (dB).
4. Razone su elección final.

Problema 9.61 (Julio de 2010)

La constelación de la figura 9.46 representa una modulación 16APK sobre ejes normalizados en tensión (en 1 V de valor de pico de senoide). Esta constelación fue bastante utilizada para conectar ordenadores con internet a través de la línea telefónica, transmitiendo a 9600 bits/s. (Y todavía se puede utilizar para el servicio de fax.)

Datos adicionales:

- Frecuencia de portadora: 1700 Hz.
- Ancho de banda de la línea telefónica: 3100 Hz.
- Potencia equivalente de pico (en el transmisor): 3 dBm.
- Atenuación del canal: 100,4 dB.
- Temperatura de ruido de la entrada del receptor: 350 K.
- Figura de ruido del receptor: 15 dB.
- Impedancia del sistema: 600 Ω .

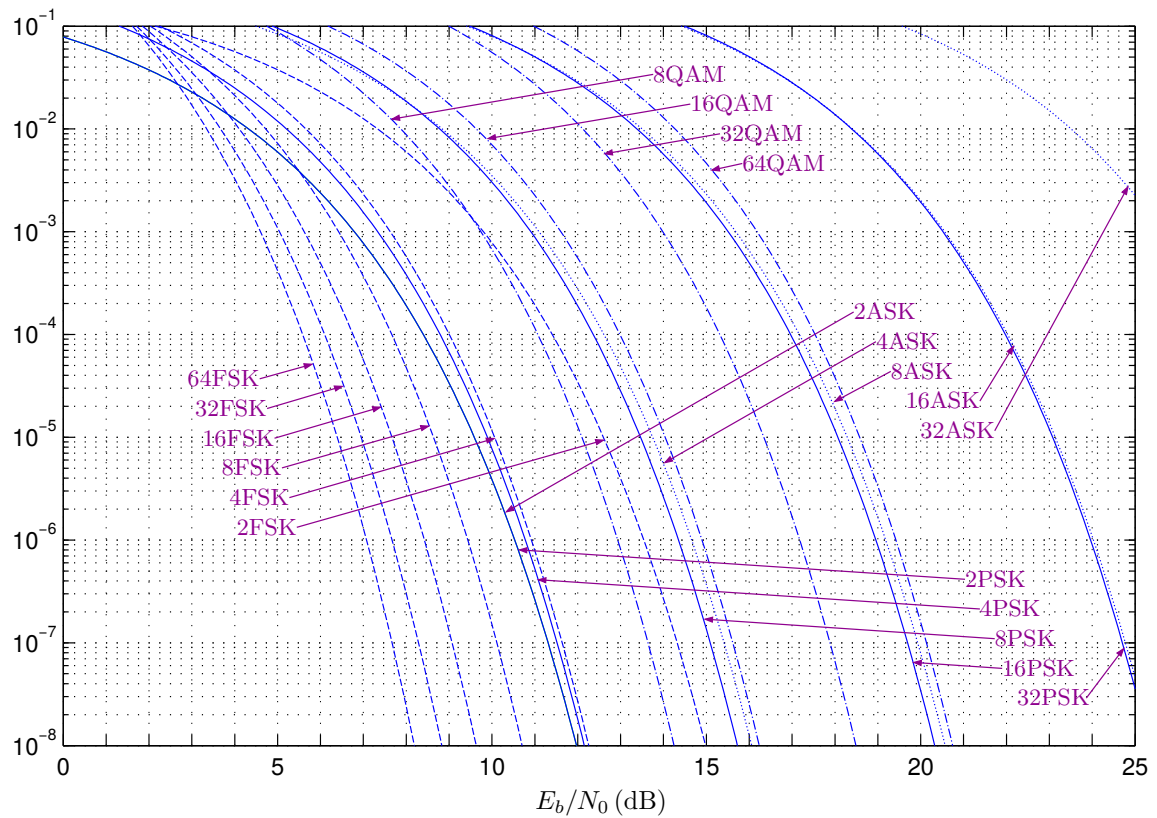


Figura 9.45: Probabilidad de error de símbolo (P_s) en función de E_b/N_0 (dB) para las modulaciónes candidato.

1. Calcule la potencia media en recepción.
2. Calcule la relación E_b/N_0 en el receptor.
3. Calcule la probabilidad de error de símbolo (en el receptor). Puede consultar la gráfica y los cuadros (tablas) de la función erfc en los apéndices. La calidad en una MAPK es:

$$P_s \leq \frac{M-1}{2} \text{erfc} \left(\frac{1}{2} \sqrt{\frac{E_{dmin}}{N_0}} \right)$$

4. Discuta si se puede calcular, aproximadamente, la probabilidad de bit erróneo.
5. ¿Cuál es el valor máximo del factor de roll-off que se puede utilizar en este sistema?

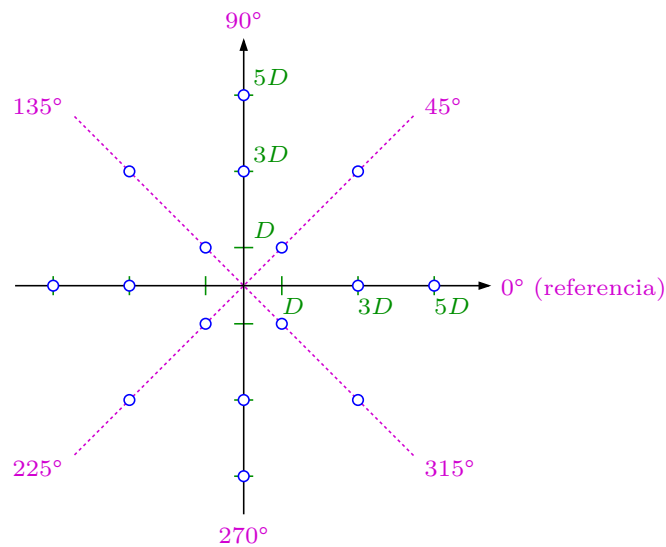


Figura 9.46: Constelación 16APK, sobre ejes normalizados en tensión. (Recomendación UIT-T V.29.)

Problema 9.62 (Diciembre de 2010)

En un sistema de comunicaciones digitales la relación de potencia media de señal a ruido en el receptor es de 26 dB. Datos adicionales:

- Modulación: 64QAM.
- Régimen binario: 155 Mbits/s.
- Codificación óptima o de Gray.
- Probabilidad de símbolo erróneo para una MQAM (con k par):

$$k = \log_2(M)$$

$$P_s = 1 - (1 - p)^2$$

$$p = \left(\frac{\sqrt{M} - 1}{\sqrt{M}} \right) \operatorname{erfc} \left[\sqrt{\frac{3k}{2(M-1)} \frac{E_b}{N_0}} \right]$$

- Puede consultar la gráfica o los cuadros (tablas) de la función erfc en los apéndices.

Calcule la probabilidad de bit erróneo.

Problema 9.63 (Diciembre de 2010)

Se desea transmitir una señal digital de 624 Mbits/s por un canal en coseno alzado con *roll-off* 0,35. Calcule el ancho de banda mínimo que deberá tener dicho canal si realizamos la comunicación utilizando las modulaciones siguientes: BPSK, 8PSK, 64QAM, 2FSK y 4FSK. (Las FSK son coherentes.)

Problema 9.64 (Diciembre de 2010)

En la figura 9.47 se muestra el diagrama de bloques simplificado del sistema de comunicación bajo estudio.

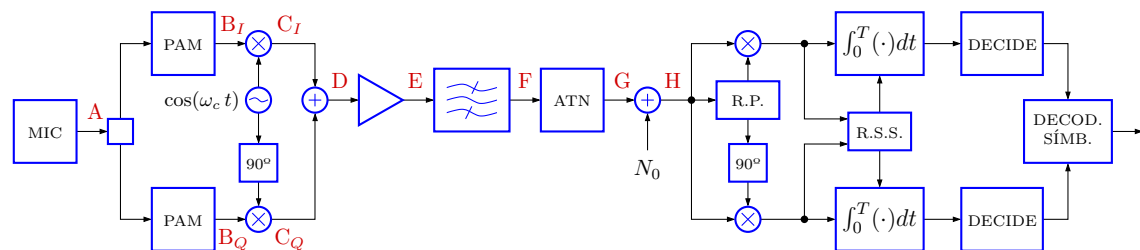


Figura 9.47: Diagrama de bloques del sistema de comunicación.

Datos:

- La información binaria procede de un bloque MIC europeo típico, que entrega tramas de 32 canales, con 8 bits por canal, muestreando a $f_m = 8$ kHz.
- En la figura 9.48 se observa la constelación transmitida en el punto D. (Atención: los ejes NO están normalizados en energía para la R de trabajo.)
- El amplificador gana $G_A = 40$ dB.
- El filtro paso banda es en coseno alzado, con $\alpha = 0,5$.
- El medio se modela como un atenuador de $A_t = 100$ dB.
- Todo el ruido del sistema se modela mediante una única contribución a la entrada del receptor, con densidad espectral unilateral de potencia $N_0 = 1,57 \cdot 10^{-18}$ W/Hz.
- Los siglas R.P. y R.S.S. corresponden a “Recuperador de Portadora” y “Recuperador de Sincronismo de Símbolo”.
- El sistema está adaptado a $R = 50$ Ω.
- Si la relación (E_b/N_0) es grande, la probabilidad de error en un símbolo se puede aproximar por:

$$P_s \approx \operatorname{erfc} \left[\sqrt{\frac{E_s}{N_0}} \operatorname{sen} \left(\frac{\pi}{M} \right) \right]$$

Donde E_s es la energía media por símbolo, y M es el número de símbolos de la modulación.

- Puede consultar los cuadros (tablas) de la función complementaria del error en los apéndices.

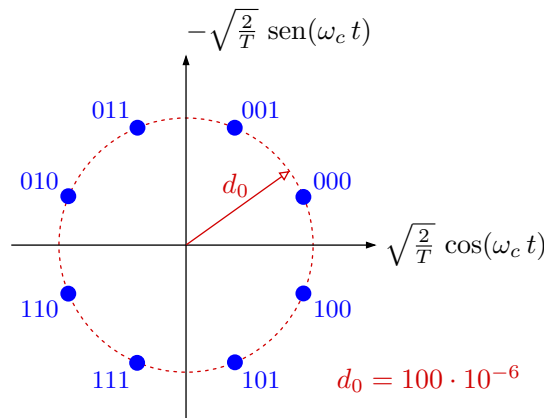


Figura 9.48: Constelación en el punto D (a la entrada del amplificador). Los ejes están normalizados en energía respecto a 1Ω .

1. Calcule el régimen binario, R_b , y el régimen simbólico, R_s , en el medio (es decir: en el atenuador).
2. Calcule el ancho de banda mínimo necesario en el filtro paso banda en coseno alzado.
3. Calcule la potencia media transmitida a la salida del amplificador (punto E).
4. Suponga que la información recibida en el punto A (salida del MIC) es “000110” (el bit de la izquierda es el de mayor peso). Dibuje aproximadamente la señal temporal recibida en el punto G (salida del atenuador). Indique los valores significativos. (Tome referencia *coseno*. Represente 2 ciclos de portadora por símbolo.)
5. Calcule la calidad BER (*Bit Error Rate*) del sistema.

Problema 9.65 (Mayo de 2011)

Calcule la relación E_b/N_0 (en dB) que tendremos en el receptor del sistema de comunicaciones digitales cuyos datos se dan a continuación.

Datos:

- Modulación: 16QAM.
- Filtrado en coseno alzado, con $\alpha = 0,5$.
- Potencia equivalente de pico en el transmisor: 400 W.
- Régimen binario: 400 Mb/s.
- Atenuación del canal: 119 dB.
- Temperatura de ruido de la entrada del receptor: 300 K.

- Figura de ruido del receptor: 6 dB.
- Impedancia de trabajo: $50\ \Omega$.

Problema 9.66 (Mayo de 2011)

Sea un sistema ideal, con un procesamiento muy complejo, en el que se alcanza el régimen binario máximo del límite de Shannon, C . Si la eficiencia espectral del sistema es $C/B = 1/3$, ¿cuál es su relación E_b/N_0 (dB)? Comente el resultado.

Problema 9.67 (Mayo de 2011)

Se quiere diseñar un sistema de comunicaciones paso banda para poder ofertar un servicio de radiodifusión digital (DAB) a nivel nacional. El ancho de banda disponible es de 800 kHz, y el número de cadenas que se desean transmitir simultáneamente es de 4. La información digital procedente de cada cadena radiofónica se modula en 16QAM, multiplexándose después las cuatro en frecuencia.

1. Calcule el máximo régimen binario que puede conseguirse en cualquiera de los canales de audio. Calcule el máximo régimen binario del sistema en conjunto. Se aconseja realizar un dibujo del espectro antes de realizar los cálculos.

(NOTA: el máximo régimen binario se consigue cuando cada cadena radiofónica se modula en 16QAM ocupando el ancho de banda de un canal de Nyquist, $\alpha = 0$, y las portadoras moduladas se multiplexan como frecuencias ortogonales de una FSK no coherente.)

2. Obtenga la mínima potencia equivalente de pico que tendría que emitir el transmisor, para cada una de las 4 portadoras, si se desea una BER para cada canal de $3,375 \cdot 10^{-8}$.

Datos adicionales:

- Atenuación del canal: 106 dB.
- Temperatura de ruido a la entrada del receptor: 400 K.
- Figura de ruido del receptor: 3 dB.
- Impedancia de trabajo: $50\ \Omega$.
- Puede consultar los cuadros (tablas) de la función *erfc* en los apéndices.

Problema 9.68 (Junio de 2011)

Sobre la figura 9.49, dibuje la curva de la modulación ASK. Realice los cálculos de apoyo pertinentes y comente el resultado. (Notas: Es suficiente pintar los puntos correspondientes a 2ASK, 4ASK y 8ASK. Considere que el detector es coherente y la asignación de Gray. Tome el ancho de banda de Nyquist.)

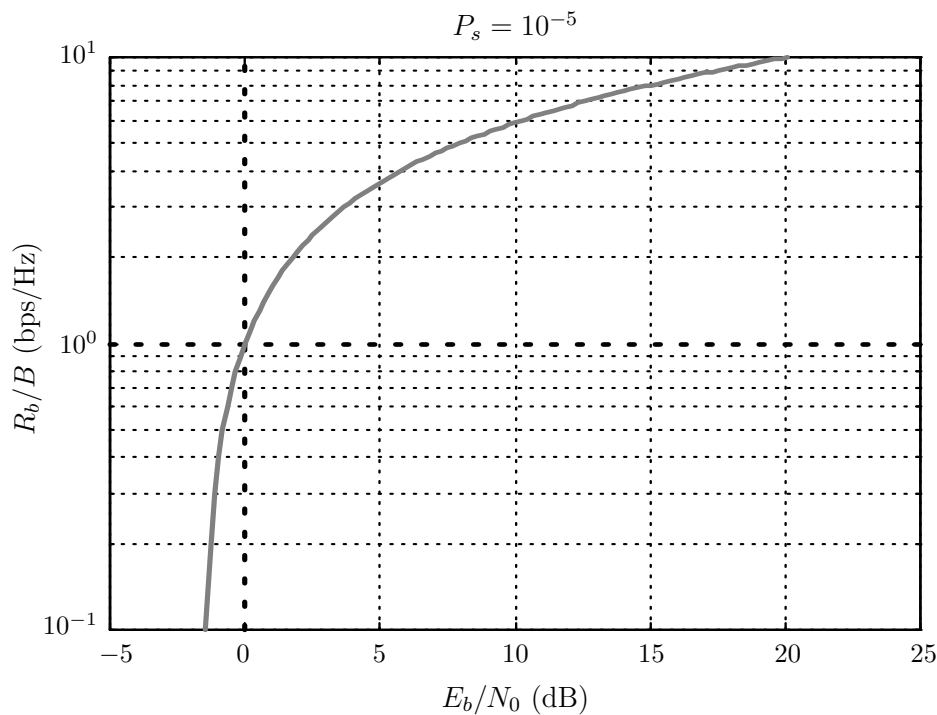


Figura 9.49: Plantilla para la MASK.

Problema 9.69 (Junio de 2011)

Datos de un sistema:

- | | |
|---|--|
| <ul style="list-style-type: none"> • Señales de entrada: vocales. • Filtrado anti-solapamiento a W. • Conversión A/D con muestreo a 1,2 veces la frecuencia de Nyquist. • Codificación con 8 bits por muestra. | <ul style="list-style-type: none"> • MUX de 30+2 (30 canales vocales + 2 de señalización, todos de igual duración). • Modulación: 16QAM. • Canal en coseno alzado ($\alpha = 0,5$). • Ancho de banda disponible: 750 kHz. |
|---|--|

1. Calcule el régimen simbólico máximo que soporta el canal.
2. Calcule el régimen binario máximo del MIC.

3. Calcule el ancho de banda máximo del filtrado anti-solapamiento, W .

Problema 9.70 (Junio de 2011)

Para comunicar dos edificios mediante un enlace de microondas, se propone un sistema 4FSK coherente. Datos:

- Frecuencia de portadora: $f_c = 10$ GHz.
- Separación entre frecuencias contiguas: $\Delta f = 100$ MHz.
- Filtrado en coseno alzado con $\alpha = 0,5$.
- Potencia media transmitida: $P_{TX} = 26$ dBm.
- Atenuación del medio: $A_t = 78$ dB.
- En la figura 9.50 se presenta el diagrama de bloques del receptor.
- Ruido total equivalente a la entrada del RX: $N_0 = 10^{-18}$ W/Hz.
- Todo el sistema está adaptado a: $R = 50 \Omega$.
- Puede consultar las gráficas de calidad de FSK de los apéndices.

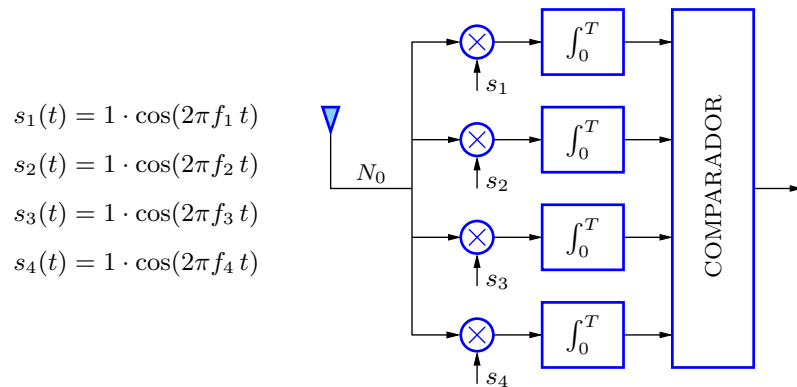


Figura 9.50: Diagrama de bloques del receptor.

1. Calcule el régimen binario máximo que soporta el sistema, teniendo en cuenta que las frecuencias de la FSK son ortogonales.
2. Suponga, a partir de ahora, que se transmite el régimen binario máximo del apartado anterior. Calcule el ancho de banda ocupado por la modulación.
3. Usando las gráficas de calidad de FSK de los apéndices calcule la calidad final del sistema, P_s y P_b .

Se reciben las señales s_a y s_b (en voltios, para t en segundos, y las frecuencias en hercios).

$$s_a = A \cdot \cos(2\pi \cdot 9,75 \cdot 10^9 \cdot t)$$

$$s_b = B \cdot \cos(2\pi \cdot 10,06 \cdot 10^9 \cdot t)$$

4. Calcule las frecuencias nominales de la 4FSK.
5. Razone qué decisión tomará el receptor para cada señal.
6. Apoye analíticamente los razonamientos del apartado anterior calculando los valores de las contribuciones de las ramas centrales (ramas 2 y 3), a la salida de los integradores. Obviamente, los resultados quedarán en función de A y B .

Problema 9.71 (Julio de 2011)

Diseñe un sistema de telecomunicación que cumpla las siguientes restricciones:

- Debe transmitir datos a $R_b = 140$ Mbps.
- Se filtra en coseno alzado, con factor de redondeo $\alpha = 0,5$.
- La potencia de pico transmitida (PEP) no puede ser mayor que 100 W.
- El canal radioeléctrico asignado está centrado en 2,4 GHz y ocupa $B = 120$ MHz.
- La atenuación del trayecto radioeléctrico es $A = 100$ dB.
- El transmisor y el medio presentan una distorsión de amplitud considerable.
- Se estima que todo el ruido del sistema es equivalente a una densidad espectral de potencia de ruido blanco (AWGN) $N_0 = 4,507 \cdot 10^{-18}$ W/Hz, situada a la entrada del receptor.
- Se requiere una calidad $BER = 10^{-7}$.
- Se adjunta la figura 9.51 con las gráficas de P_s en función de E_b/N_0 para diferentes modulaciones.

Al menos, debe especificar o calcular (justificando adecuadamente todas sus respuestas):

1. Frecuencia de portadora.
2. Modulación escogida.
3. Régimen simbólico.
4. Ancho de banda ocupado en el canal radioeléctrico.
5. Potencia recibida.
6. Relación E_b/N_0 a la entrada del receptor.
7. Calidad BER obtenida.
8. Estudie si la modulación escogida cumple todos los requisitos.

9. Demuestre que su elección es la más adecuada.
10. Ventajas de su propuesta respecto a la distorsión.

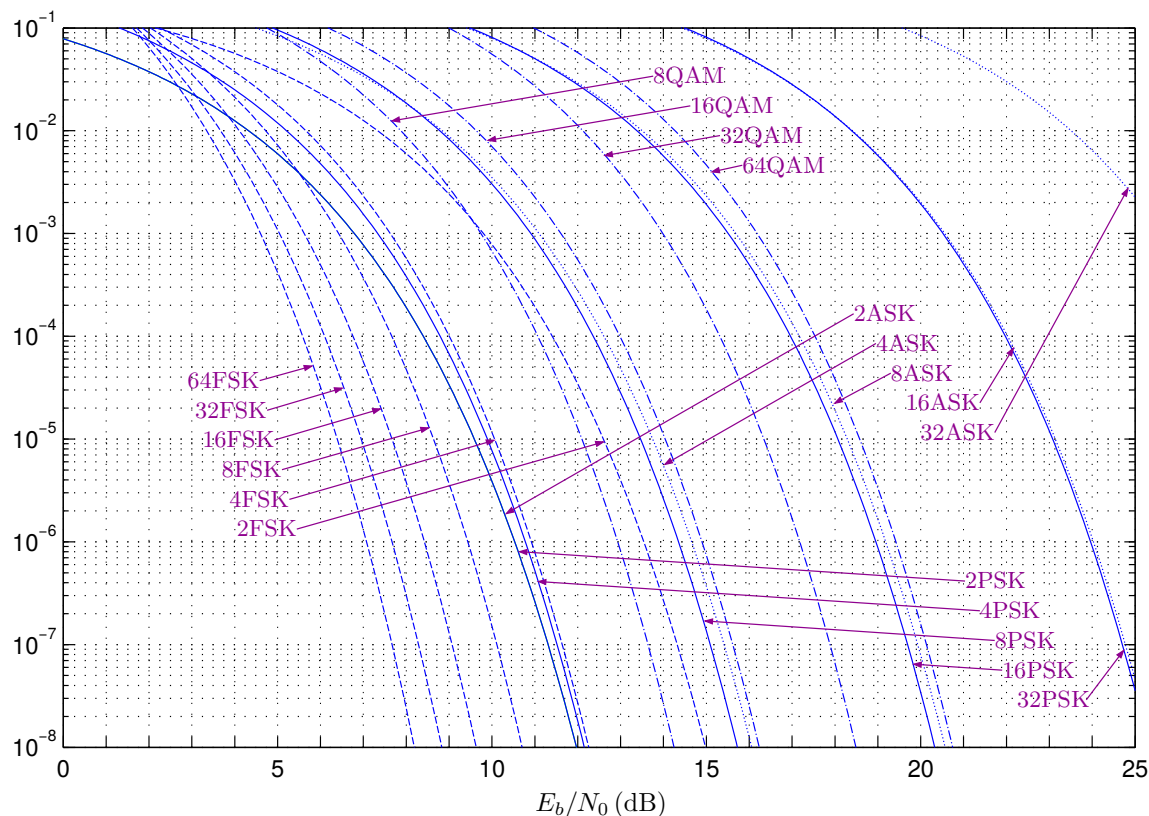


Figura 9.51: Calidad (P_s) en diferentes modulaciones.

Problema 9.72 (Julio de 2011)

Para transmitir un régimen binario $R_b = 140$ Mbps, con la mejor calidad (BER) posible, se emplea una modulación M-FSK coherente. El ancho de banda disponible es $B = 240$ MHz, y se filtra en coseno alzado con $\alpha = 0,5$. Al receptor llega una potencia de señal $p_{RX} = 1,4 \cdot 10^{-9}$ W, y el ruido se modela mediante una densidad espectral $N_0 = 10^{-18}$ W/Hz.

1. Elija el número de símbolos, M, más adecuado.
2. Calcule el ancho de banda y la BER que corresponden a la modulación seleccionada. (Puede consultar las gráficas de calidad de los apéndices. Posibles valores de M: 2, 4, 8, 16, 32, 64.)

Problema 9.73 (Julio de 2011)

En un sistema de radiocomunicaciones se dispone de un ancho de banda de 30 MHz. Se desea transmitir, multiplexando en el tiempo, 31 canales musicales estereofónicos de alta calidad junto con otros dos canales sencillos para señalización y alarmas. El ancho de banda de cada canal musical es de 20 kHz; la frecuencia a la que se muestrea cada canal musical es 1,2 veces la frecuencia mínima teórica de muestreo, y el número de bits del cuantificador uniforme utilizado es de 20.

1. Suponga que el factor de rol-off del filtro coseno alzado utilizado es 0,4. Calcule, en primer lugar, el régimen binario del sistema. En segundo lugar, diga cuál de las siguientes modulaciones digitales sería la más recomendable para este sistema: 2FSK, 4FSK, 8FSK, DBPSK, QPSK, 16QAM y 64QAM. Justifique su decisión de forma razonada.
2. Suponga que finalmente se utiliza la modulación 8APK no óptima de la figura 9.52. Obtenga la mínima potencia equivalente de pico que tendría que emitir el transmisor si se desea una BER menor de $5 \cdot 10^{-9}$. Datos adicionales:
 - Atenuación del canal: 116 dB.
 - Temperatura de ruido de la entrada del receptor: 400 K.
 - Figura de ruido del receptor: 4 dB.
 - Impedancia de trabajo: 50Ω .
 - Cota de la probabilidad de símbolo erróneo de la 8APK:

$$P_s \leq 4 \operatorname{erfc} \left(\frac{1}{2} \sqrt{\frac{E_{dmin}}{N_0}} \right)$$

- En los apéndices, puede consultar los cuadros (tablas) o la gráfica de la función *erfc*.

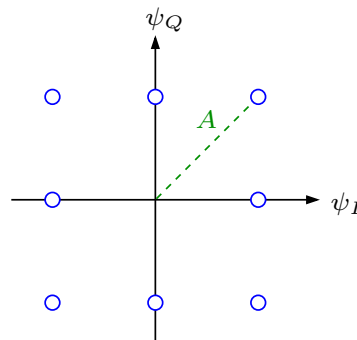


Figura 9.52: Constelación 8APK utilizada por el transmisor.

3. Indique una posible forma de codificación óptima de Gray. El símbolo de mayor amplitud del primer cuadrante está codificado con todo ceros. Indique también las regiones de decisión de símbolo.

Problema 9.74 (Julio de 2011)

Calcule las relaciones S/N y E_b/N_0 (ambas en dB) que tendremos en el receptor del sistema de comunicaciones digitales cuyos datos se dan a continuación:

- Modulación 8APK no óptima. En la figura 9.53 se observa la constelación.
- Filtrado en coseno alzado, con $\alpha = 0,4$.
- Potencia equivalente de pico (en el transmisor): 100 W.
- Régimen binario: 600 Mbits/s.
- Atenuación del canal: 106 dB.
- Temperatura de ruido de la entrada del receptor: 500 K.
- Figura de ruido del receptor: 7 dB.
- Impedancia de trabajo: 50 Ω .

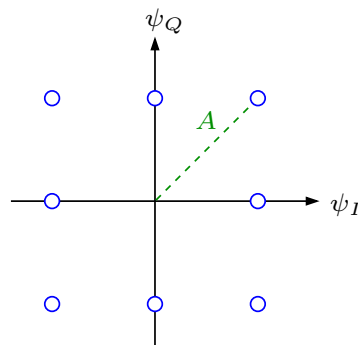


Figura 9.53: Constelación 8APK utilizada por el transmisor.

Problema 9.75 (Enero de 2012)

Para transmitir un conjunto de canales vocales se utiliza el sistema de comunicaciones mostrado en la figura 9.54.

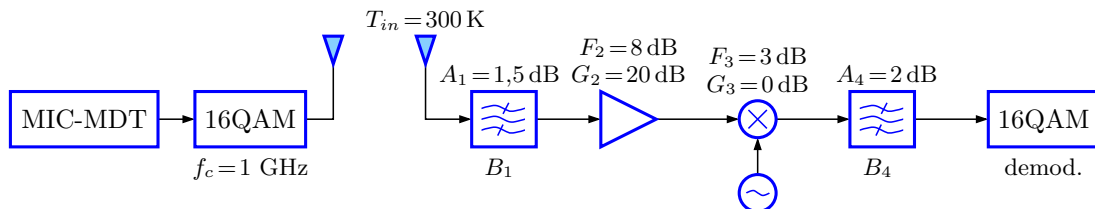


Figura 9.54: Sistema de comunicaciones.

El múltiplex MIC está formado por 30 canales vocales más 2 de señalización. Los canales vocales tienen un ancho de banda $W = 4$ kHz y son muestreados a 1,5 veces

su frecuencia de Nyquist. Los canales de señalización se codifican con 10 bits por canal, mientras que los de voz tienen 8 bits por muestra.

La constelación del modulador 16QAM es la mostrada en la figura 9.55.

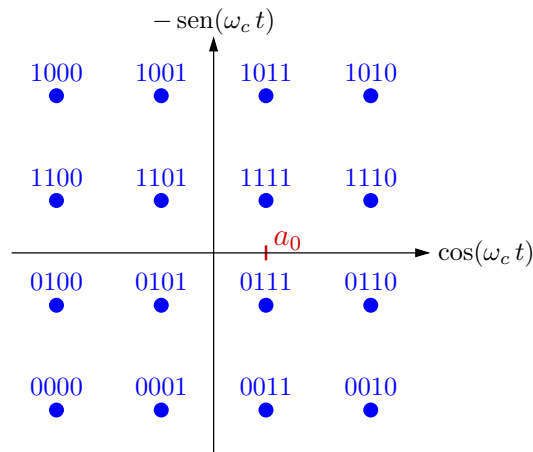


Figura 9.55: Constelación transmitida.

1. Determine el régimen binario a la salida del MIC-MDT. Determine el ancho de banda ocupado a la salida del modulador suponiendo un canal en coseno alzado con factor de redondeo $\alpha = 0,3$.
2. Obtenga la energía media por símbolo, a la salida del modulador, suponiendo que los símbolos son equiprobables. Deje el resultado en función de a_0 .
3. Dada la siguiente secuencia de bits 11011001001011000100 (el primer bit que entra es el de la izquierda), determine los símbolos a la salida del modulador (especificando módulos y fases) y dibuje las señales PAM correspondientes para los canales IQ del modulador. (Suponga que las portadoras ASK tienen amplitud 1 V.)
4. Sabiendo que la potencia de transmisión es de 6 dBW, y que el medio introduce una atenuación de 124 dB, determine la probabilidad de error de símbolo y de bit a la salida del demodulador. Use las gráficas de los apéndices, y señale claramente su solución.
5. ¿Cuál sería la probabilidad de error de símbolo si la potencia de transmisión se incrementara en 8 dB?

Problema 9.76 (Junio de 2012)

Calcule la relación E_b/N_0 (dB) que tendremos en el receptor de un sistema de comunicaciones digitales cuyos datos se dan a continuación:

- Modulación: 32QAM (en la figura 9.56 se observa la constelación).
- Potencia equivalente de pico en el transmisor: 100 W.
- Régimen binario: 600 Mb/s.
- Atenuación del canal: 109 dB.
- Temperatura de ruido a la entrada del receptor: 500 K.
- Figura de ruido del receptor: 7 dB.
- Impedancia de trabajo: 50 Ω .

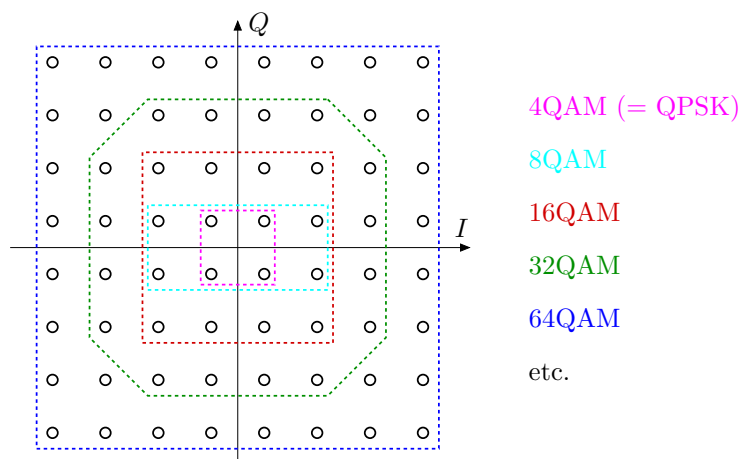


Figura 9.56: Constelaciones MQAM.

Problema 9.77 (Junio de 2012)

Se transmite una información digital con régimen binario $R_b = 8$ Mbps, a través de un medio radioeléctrico, a una frecuencia $f_c = 1$ GHz. Para ello se utiliza la constelación de la figura 9.57, en el transmisor, donde la distancia mínima entre símbolos es $d = 2 \cdot 10^{-3}$.

El medio introduce una atenuación de 80 dB. En la entrada del receptor hay una densidad espectral de ruido total equivalente de $N_0 = 10^{-15}$ W/Hz. Considere que todo el sistema se encuentra adaptado a $R = 1 \Omega$.

NOTA: consulte las gráficas de calidad de los apéndices.

1. Calcule la energía del símbolo transmitido 1010.

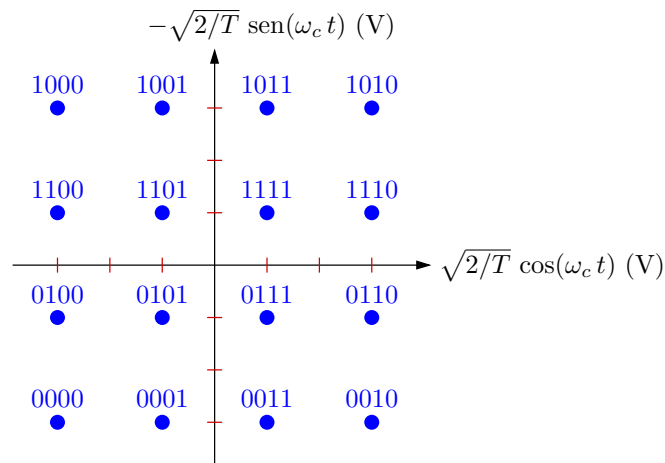


Figura 9.57: Constelación transmitida, con ejes ortonormales.

2. Determine la potencia media transmitida.
3. Escriba la expresión analítica del símbolo *transmitido* 1010, $s_{1010}(t)$. Sustituya todas las variables por sus valores numéricos.
4. Escriba la expresión analítica del símbolo *recibido* 1010, $s_{1010}(t)$, suponiendo ausencia de ruido. Sustituya todas las variables por sus valores numéricos.
5. La codificación utilizada, ¿es de tipo Gray? Justifique su respuesta.
6. Determine la probabilidad de bit erróneo en recepción.
7. En un instante determinado se recibe la señal con ruido $s_r(t) = 1,8 \cdot 10^{-4} \cos(\omega_c t + 2\pi/3)$ (en voltios para t en s). Determine las proyecciones sobre la base ortonormal. Indique qué decisión tomará el receptor. (NOTA: se aconseja pintar la constelación en recepción.)

Problema 9.78 (Julio de 2012)

En un sistema de radiocomunicaciones se desea transmitir, multiplexando en el tiempo, 37 canales estereofónicos de alta calidad junto con otros dos canales sencillos para señalización y alarmas. El ancho de banda de cada canal musical es de 20 kHz, la frecuencia a la que se muestrea cada canal musical es 1,25 veces la frecuencia mínima de muestreo, y el número de bits del cuantificador uniforme utilizado es de 18. Se utiliza una modulación 16QAM y el factor de roll-off del filtrado coseno alzado es 0,25.

1. Calcule el régimen binario que transmite el sistema. Calcule el ancho de banda de la señal modulada.
2. Obtenga la mínima potencia equivalente de pico que tendría que emitir el transmisor si se desea una BER menor de 10^{-8} .

3. Calcule el número de ciclos de portadora que hay en cada periodo de símbolo recibido.

Problema 9.80 (Enero de 2013)

De un sistema de comunicación digital se saben los siguientes datos:

- En la figura 9.59 se presenta el diagrama de bloques del sistema. La parte del receptor aparece detallada.
- La modulación empleada es M-QAM.
- En la figura 9.60 se observan los diagramas de ojos que se recibirían (puntos C_I y C_Q de la figura 9.59) en ausencia de ruido.
- El modulador entrega al medio (punto A) una potencia media $p_{TX} = 540$ mW.
- El medio de transmisión atenúa 60 dB.
- Se filtra en coseno alzado, con factor de redondeo $\alpha = 0,2$.
- La frecuencia portadora es $f_c = 2,4$ GHz.
- Todo el ruido del sistema equivale a una contribución unilateral blanca aditiva $N_0 = 7,8 \cdot 10^{-16}$ W/Hz, a la entrada del receptor (punto B).
- Se requiere una calidad BER mejor que 10^{-9} .
- Suponga que todo el sistema está adaptado a $R = 50 \Omega$.

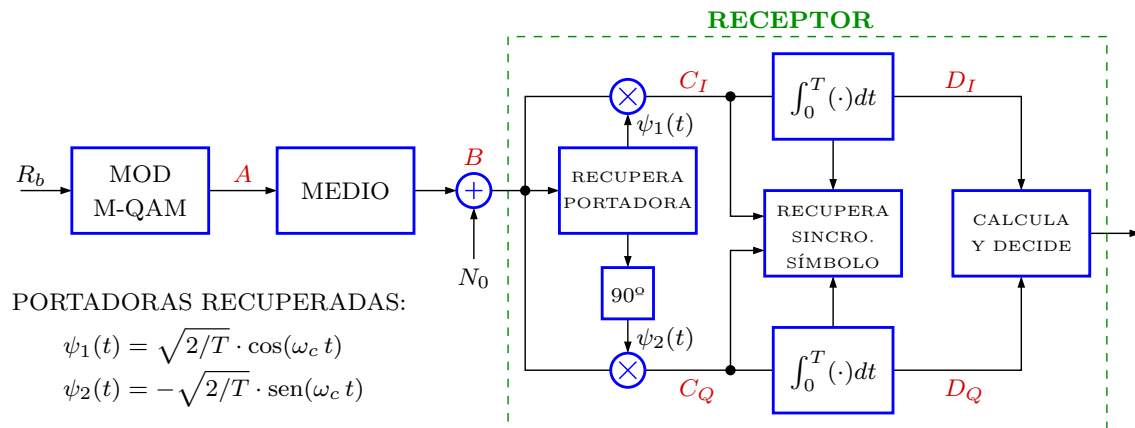


Figura 9.59: Diagrama de bloques del sistema de comunicación, con la parte del receptor detallada.

1. Indique, razonadamente, cuál es la modulación que se utiliza. ¿Cuántos símbolos tiene?
2. Calcule el régimen simbólico y el régimen binario del sistema.
3. Calcule el ancho de banda que ocupa la señal modulada.

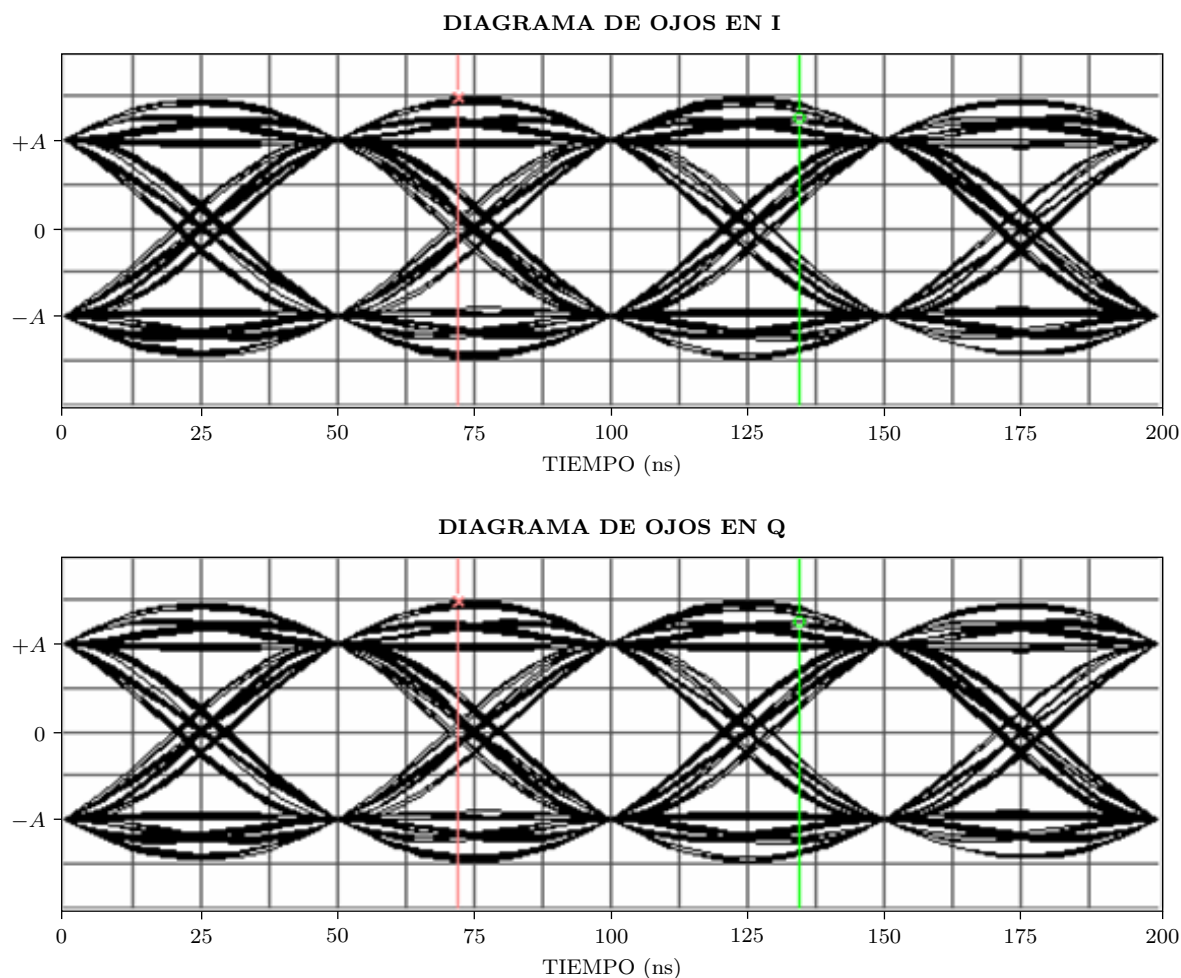


Figura 9.60: Diagrama de ojos en I y Q sin ruido. En los ejes verticales se representan voltios, en función de un parámetro A (desconocido).

4. Dibuje la constelación recibida (punto B), antes de sumar el ruido. Utilice ejes ortogonales (con energía unitaria); indique las coordenadas de cada señal. Realice una asignación de código según Gray.
5. Se reciben en el punto B , ya con ruido, las señales $s_1(t) = 3,162277 \cdot 10^{-8} \cdot \cos(\omega_c t + \pi/6)$, y $s_2(t) = 2,440102 \cdot 10^{-9} \cdot \cos(\omega_c t + 5\pi/8)$ (en voltios, para t en segundos). ¿Qué decisiones tomará el receptor?
6. Estudie si el sistema cumple el objetivo de calidad especificado.

(Nota: en los apéndices puede encontrar las ecuaciones de calidad de la modulación M-QAM y cuadros —tablas— de la función erfc .)

Problema 9.81 (Abril de 2013)

Un sistema digital usa una modulación 16APK cuya constelación se observa en la figura 9.61. La modulación está compuesta por dos modulaciones 8PSK, una de amplitud la mitad que la otra, y con fases iniciales diferentes (la de mayor amplitud con fase inicial cero, mientras que la otra tiene fase inicial $\pi/8$ radianes).

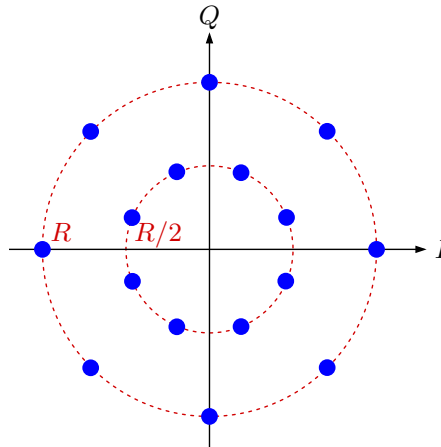


Figura 9.61: Constelación 16APK.

Datos del sistema:

- Potencia equivalentes de pico a la salida del transmisor: 80 W.
- Régimen binario: 400 Mbps.
- Atenuación del canal: 112 dB.
- Temperatura de ruido a la entrada del receptor: 300 K.
- Figura de ruido del receptor: 7 dB.
- Impedancia de trabajo: 50Ω .

1. Calcule la relación E_b/N_0 en recepción.
2. El transmisor utiliza la siguiente codificación:
 - Bit más significativo = amplitud ($1 \rightarrow$ amplitud R ; $0 \rightarrow$ amplitud $R/2$)
 - Resto de bits menos significativos = fase (valor creciente con ángulo creciente).

El receptor, para estimar el símbolo, utiliza primero un comparador de nivel (amplitud) y luego comparadores de fase.

Dibuje las regiones de decisión de símbolo del receptor, indicando los valores más significativos. Escriba una codificación binaria que siga las reglas expuestas.

Estudie si es posible una codificación de Gray.

Problema 9.82 (Abril de 2013)

En un sistema de radiocomunicaciones se desea transmitir, multiplexando en el tiempo, 32 canales musicales *estereofónicos* de alta calidad junto con otros dos canales sencillos para señalización y alarmas. El ancho de banda de cada canal musical es de 20 kHz, la frecuencia a la que se muestrea cada canal musical es 1,25 veces la frecuencia mínima teórica de muestreo, y el número de bits del cuantificador uniforme utilizado es de 14.

1. Calcule el régimen binario del sistema. Suponiendo que se utiliza la modulación 16APK cuya constelación aparece en la figura 9.62 y que se filtra en coseno alzado con factor de redondeo 0,5, calcule el ancho de banda de la señal modulada.

NOTA: la modulación 16APK está formada por dos modulaciones 8PSK, una de amplitud la mitad que la otra, y con fases iniciales diferentes (la de mayor amplitud con fase inicial cero, mientras que la otra tiene fase inicial $\pi/8$ radianes).

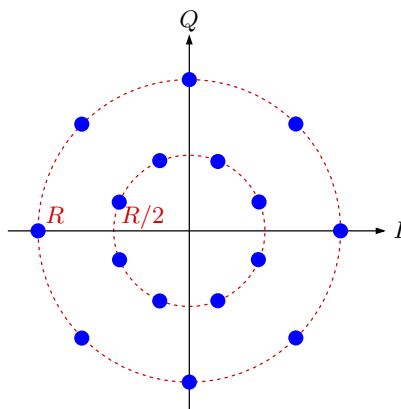


Figura 9.62: Constelación 16APK.

2. Suponiendo que se utiliza la modulación del apartado anterior, obtenga la mínima potencia equivalente de pico que tendría que emitir el transmisor si se desea una BER menor que $4 \cdot 10^{-8}$.

Datos adicionales:

- Atenuación del canal: 116 dB.
- Temperatura de ruido a la entrada del receptor: 375 K.
- Figura de ruido del receptor: 6 dB.
- Impedancia de trabajo: 50 Ω .

Probabilidad de símbolo erróneo en modulaciones MAPK:

$$P_s \leq \frac{M-1}{2} \operatorname{erfc} \left(\frac{\sqrt{E_d(\min)}}{2\sqrt{N_0}} \right)$$

Puede usar la gráfica o los cuadros (tablas) de la función *erfc* de los apéndices.

Problema 9.83 (Junio de 2013)

El nodo central de una red IP utiliza un satélite como concentrador de red, de modo que el enlace ascendente entre el nodo central y el satélite soporta la información de $N_{ET} = 68$ estaciones terrenas del sistema IP, y el satélite distribuye en el enlace descendente la señal a cada una de las estaciones terrenas. Por lo tanto, las velocidades binarias de los enlaces ascendente y descendente son diferentes. En todos los enlaces se utilizan modulaciones M-PSK con una codificación Gray. En la figura 9.63 se observa el sistema de comunicaciones propuesto.

El satélite se encuentra a una distancia $D = 36500$ km, tanto del nodo central como de los usuarios. La frecuencia del enlace ascendente es de 30 GHz, y la del enlace descendente es de 20 GHz. Las pérdidas de los enlaces en función de la frecuencia, $f(\text{GHz})$, de la distancia del enlace, $d(\text{km})$, y de las ganancias de las antenas, responden a las expresiones:

$$L[\text{e. ascend.}](\text{dB}) = 92,442 + 20 \log [f(\text{GHz})] + 20 \log [d(\text{km})] - G_{Nodo} - G_{1s}$$

$$L[\text{e. descend.}](\text{dB}) = 92,442 + 20 \log [f(\text{GHz})] + 20 \log [d(\text{km})] - G_{2s} - G_{ET}$$

Los datos relativos al enlace ascendente son:

- Potencia de transmisión del nodo central $p_{TXNodo} = 150$ W, aplicados a la antena.
- Ganancia de la antena del nodo central $G_{Nodo} = 50$ dB.
- Ganancia de la antena del satélite $G_{1s} = 40$ dB.
- Temperatura de antena en el satélite $T_{1s} = 300$ K.
- Ganancia del LNA del satélite $G_{a1s} = 30$ dB.
- Figura de ruido del LNA del satélite $F_{a1s} = 8$ dB.
- Pérdidas del filtro de RF del sat. $L_{f1s} = 3$ dB, a una temperatura física de 100 K.
- Ganancia del mezclador del satélite $G_{m1s} = -6$ dB.
- Figura de ruido del mezclador del satélite $F_{m1s} = 15$ dB.
- Probabilidad de error de bit: mejor que 10^{-4} .
- Régimen binario: soporta el flujo binario de las N_{ET} estaciones terrenas.
- Máximo ancho de banda disponible 27 MHz.

Los datos relativos al enlace descendente son (e.t. = estación terrena):

- Potencia de transmisión en el satélite por e.t. $p_{TXs} = 1$ W, antes de la antena.
- Ganancia de la antena del satélite $G_{2s} = 40$ dB.
- Ganancia de la antena de la e.t. $G_{ET} = 40$ dB.
- Temperatura de antena en la e.t. $T_{ET} = 150$ K.
- Ganancia del LNA de la e.t. $G_{aET} = 30$ dB.
- Figura de ruido del LNA de la e.t. $F_{aET} = 8$ dB.

- Pérdidas del filtro de RF de la e.t. $L_{fET} = 3$ dB, a una temperatura física de 70 K.
- Ganancia del mezclador de la e.t. $G_{mET} = -10$ dB.
- Figura de ruido del mezclador de la e.t. $F_{mET} = 10$ dB.
- Probabilidad de error de bit: mejor que 10^{-4} .
- Régimen binario de cada e.t.: 512 kbps.
- Máximo ancho de banda disponible por e.t.: $27/N_{ET}(\text{MHz})$.

NOTA: el canal de retorno de las estaciones terrenas no es objeto de este problema.

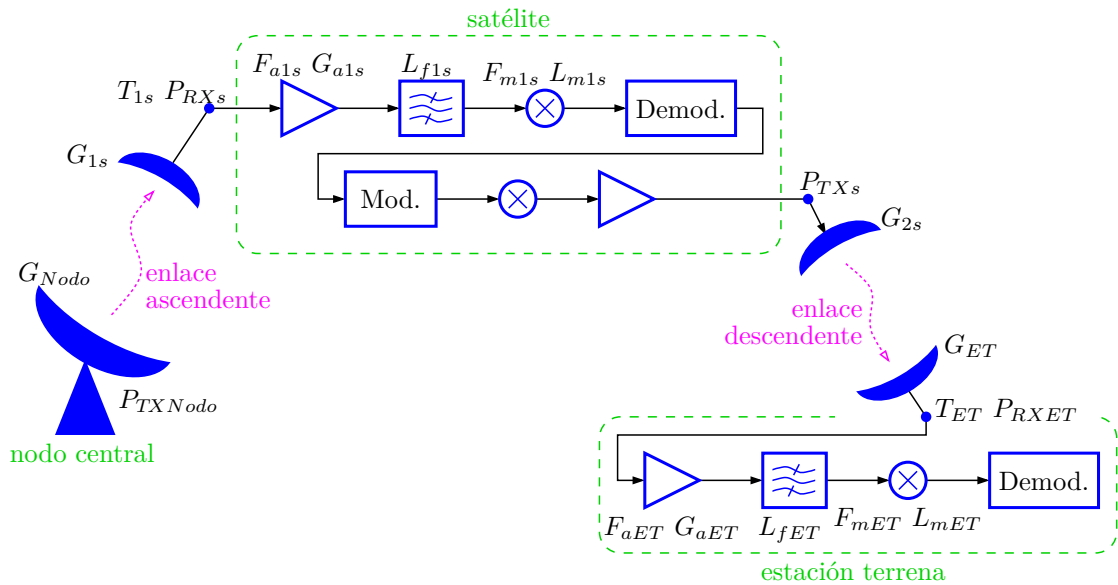


Figura 9.63: Sistema de comunicaciones propuesto.

1. Calcule la energía media por bit que llega al demodulador del satélite y al demodulador de una estación terrena. Suponga que ningún bloque distorsiona la señal transmitida.
2. Calcule la densidad espectral unilateral de potencia de ruido a la entrada del demodulador del satélite y a la entrada del demodulador de una estación terrena, dentro del ancho de banda de trabajo.
3. Seleccione razonadamente las modulaciones M-PSK de mayor M para el enlace ascendente y el descendente de una estación terrena. Para ello evalúe las probabilidades de error de bit del satélite y de una estación terrena, y compare los resultados con los requisitos de probabilidad de error de bit. Puede usar las gráficas de calidad de los apéndices.
4. Compruebe que el ancho de banda máximo disponible es suficiente si el factor de roll-off es 0,5.

Problema 9.84 (Julio de 2013)

Un sistema digital ha de transmitir 22 canales vocales con un ancho de banda de 4 kHz cada uno. Para ello forma un múltiplex MIC cuantificando uniformemente los canales de información con 12 bits, completando la trama con 2 canales de señalización de 8 bits cada uno.

1. Calcule el régimen binario de salida del MIC.
2. Se cambian los cuantificadores a no uniformes ley A , con parámetro $A = 87,6$. Determine el nuevo régimen binario. Tenga en cuenta que se mantiene la calidad.
3. El sistema ha de transmitir la información, mediante una modulación digital lineal, a través de un canal paso banda en coseno alzado con factor de redondeo $\alpha = 0,2$ y un ancho de banda $B = 1228,8$ kHz. Determine el máximo régimen binario que admite el canal y cuántos bits por símbolo serían necesarios para poder transmitir el múltiplex MIC. Conforme al resultado anterior, elija la modulación adecuada. Calcule el régimen simbólico que se transmite.

El sistema determinado en los apartados previos utiliza el modulador de la figura 9.64.

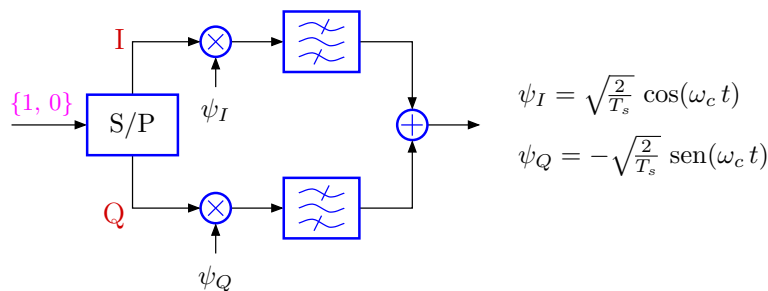


Figura 9.64: Diagrama de bloques del modulador.

Donde el conversor S/P (serie/paralelo) agrupa los bits serie recibidos y entrega las 2 salidas en paralelo de las ramas I y Q .

4. Dibuje el diagrama de ojos del canal I o Q ante del mezclador, indicando el margen contra el ruido y el margen contra los errores en el instante de muestreo.
5. Dibuje la constelación indicando las regiones de decisión.
6. Obtenga la energía media por símbolo y por bit dejándolas en función de las coordenadas de los símbolos. Calcule la eficiencia espectral.
7. Dibuje el diagrama de bloques del demodulador.
8. Suponiendo que a la entrada del receptor se tiene una potencia de -70 dBm y que la densidad espectral de potencia de ruido unilateral es de $-171,86$ dBW/Hz, calcule

la probabilidad de error de bit a la salida del demodulador. Puede usar las gráficas de calidad de los apéndices.

9. Se requiere aumentar la eficiencia espectral hasta al menos 4 bps/Hz. Calcule la potencia recibida necesaria, teniendo en cuenta que hay que mantener la probabilidad de error de bit del apartado anterior.

Parte III

SOLUCIONES



Usted es libre de:

Compartir — copiar y redistribuir el material en cualquier medio o formato

Adaptar — remezclar, transformar y crear a partir del material

El licenciador no puede revocar estas libertades mientras cumpla con los términos de la licencia.

Bajo las condiciones siguientes:



Reconocimiento — You must give appropriate credit, provide a link to the license, and indicate if changes were made. You may do so in any reasonable manner, but not in any way that suggests the licensor endorses you or your use.



NoComercial — No puede utilizar el material para una finalidad comercial.

No hay restricciones adicionales — No puede aplicar términos legales o medidas tecnológicas que legalmente restrinjan realizar aquello que la licencia permite.

Tema 1

MODELO

No hay problemas para este tema.

Tema 2

SEÑALES

Problema 2.1

El alumno debe saber que las sinusoides de distinta frecuencia son aditivas en potencia (en unidades naturales).

Vamos a resolver el problema por dos caminos. Empezamos trabajando con unidades naturales. Pasamos todas las potencias a mW, y las sumamos:

$$P_1 = -13 \text{ dBm} \rightarrow p_1 = 10^{-13/10} \approx 0,05 \text{ mW}$$

$$P_2 = -13 \text{ dBm} \rightarrow p_2 = 10^{-13/10} \approx 0,05 \text{ mW}$$

$$p_3 = 0,1 \text{ mW}$$

$$p_T = p_1 + p_2 + p_3 \approx 0,2 \text{ mW}$$

$$P_T = 10 \log(0,2) \approx -7 \text{ dBm}$$

Por supuesto, no podemos sumar las potencias en unidades logarítmicas:

$$P_T(\text{dBm}) \neq P_1(\text{dBm}) + P_2(\text{dBm}) + P_3(\text{dBm})$$

Segundo camino: trabajamos directamente con unidades logarítmicas. Como P_1 y P_2 son iguales, al sumar sus potencias obtenemos el doble de una de ellas, es decir: sumamos 3 dB a una de ellas:

$$p_{12} = p_1 + p_2$$

$$P_{12} \approx P_1 + 3(\text{dB}) = -13 + 3 = -10 \text{ dBm}$$

Y ahora sumamos a la potencia de las dos primeras sinusoides la potencia de la tercera:

$$p_T = p_{12} + p_3$$

$$P_T \approx P_{12} + 3 = -10 + 3 = -7 \text{ dBm}$$

Nótese que este segundo camino merece la pena porque los valores de las potencias son muy favorables.

Problema 2.2

Pasamos la tensión eficaz a unidades naturales:

$$V_{ef} = 100 \text{ dB}\mu\text{V} \rightarrow v_{ef}(\mu\text{V}) = 10^{100/20} = 10^5$$

$$v_{ef} = 0,1 \text{ V}$$

La potencia (de alterna) disipada en la resistencia es:

$$p = \frac{v_{ef}^2}{R} = \frac{0,1^2}{50} = 0,2 \text{ mW}$$

$$P \approx -7 \text{ dBm}$$

Problema 2.3

Cuadruplicar una tensión es multiplicar por $a = 4$ (veces de señal). Pasamos a dB:

$$\Delta L = 20 \log[4(\text{v.s.})] \approx 12,0 \text{ dB}$$

Luego se produce un incremento de 12 dB (¡tanto en potencia como en señal!).

Problema 2.4

Tenemos un cable de longitud $L(\text{m})$ que atenúa $A(\text{dB})$ (en todo su recorrido). El cable equivale a un cuadripolo pasivo que atenúa a veces de potencia (ver figura 2.1), donde:

$$A(\text{dB}) = 10 \log[a(\text{v.p.})]$$

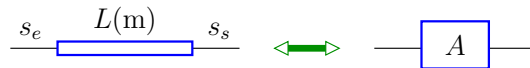


Figura 2.1: Diagrama de bloques equivalente del cable.

Si a la entrada ponemos una potencia de señal s_e (unidades naturales), a la salida habrá una potencia s_s (unidades naturales) a veces más pequeña:

$$s_s = \frac{s_e}{a} \Rightarrow a = \frac{s_e}{s_s}$$

Ahora triplicamos la distancia de cable. Esto equivale a situar tres cuadripolos como el original en cascada (ver figura 2.2).

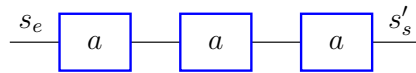


Figura 2.2: Cable de longitud triple.

Suponemos que a la entrada seguimos teniendo una potencia s_e . Para calcular la nueva potencia a la salida, s'_s , afectamos s_e por los tres cuadripolos en cascada:

$$s'_s = s_e \cdot \frac{1}{a} \cdot \frac{1}{a} \cdot \frac{1}{a} \Rightarrow a' = a^3 = \frac{s_e}{s'_s}$$

De manera que la atenuación del cable de longitud triple, a' , es la atenuación del cable original (a) elevada al cubo (al aumento de longitud). Esto no es muy cómodo para realizar operaciones. En unidades logarítmicas:

$$A'(\text{dB}) = 10 \log[a^3] = 3 \cdot 10 \log(a) = 3 \cdot A(\text{dB})$$

Vemos que el cable de longitud triple atenúa tres veces más (en dB). Luego la atenuación de un cable (en general de un atenuador pasivo) en unidades logarítmicas es lineal con la longitud.

Los cables vienen caracterizados en los catálogos por su atenuación normalizada a una cierta longitud. Supongamos un cable de $\alpha(\text{dB/m})$; si tenemos un trozo de cable de $L(\text{m})$, la atenuación total que produce, $A_t(\text{dB})$ es:

$$A_t(\text{dB}) = \alpha(\text{dB/m}) \cdot L(\text{m})$$

(Este resultado es muy importante.)

Problema 2.5

Hay dos incógnitas: $G(\text{dB})$ la ganancia del amplificador, y $\alpha(\text{dB/m})$ la atenuación por unidad de longitud del coaxial. Con cada medida formamos una ecuación, de manera que nos queda un sistema de dos ecuaciones con dos incógnitas. En la figura 2.3 se ilustra la correspondencia de cada medida con una ecuación.

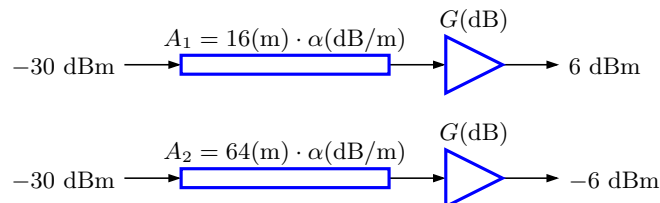


Figura 2.3: Diagrama de bloques de las medidas.

Las ecuaciones son:

$$6 = -30 - 16 \cdot \alpha + G$$

$$-6 = -30 - 64 \cdot \alpha + G$$

Despejando las incógnitas se obtiene:

$$\alpha = 0,25 \text{ dB/m}$$

$$G = 40 \text{ dB}$$

Problema 2.6

Potencia de señal:

$$s = 20 \text{ nW} \rightarrow S \approx -47 \text{ dBm}$$

La potencia de ruido se obtiene integrando la densidad espectral (unilateral) de potencia en el espectro positivo:

$$n = \int_0^\infty G_n(f) df = N_0 \cdot B$$

$$N = -147 + 10 \log(8 \cdot 10^6) \approx -78 \text{ dBm}$$

La relación entre potencias es:

$$\left(\frac{S}{N}\right) = S - N = -47 - (-78) = 31 \text{ dB}$$

Problema 2.7

Tenemos calidades parciales respecto al ruido, (S/N) , y respecto a cada interferente, (S/I_1) , (S/I_2) , (S/I_3) . Las potencias de ruido e interferentes se suman (en unidades naturales), pues son señales incorreladas. Si nos fijamos, el numerador (potencia de señal) es siempre el mismo, mientras que el denominador (potencia de ruido o de la interferencia i) cambia; en estos casos es más fácil operar con relaciones ruido (o interferencia) a señal, pues obtenemos fracciones con denominador común:

$$n_T(W) = n + i_1 + i_2 + i_3$$

$$\frac{n_T}{s}(\text{v.p.}) = \frac{n + i_1 + i_2 + i_3}{s} = \frac{n}{s} + \frac{i_1}{s} + \frac{i_2}{s} + \frac{i_3}{s}$$

Como los datos son favorables, podemos razonar con dB directamente:

$$\frac{I_1}{S} = -26 \text{ dB}$$

$$\frac{I_2}{S} = -26 \text{ dB}$$

$$\frac{I_1 + I_2}{S} = -26 + 3 = -23 \text{ dB}$$

$$\frac{I_3}{S} = -23 \text{ dB}$$

$$\frac{I_1 + I_2 + I_3}{S} = -23 + 3 = -20 \text{ dB}$$

$$\frac{N}{S} = -20 \text{ dB}$$

$$\frac{I_1 + I_2 + I_3 + N}{S} = -20 + 3 = -17 \text{ dB}$$

$$\frac{S}{I_1 + I_2 + I_3 + N} = 17 \text{ dB}$$

Observaciones:

- $I_1 + I_2 + I_3 + N$ es una notación muy extendida para indicar el resultado logarítmico (dBm) de sumar las potencias en unidades naturales (W), no indica que se puedan sumar directamente en dBm.
- Se recomienda al alumno que resuelva el problema en unidades naturales (veces de potencia).

Problema 2.8

Pasamos la tensión a unidades naturales:

$$v_{ef} = 10^{100/20} = 10^5 \text{ } \mu\text{V} \rightarrow 0,1 \text{ V}$$

Calculamos la potencia a la entrada del cable:

$$p_i = \frac{v_{ef}^2}{R} = \frac{0,1^2}{50} = 2 \cdot 10^{-4} \text{ W} \rightarrow P_i \approx -37 \text{ dBW}$$

Calculamos la atenuación del cable:

$$A = \alpha \cdot L = 0,2 \cdot 150 = 30 \text{ dB} \rightarrow a = 1000 \text{ v.p.}$$

Pasamos la potencia por el cable:

$$P_o = P_i - A = -37 - 30 = -67 \text{ dBW}$$

Imponemos la relación señal a ruido y despejamos el ruido:

$$\frac{S}{N} = 33 = P_o - N = -67 - N$$

$$N = -100 \text{ dBW} \rightarrow -70 \text{ dBm}$$

Problema 2.9

A la desadaptación llega la potencia incidente, $P_i = 10$ dBm. Esa potencia se reparte entre transmitida, P_t , y reflejada, P_r . Por lo tanto (¡y en unidades naturales!):

$$p_i = p_t + p_r$$

Como la potencia incidente es de 10 mW, y la transmitida de 5 mW, la reflejada ha de ser:

$$p_r = 10 - 5 = 5 \text{ mW}$$

Los datos permiten razonar directamente en unidades logarítmicas: la potencia incidente, de 10 dBm, se divide en 7 dBm transmitidos (una mitad), y otros 7 dBm reflejados (la otra mitad).

$$P_r = 7 \text{ dBm}$$

En la figura 2.4 se ilustra el problema.

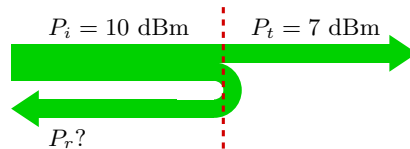


Figura 2.4: Reparto de potencias en una desadaptación.

Problema 2.10

Contestamos los apartados **1** y **2** para cada una de las señales.

- Señal (a): es una senoide matemática (definida $\forall t$).

$$p_x = \frac{A^2}{2R} = \frac{A^2}{2} \text{ W}$$

$$E_x \rightarrow \infty$$

Luego es una señal de potencia.

- Señal (b): dibujamos la señal (ver figura 2.5).

$$E_x = p \cdot T = \frac{A^2}{2R} T_0 = \frac{A^2}{2} T_0 \text{ J}$$

$$p_x = 0 \text{ W}$$

Luego es una señal definida en energía.

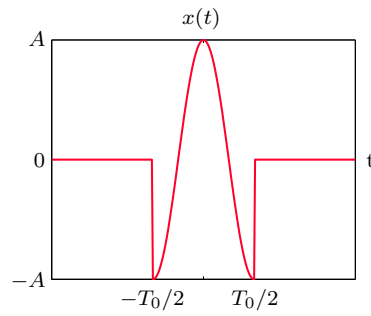


Figura 2.5: Señal (b).

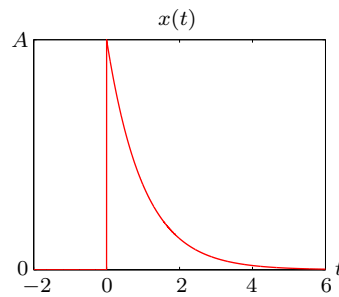


Figura 2.6: Señal (c).

- Señal (c): dibujamos la señal (ver figura 2.6).

$$E_x = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^2(t)}{R} dt = \int_0^{\infty} A^2 \exp(-2a t) dt$$

$$E_x = \frac{-A^2}{2a} [\exp(-2a t)]_0^{\infty} = \frac{A^2}{2a} \text{ J}$$

$$p_x = 0 \text{ W}$$

Luego es una señal definida en energía.

- Señal (d): es una señal periódica, definida $\forall t$.

$$p_x = \frac{\langle x^2(t) \rangle}{R} = \langle \cos^2(t) \rangle + \langle 5^2 \cos^2(5t) \rangle + \left\langle \frac{2 \cdot 5}{2} [\cos(6t) + \cos(4t)] \right\rangle$$

$$p_x = \langle \cos^2(t) \rangle + \langle 5^2 \cos^2(5t) \rangle + 0$$

$$p_x = \frac{1^1}{2} + \frac{5^2}{2} = 13 \text{ W}$$

$$E_x \rightarrow \infty$$

Luego es una señal definida en potencia.

Problema 2.11

1. Para pasar una densidad de potencia por el filtro, calculamos el módulo de la transferencia al cuadrado:

$$|H(f)|^2 = \frac{1}{1 + (f/f_{cc})^2}$$

De manera que, a la salida, obtenemos:

$$G_y(f) = G_x(f) \cdot |H(f)|^2 = \frac{N_0}{2} \cdot \frac{1}{1 + (f/f_{cc})^2} \text{ W/Hz}$$

2. Calculamos la potencia media de ruido integrando la densidad espectral de potencia:

$$p_y = \int_{-\infty}^{\infty} G_y(f) df = \frac{N_0}{2} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{1 + (f/f_{cc})^2} df$$

$$u = f/f_{cc}; \quad du = df/f_{cc}$$

$$p_y = \frac{N_0}{2} \int_{-\infty}^{\infty} f_{cc} \frac{1}{1 + u^2} du = \frac{N_0}{2} f_{cc} [\arctan(u)]_{-\infty}^{\infty} = \frac{N_0}{2} f_{cc} \left[\frac{\pi}{2} - \frac{-\pi}{2} \right]$$

$$p_y = \frac{N_0}{2} f_{cc} \pi = \frac{N_0}{4RC} \text{ W}$$

3. Ancho de banda equivalente:

$$p_y = 2 \cdot B_{eq} \cdot [G_y(f)]_{max}$$

$$\frac{N_0}{4RC} = 2 \cdot B_{eq} \cdot \frac{N_0}{2}$$

$$B_{eq} = \frac{1}{4RC} \text{ Hz}$$

El ancho de banda a 3 dB, por definición, es la frecuencia de corte:

$$B_{3dB} = f_{cc} = \frac{1}{2\pi RC} \text{ Hz}$$

Problema 2.12 (Abril de 1992)

Antes de empezar, simplificamos la señal con operaciones trigonométricas:

$$x(t) = 2 \cos(500t) + 4 \sin^2(100\pi t + \pi/2) \text{ (voltios)}$$

$$x(t) = 2 \cos(500t) + 4 \frac{1}{2} [1 - \cos(200\pi t + \pi)]$$

$$x(t) = \underbrace{2 \cos(500t)}_{(1)} + \underbrace{2}_{(3)} + \underbrace{2 \cos(200\pi t)}_{(2)}$$

Ahora vemos claramente que la señal $x(t)$ está compuesta por dos tonos de diferente frecuencia —términos (1) y (2)— y por una parte de continua (3).

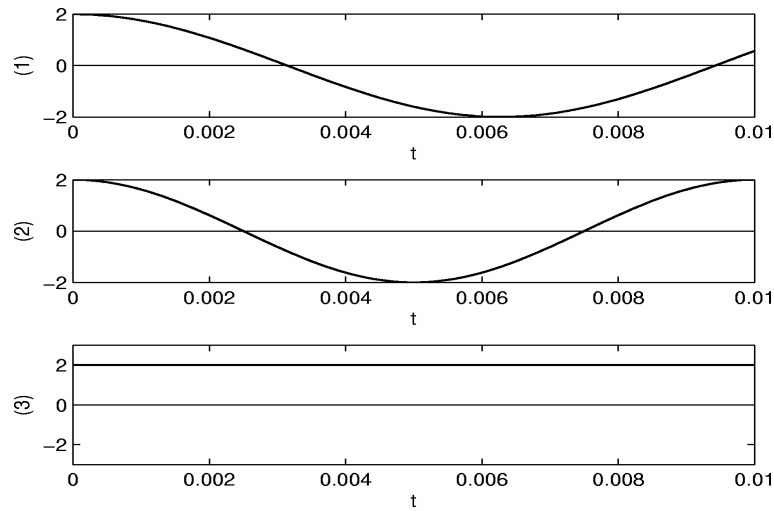


Figura 2.7: Componentes de la señal. El eje vertical está en voltios y el horizontal en segundos.

1. Dibujamos cada una de las tres componentes de la señal —(1), (2) y (3)—, (ver figura 2.7).

En $t = 0$ la señal $x(t)$ (suma de las componentes) alcanza un máximo. En concreto:

$$x_p = x(0) = 6 \text{ V}$$

El valor medio será:

$$\langle x(t) \rangle = \langle 2 \cos(500t) \rangle + \langle 2 \rangle + \langle 2 \cos(200\pi t) \rangle = 0 + 2 + 0 = 2 \text{ V}$$

Valor cuadrático medio:

$$\begin{aligned} \langle x^2(t) \rangle &= \langle [2 \cos(500t) + 2 + 2 \cos(200\pi t)]^2 \rangle \\ &= \langle 4 \cos^2(500t) \rangle + \langle 4 \rangle + \langle 4 \cos^2(200\pi t) \rangle + \\ &\quad + \underbrace{\langle 8 \cos(500t) \cos(200\pi t) \rangle}_{=0} + \underbrace{\langle 8 \cos(500t) \rangle}_{=0} + \underbrace{\langle 8 \cos(200\pi t) \rangle}_{=0} \\ &= \langle 4(1/2)[1 + \cos(1000t)] \rangle + 4 + \langle 4(1/2)[1 + \cos(400\pi t)] \rangle + \\ &\quad + \underbrace{\langle 4[\cos(500t + 200\pi t) + \cos(500t - 200\pi t)] \rangle}_{=0} \\ &= 4 \frac{1}{2} + 4 + 4 \frac{1}{2} = 8 \end{aligned}$$

El valor cuadrático medio coincide numéricamente con la potencia total de la señal sobre una resistencia de 1Ω (puesto que dividimos por $R = 1$, y el resultado no cambia). Siguiendo esta interpretación, el valor calculado está en vatios. Por otro lado, si consideramos que el valor cuadrático medio no es más que el promedio del cuadrado de una señal (en voltios), el resultado obtenido estará en V^2 , ya que se trata de una potencia disponible en bornas. Al aplicarla sobre una resistencia, dividimos por su valor, en Ω , y obtenemos los vatios desarrollados.

El valor eficaz se calcula fácilmente usando la definición:

$$x_{ef} = \sqrt{\langle x^2(t) \rangle - \langle x(t) \rangle^2} = \sqrt{8 - 2^2} = 2 \text{ V}$$

Como x_{ef} es la potencia de alterna (p_{CA}), también podemos realizar el cálculo sumando las potencias de los dos tonos —señales (1) y (2)—:

$$x_{ef}^2 = \frac{2^2}{2} + \frac{2^2}{2} = 2 \text{ W}$$

2. La señal (1) y la señal (2) son periódicas, pues son sinusoides. El período de la primera es $T_1 = (2\pi)/\omega_1 = (2\pi)/500 \text{ s}$; el periodo de la segunda $T_2 = (2\pi)/\omega_2 = (2\pi)/(200\pi) \text{ s}$. La señal (3), al ser continua, también es periódica.

Para que la señal suma, $x(t)$, sea periódica es necesario que los periodos T_1 y T_2 tengan mínimo común múltiplo —que además será el periodo de $x(t)$ —. Es decir, han de existir dos números naturales, m y n , tales que:

$$n T_1 = m T_2 = T \text{ (periodo de } x)$$

Formamos la fracción n/m , que ha de ser un número racional (cociente de dos naturales):

$$\frac{n}{m} = \frac{T_2}{T_1} = \frac{5}{2\pi} \text{ que NO es racional}$$

Luego no existe un mínimo común múltiplo de T_1 y T_2 , y la señal $x(t)$ NO es periódica.

Problema 2.13 (Abril de 1992)

Dibujamos la densidad espectral de potencia de la señal $x(t)$, y señalamos los parámetros de interés (ver figura 2.8).

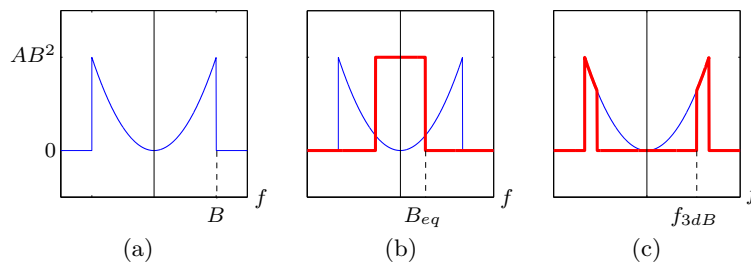


Figura 2.8: Densidad espectral de potencia de $x(t)$.

Para el ancho de banda equivalente generamos una densidad rectangular (roja en la figura), e imponemos que ambas densidades encierren igual potencia:

$$B_{eq} \cdot A B^2 = \int_0^B A f^2 df = \frac{A}{3} [f^3]_0^B = \frac{A B^3}{3}$$

$$B_{eq} = \frac{B}{3}$$

Para el ancho de banda a 3 dB buscamos el máximo de la densidad original ($A B^2$) y buscamos dónde se produce la caída a mitad de potencia:

$$\frac{A B^2}{2} = A f_{3\text{ dB}}^2$$

$$f_{3\text{ dB}} = \frac{B}{\sqrt{2}}$$

Si consideramos que la señal es paso bajo, sigue ocupando hasta B el mismo ancho de banda. Si consideramos que la señal puede ponerse como paso banda, el ancho de banda irá desde $f_{3\text{ dB}}$ hasta B :

$$B_{3\text{ dB}} = B - f_{3\text{ dB}} = B \left(\frac{\sqrt{2} - 1}{\sqrt{2}} \right)$$

Tema 3

RUIDO

Problema 3.1

El espectro estará formado por: a) una delta a 10 MHz de -10 dBm; b) una delta a 40 MHz de -16 dBm, y c) una densidad espectral de potencia de ruido, N_0 dBm/Hz. (Recuerde que el analizador representa espectros con valores unilaterales.) Cálculos de apoyo:

$$p_1 = \frac{0,1^2}{2 \cdot 50} = 10^{-4} \text{ W} \rightarrow -10 \text{ dBm}$$

$$p_2 = \frac{0,05^2}{2 \cdot 50} = 2,5 \cdot 10^{-5} \text{ W} \rightarrow -16 \text{ dBm}$$

$$n = N_0 \cdot RBW = 10^{-12} \cdot 10^6 = 10^{-6} \text{ W} \rightarrow -30 \text{ dBm}$$

En la figura 3.1 observamos la pantalla resultante.

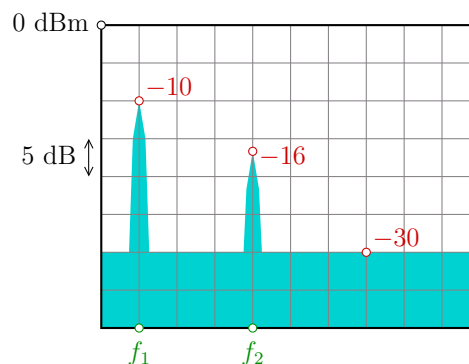


Figura 3.1: Pantalla resultante.

Problema 3.2 (Abril de 1992)

1. Para calcular el factor de ruido de una cascada siempre podemos aplicar la fórmula de Friis:

$$f_1 = 2 \text{ v.p.}$$

$$f_2 = 1 + \frac{T_{e2}}{T_0} = 1 + \frac{3000}{300} = 11 \text{ v.p.}$$

$$f_T = f_1 + \frac{f_2 - 1}{g_1} = 2 + \frac{11 - 1}{10} = 3 \text{ v.p.}$$

$$F_T \approx 4,8 \text{ dB}$$

Trabajando con temperaturas sale el mismo resultado:

$$T_{e1} = 300 (2 - 1) = 300 \text{ K}$$

$$T_{eT} = T_{e1} + \frac{T_{e2}}{g_1} = 300 + \frac{3000}{10} = 600 \text{ K}$$

$$f_T = 1 + \frac{T_{eT}}{T_0} = 1 + \frac{600}{300} = 3 \text{ v.p.}$$

2. Modelamos el ruido a la entrada como una temperatura:

$$\frac{N_0}{2} = 200 \cdot 1,3806 \cdot 10^{-23} = \frac{1,3806 \cdot 10^{-23} \cdot T_{in}}{2}$$

$$T_{in} = 400 \text{ K}$$

Como no es T_0 trabajamos con temperaturas:

$$T_T = T_{in} + T_{eT} = 400 + 600 = 1000 \text{ K}$$

$$G_T = G_1 + G_2 = 10 - 10 = 0 \rightarrow g_T = 1 \text{ v.p.}$$

$$n_s = k \cdot T_T \cdot B \cdot g_T = 1,3806 \cdot 10^{-23} \cdot 1000 \cdot 10 \cdot 10^3 \cdot 1 = 1,3806 \cdot 10^{-16} \text{ W}$$

El alumno debe comprobar que trabajando con f_T el resultado es incorrecto.

Problema 3.3 (Febrero de 1993)

El factor de ruido se obtiene, por definición, comparando las calidades a la entrada y a la salida, cuando a la entrada el ruido es $k T_0 B$:

$$F \equiv (S/N)_e - (S/N)_s; \quad n_e = k T_0 B$$

Como no tenemos constancia de que a la entrada haya T_0 , no podemos aplicar directamente la definición:

$$F \neq (S/N)_e - (S/N)_s = 50 - 30 = 20 \text{ dB} \quad \text{¡NO!}$$

Planteamos las ecuaciones que permiten obtener las potencias (de señal y ruido) a la salida:

$$n_s = n_e g + k T_e B g$$

$$s_s = s_e g$$

Dividimos la primera igualdad por la segunda:

$$\frac{n_s}{s_s} = \frac{n_e}{s_e} + \frac{k T_e B}{s_e}$$

Despejamos la temperatura equivalente de ruido interno:

$$T_e = \frac{s_e}{k B} \left[\left(\frac{n}{s} \right)_s - \left(\frac{n}{s} \right)_e \right]$$

Y el factor de ruido es:

$$f = 1 + \frac{T_e}{T_0} = 1 + \frac{s_e}{k T_0 B} \left[\left(\frac{n}{s} \right)_s - \left(\frac{n}{s} \right)_e \right]$$

Ahora sustituimos los datos:

$$s_e = 10^{-10} \text{ W}$$

$$\left(\frac{n}{s} \right)_s = 10^{-3} \text{ v.p.}$$

$$\left(\frac{n}{s} \right)_e = 10^{-5} \text{ v.p.}$$

$$f = 1 + \frac{10^{-10}}{1,3806 \cdot 10^{-23} \cdot 300 \cdot 4000} [10^{-3} - 10^{-5}]$$

$$f \approx \frac{10^{-10}}{1,3806 \cdot 10^{-23} \cdot 300 \cdot 4000} [10^{-3}] = 6036 \text{ v.p.}$$

$$F \approx 37,8 \text{ dB}$$

Problema 3.4 (Febrero de 1997)

1. Como el ruido a la entrada es T_0 podemos calcular el ruido a la salida mediante el factor de ruido:

$$n_s = k T_0 B \cdot g \cdot f$$

Dividimos por el ancho de banda, y obtenemos densidad espectral de potencia:

$$G_{ns} = \frac{n_s}{B} = k T_0 \cdot g \cdot f$$

Tomamos la expresión anterior, en unidades logarítmicas, y sustituimos los datos de cada uno de los amplificadores:

$$G_{nsA}(\text{dBm/Hz}) = -140 = -174 + 30 + F_A$$

$$F_A = 4 \text{ dB} \rightarrow f_A \approx 2,5 \text{ v.p.}$$

$$G_{nsB}(\text{dBm/Hz}) = -130 = -174 + 36 + F_B$$

$$F_B = 8 \text{ dB} \rightarrow f_B \approx 6,3 \text{ v.p.}$$

2. La ganancia de la cascada de los dos amplificadores es independiente del orden en que se coloquen. Sin embargo, desde el punto de vista de ruido, el orden sí altera el resultado. Calculamos el factor de ruido total con el amplificador A seguido del B:

$$f_T = f_A + \frac{f_B - 1}{g_1} = 2,5 + \frac{6,3 - 1}{1000} \approx 2,5 \text{ v.p.}$$

Y ahora con el B seguido del A:

$$f_T = f_B + \frac{f_A - 1}{g_1} = 6,3 + \frac{2,5 - 1}{4000} \approx 6,3 \text{ v.p.}$$

Queda claro que el primer amplificador, sea el A o el B, hace despreciable el ruido del segundo, de manera que es preferible colocar primero el A.

3. Relación señal a ruido:

$$S = -110 \text{ dBm}$$

$$n = k T_0 \cdot B \cdot f_T$$

$$N = -174 + 10 \log(10^6) + 4 = -110 \text{ dBm}$$

$$\left(\frac{S}{N} \right) = S - N = -110 - (-110) = 0 \text{ dB}$$

Comentario: los sistemas de comunicaciones normales no pueden funcionar con una relación señal a ruido tan baja. (Ciertos sistemas —radar, CDMA— son capaces de trabajar con relaciones incluso negativas.)

Problema 3.5 (Junio de 1998)

1. Temperatura equivalente de una sección:

$$T_{ei} = \frac{T_a (g - 1)}{g}$$

Como la ganancia de cada sección es 1 v.p., la temperatura equivalente del conjunto de secciones, a la entrada o a la salida, es:

$$T_e = M \frac{T_a (g - 1)}{g}$$

2. Señal ruido que realmente existe a la entrada:

$$\left(\frac{s}{n} \right)_{IN} (\text{v.p.}) = \frac{p_x}{k T_0 B}$$

3. Para la señal ruido a la salida tenemos dos contribuciones de ruido: ruido a la entrada y ruido interno

$$\left(\frac{s}{n} \right)_{OUT} (\text{v.p.}) = \frac{p_x}{k T_0 B + k T_e B}$$

$$\left(\frac{s}{n} \right)_{OUT} (\text{v.p.}) = \frac{p_x}{k B \left[T_0 + M \frac{T_a (g-1)}{g} \right]}$$

4. Como el ruido a la entrada es T_0 el factor de ruido de las M secciones es la relación de calidades:

$$f = \frac{(s/n)_{IN}}{(s/n)_{OUT}} = 1 + M \left(\frac{g-1}{g} \right)$$

$$f = 1 + M - \frac{M}{g}$$

5. Valor de la figura de ruido:

$$F = 10 \log \left[1 + 3 \left(\frac{3-1}{3} \right) \right] \approx 4,8 \text{ dB}$$

Problema 3.6 (Septiembre de 1998)

1. Es la temperatura de ruido a la entrada:

$$N_0 = k T_{in}$$

$$8 \cdot 10^{-21} = 1,3806 \cdot 10^{-23} \cdot T_{in}$$

$$T_{in} = 579,46 \text{ K}$$

2. Empezamos con el punto D. El ruido interno del filtro paso bajo no afecta. Movemos el resto de las temperaturas equivalentes a D:

$$T_{e0} = T_0 (a_0 - 1) = 300 (2 - 1) = 300 \text{ K}$$

$$T_{eA} = 2 T_0 = 600 \text{ K}$$

$$T_{e2} = T_2 (a_2 - 1) = T_2 (2 - 1) = T_2$$

$$T_{eD} = T_{e0} \frac{g}{a_0 a_2} + T_{eA} \frac{g}{a_2} + T_{e2} \frac{1}{a_2}$$

$$T_{eD} = 300 \frac{10}{2 \cdot 2} + 600 \frac{10}{2} + T_2 \frac{1}{2} = 3750 + 0,5 T_2$$

Ahora trabajamos con el punto C. El ruido interno del filtro paso banda no afecta. Movemos el resto de las temperaturas equivalentes a C:

$$T_{e1} = T_1 (a_1 - 1) = T_1 (2,5 - 1) = 1,5 T_1$$

$$T_{eC} = T_{e0} \frac{g}{a_0 a_1} + T_{eA} \frac{g}{a_1} + T_{e1} \frac{1}{a_1}$$

$$T_{eC} = 300 \frac{10}{2 \cdot 2,5} + 600 \frac{10}{2,5} + 1,5 T_1 \frac{1}{2,5} = 3000 + 0,6 T_1$$

3. Potencias de ruido en C y D:

$$k = 1,3806 \cdot 10^{-23} \text{ J/K}$$

$$n_D = k \left(T_{in} \frac{g}{a_0 a_2} + T_{eD} \right) B_2$$

$$n_D = k \left(579,46 \frac{10}{2 \cdot 2} + 3750 + 0,5 T_2 \right) 500$$

$$n_D = k (5198,65 + 0,5 T_2) 500$$

$$n_C = k \left(T_{in} \frac{g}{a_0 a_1} + T_{eC} \right) B_1$$

$$n_C = k \left(579,46 \frac{10}{2 \cdot 2,5} + 3000 + 0,6 T_1 \right) 3000$$

$$n_C = k (4158,92 + 0,6 T_1) 3000$$

4. Los ruidos se han calculado en el apartado anterior. Ahora calculamos la potencia de señal en D y C. Al punto D llega sólo el tono (el filtro elimina la voz) a través de la cascada de cuadripolos:

$$s_D = 0,4 \cdot 10^{-9} \frac{10}{2 \cdot 2} = 10^{-9} \text{ W}$$

Al punto C sólo llega la voz (el filtro elimina el tono) a través de la cascada de cuadripolos. La voz tiene una densidad espectral de potencia de 10^{-3} nW , que ocupa 2,5 kHz:

$$s_C = 10^{-3} \cdot 10^{-9} \cdot 2,5 \cdot 10^3 \frac{10}{2 \cdot 2,5} = 10^{-9} \text{ W} = 5 \cdot 10^{-9} \text{ W}$$

Ahora formamos las relaciones señal a ruido en D y C, y las igualamos:

$$\left(\frac{s}{n} \right)_D = \frac{10^{-9}}{k (5198,65 + 0,5 T_2) 500}$$

$$\left(\frac{s}{n} \right)_C = \frac{5 \cdot 10^{-9}}{k (4158,92 + 0,6 T_1) 3000}$$

$$\frac{10^{-9}}{k (5198,65 + 0,5 T_2) 500} = \frac{5 \cdot 10^{-9}}{k (4158,92 + 0,6 T_1) 3000}$$

La relación entre T_1 y T_2 es:

$$T_1 = 288,8 + 0,694 T_2$$

Problema 3.7 (Junio de 2002)

1. Factor de ruido para las conexiones A, B y C:

cable: $f_c = a_c = 10$ v.p.

amplificador $f_a = 2$ v.p.

amplificador $g_a = 1000$ v.p.

TV: $f_{tv} = 100$ v.p.

$$f_A = a_c + \frac{f_{tv} - 1}{1/a_c} = 10 + 10(100 - 1) = 1000 \text{ v.p.}$$

$$f_B = a_c + \frac{f_a - 1}{1/a_c} + \frac{f_{tv} - 1}{g_a/a_c} = 10 + 10(2 - 1) + \frac{10}{1000}(100 - 1) = 20,99 \text{ v.p.}$$

$$f_C = f_a + \frac{a_c - 1}{g_a} + \frac{f_{tv} - 1}{g_a/a_c} = 2 + \frac{10 - 1}{1000} + \frac{10}{1000}(100 - 1) = 2,999 \text{ v.p.}$$

2. El montaje más eficaz para combatir el ruido es el C, pues su factor de ruido es el más bajo.

$$F_T = F_C \approx 4,8 \text{ dB}$$

3. Imponemos el valor de f_C para las conexiones A y B, y sacamos la nueva atenuación en cada caso. Empezamos con la conexión A:

$$2,999 = a'_c + \frac{f_{tv} - 1}{1/a'_c} = a'_c + a'_c(100 - 1) = 100 a'_c$$

$$a'_c = 0,02999 \rightarrow A'_c \approx -15,2 \text{ dB (!?)}$$

Que no tiene sentido para una atenuación (sale una ganancia). En realidad lo que significa es que el cable tendría que absorber ruido (en lugar de generarlo), lo que es totalmente imposible.

Ahora trabajamos con la conexión B:

$$2,999 = a''_c + \frac{f_a - 1}{1/a''_c} + \frac{f_{tv} - 1}{g_a/a''_c} = a''_c + a''_c(2 - 1) + \frac{a''_c}{1000}(100 - 1) = 2,099 a''_c$$

$$a''_c \approx 1,4288 \rightarrow A''_c \approx 1,55 \text{ dB}$$

Que es realizable, pero nos deja muy poco margen (tendríamos que conformarnos con un cable muy corto).

Comentario: el amplificador actúa como un excelente LNA, haciendo despreciable el ruido de los cuadripolos que se sitúan después de él. La conexión A sufre el ruido del cable y el del TV, y no es probable que funcione. La conexión B al menos se beneficia de la eliminación del ruido del TV, pero mantiene los problemas asociados al cable. La conexión C siempre es la recomendable en estos casos.

Problema 3.8 (Junio de 2003)

De la primera medida sacamos directamente la ganancia del amplificador:

$$G = -23 - (-60) = 37 \text{ dB}$$

$$g = 5012 \text{ v.p.}$$

Para la figura de ruido trabajamos con la segunda medida. Del nivel de ruido sacamos la temperatura de ruido total, que estará compuesta por la temperatura a la entrada (T_{in}) y la temperatura de ruido interno del amplificador (no consideramos el ruido del analizador pues es despreciable frente al del amplificador):

$$N = -91,3 \text{ dBm} \rightarrow n = 7,4131 \cdot 10^{-13} \text{ W}$$

$$n = 7,4131 \cdot 10^{-13} = k T_T B = 1,3806 \cdot 10^{-23} \cdot T_T \cdot 10 \cdot 10^3$$

$$T_T = 5,3695 \cdot 10^6 \text{ K}$$

$$T_T = (T_{in} + T_e) g = (1000 + T_e) 5012$$

$$T_e = 71,35 \text{ K}$$

$$f = 1 + \frac{T_e}{T_0} = 1,238 \text{ v.p.}$$

$$F = 0,93 \text{ dB}$$

Problema 3.9 (Febrero de 2004)

1. Trabajamos con temperaturas. (Es más seguro que trabajar con factores de ruido, porque así no tenemos que preocuparnos de cuál es el ruido que hay a la entrada.) Calculamos las temperaturas equivalentes de un amplificador y un cable.

$$\text{Amplificador (por definición): } T_{eA} = T_0 (f - 1)$$

$$\text{Cable (es un atenuador a } T_0\text{): } T_{eC} = T_0 (a - 1) \approx T_0 a$$

Un repetidor está compuesto por un amplificador y un cable, en cascada. La temperatura equivalente de ruido de un repetidor (cualquiera) es:

$$T_{ei} = T_0 (f - 1) + \frac{T_0 a}{a} = T_0 f$$

Cada repetidor tiene una ganancia total nula (0 dB), de manera que las contribuciones de ruido pueden “viajar” de un repetidor a otro sin cambios. Entonces, para obtener todo el ruido interno basta con sumar todas las contribuciones. El resultado es válido tanto para la entrada —punto (E)— como para la salida —punto (S)—.

$$\text{Total: } T_{eT} = N T_{ei} = N T_0 f$$

2. Como la ganancia del sistema de repetidores es 0 dB, la calidad en (S) es igual que en (E) —siempre que llevemos a (E) todas las contribuciones de ruido—. Tenemos dos contribuciones de ruido: el ruido interno de los N repetidores, y el ruido a la entrada.

$$\left(\frac{s}{n}\right)_s = \frac{x}{k(T_{in} + T_e)B} = \frac{x}{k(T_0 + NT_0f)B} = \frac{x}{kT_0B(1 + Nf)}$$

3. Sustituimos valores en la expresión de la calidad del apartado anterior, y despejamos el factor de ruido:

$$kT_0B = 1,3806 \cdot 10^{-23} \cdot 300 \cdot 241,45 \cdot 10^3 \approx 10^{-15}$$

$$10^4 = \frac{10^{-9}}{10^{-15}(1 + 25f)}$$

$$f = 3,96 \approx 4 \text{ v.p.}$$

$$F \approx 6,0 \text{ dB}$$

Como tenemos a la entrada un ruido kT_0B también podemos aplicar la definición del factor de ruido. Nótese que si comparamos relaciones señal ruido a la entrada y la salida del sistema de repetidores, obtenemos el factor de ruido del conjunto (f_T), no el de un amplificador (f).

$$f_T \equiv \frac{(s/n)_e}{(s/n)_s} \Big|_{e(T_0)} = \frac{(10^{-9}/10^{-15})}{10^4} = 100$$

$$f_T = 1 + \frac{T_e}{T_0} = 1 + Nf$$

$$100 = 1 + 25f$$

$$f = 3,96$$

4. El amplificador tiene una ganancia igual a la atenuación del trozo de coaxial, para que el conjunto resulte con ganancia 0 dB. Como tenemos $N = 25$ secciones (o repetidores) para cubrir un total de $L_T = 25$ km, cada sección tendrá 1 km. Conocemos la atenuación del coaxial por longitud y la longitud total del trozo de cable. Además, sabemos que la atenuación de un cable es lineal (en unidades logarítmicas) con la longitud.

$$L = \frac{L_T}{N} = \frac{25}{25} = 1 \text{ km}$$

$$G = A = \alpha L = 50(\text{dB/km}) \cdot 1(\text{km}) = 50 \text{ dB}$$

5. Si miramos en el apartado segundo, vemos que la calidad en (S) no depende de la atenuación del cable. Al aumentar la atenuación del trozo de coaxial, a , también aumenta la ganancia del amplificador, g . Esto es lógico, ya que el sistema comienza con un atenuador de gran ganancia ($G = 50$ dB) y bajo ruido ($F = 6$ dB), un LNA, que fija el ruido interno del sistema.

Si no hubiéramos considerado $a \gg 1$, la temperatura equivalente de un repetidor sería:

$$T_{ei} = T_0(f - 1) + \frac{T_0(a - 1)}{a} = T_0f \text{ } \color{blue}{\text{+}} \frac{T_0}{a}$$

Y el ruido aumentaría al aumentar a . Como la señal x no cambia, la calidad disminuiría.

Problema 3.10 (Junio de 2004)

Temperatura equivalente de la cascada de amplificador y cable:

$$T_{eT} = T_{ea} + \frac{T_{ec}}{g_a} = 300(4 - 1) + \frac{300a}{100} = 900 + 3a$$

Potencia de ruido total equivalente en (i) —el ruido a la entrada no aparece porque es despreciable—:

$$n_i = k T_{eT} B_{eq} = 1,3806 \cdot 10^{-23} (900 + 3a) 9661,8$$

$$n_i = 4 \cdot 10^{-19} (300 + a)$$

Imponemos la calidad, que es igual en (i) y en (o) si llevamos todo el ruido:

$$1000 = \frac{4 \cdot 10^{-6}}{4 \cdot 10^{-19} (300 + a)}$$

$$a \approx 10^{10} \text{ v.p.} \rightarrow A = 100 \text{ dB}$$

Por último, tenemos en cuenta la linealidad de la atenuación (en dB) con la longitud:

$$A(\text{dB}) = \alpha(\text{dB/km}) \cdot L(\text{km})$$

$$100 = 50 \cdot L$$

$$L = 2 \text{ km}$$

Problema 3.11 (Septiembre de 2004)

Relación señal a ruido que realmente se mide a la entrada:

$$\left(\frac{s}{n}\right)_e = \frac{s_{in}}{k T_0 B} = \frac{10^{-9}}{1,3806 \cdot 10^{-23} \cdot 300 \cdot 100 \cdot 10^3} = 2,4144 \cdot 10^6 \text{ v.p.}$$

Relación señal a ruido que se requiere a la salida:

$$\left(\frac{s}{n}\right)_s = 10^{4,6} \approx 39811 \text{ v.p.}$$

Como a la entrada tenemos un ruido T_0 , aplicamos la definición de factor de ruido:

$$f_T = \frac{(s/n)_e}{(s/n)_s} = 60,647 \text{ v.p.}$$

Aplicamos la fórmula de Friis y despejamos la atenuación del cable:

$$f_T = f + \frac{a-1}{g} + \frac{f_{rx}-1}{g/a}$$

$$60,647 = 2 + \frac{a-1}{10^4} + \frac{(10-1)a}{10^4} \approx 2 + 10^{-3} a$$

$$a = 58647 \text{ v.p.} \rightarrow A \approx 47,7 \text{ dB}$$

Y, por último, como la atenuación (en dB) es lineal con la longitud:

$$A = \alpha \cdot L$$

$$47,7 = 0,3 \cdot L$$

$$L = 159 \text{ m}$$

Problema 3.12 (Noviembre de 2004)

Por supuesto, el factor de ruido ($F = 6$) no nos relaciona $(S/N)_e$ y $(S/N)_s$ porque la fuente de ruido a la entrada no se encuentra a T_0 . Tenemos que trabajar con temperaturas. Pasamos el factor de ruido a temperatura equivalente:

$$T_e = T_0 (f - 1) = 300 (4 - 1) = 900 \text{ K}$$

Planteamos las relaciones señal a ruido:

$$\left(\frac{s}{n}\right)_e = \frac{s_e}{n_e} = \frac{s_e}{k T_{in} B_{eq}} = 200$$

$$s_e = 200 k T_{in} B_{eq}$$

$$\left(\frac{s}{n}\right)_s = \frac{s_e g}{n_s} = \frac{200 k T_{in} B_{eq} g}{k (T_{in} + T_e) B_{eq} g} = \frac{200 T_{in}}{T_{in} + 900} = 100$$

Y despejando queda:

$$T_{in} = 900 \text{ K}$$

Resultado que se podía haber anticipado razonando: si la relación señal a ruido empeora 3 dB es porque el ruido se hace el doble, por culpa del ruido interno del amplificador. Luego el amplificador tiene una temperatura de ruido igual a la de la entrada.

Problema 3.13 (Septiembre de 2005)

Vamos a resolver el problema por dos caminos diferentes: usando factores de ruido y usando temperaturas de ruido.

Empezamos con factores de ruido. La atenuación de una sección de cable es:

$$A = \alpha \cdot L = 20 \cdot 2 = 40 \text{ dB (como se esperaba, igual que } G)$$

Como la atenuación es mucho mayor que la unidad, el factor de ruido del conjunto de secciones es:

$$f_T \approx N a f$$

El ruido a la entrada es T_0 , de manera que podemos usar el factor de ruido para calcular el ruido a la salida (que es igual al ruido total equivalente a la entrada, pues la ganancia del conjunto de secciones es 0 dB):

$$n = k T_0 B f_T = k T_0 B N a f$$

Imponemos la calidad, y sacamos el número de secciones:

$$\left(\frac{s}{n}\right) = 10^5 = \frac{18 \cdot 10^{-6}}{1,3806 \cdot 10^{-23} \cdot 300 \cdot 50 \cdot 10^3 \cdot N \cdot 10^4 \cdot 4}$$

$$N \leq 21,73$$

$$N_{max} = 21 \text{ secciones}$$

Y la longitud máxima total es:

$$L_T = N_{max} L = 21 \cdot 2 = 42 \text{ km}$$

Ahora trabajamos con temperaturas. La temperatura equivalente de ruido interno de una sección, T_{ei} , es:

$$T_{ec} = T_0 (a - 1) \approx T_0 a$$

$$T_{ea} = T_0 (f - 1)$$

$$T_{ei} = T_0 a + \frac{T_0 (f - 1)}{1/a} = a T_0 f$$

La temperatura del conjunto de secciones es:

$$T_e = N T_{ei} = N a T_0 f$$

Y el ruido total equivalente es (a la entrada o a la salida, da igual):

$$n = k T_T B = k (T_0 + T_e) B \approx k T_e B = k N a T_0 f B$$

Que coincide con el resultado obtenido por el otro camino.

Problema 3.14 (Febrero de 2006)

Temperatura de ruido interno del receptor:

$$T_{ea} = 300 (10^{0,09} - 1) \approx 69,08 \text{ K}$$

$$T_{ec} = 300 (10^{0,8} - 1) \approx 1592,87 \text{ K}$$

$$T_{em} = 300 (10^{0,3} - 1) \approx 298,58 \text{ K (es típico tomar 300)}$$

$$T_e = T_{ea} + \frac{T_{ec}}{g_a} + \frac{T_{em} \cdot a_c}{g_a}$$

$$T_e = 69,08 + \frac{1592,87}{10000} + \frac{298,58 \cdot 10^{0,8}}{10000} \approx 69,43 \text{ K } (\approx T_{ea})$$

Potencia de ruido (total equivalente, a la entrada del receptor):

$$N_0 = k (T_{in} + T_e) \approx 3,1675 \cdot 10^{-21} \text{ W/Hz}$$

$$n = N_0 \cdot B = 1,0136 \cdot 10^{-13} \approx 10^{-13} \text{ W}$$

Relación señal a ruido:

$$\left(\frac{s}{n}\right) = \frac{20 \cdot 10^{-12}}{10^{-13}} = 200 \text{ v.p.} \rightarrow 23,0 \text{ dB}$$

Problema 3.15 (Septiembre de 2006)

Empezamos por los fundamentos. La primera medida se realiza para obtener el factor de ruido del analizador. Es la típica medida de calibración, con todos los elementos excepto el que se va a caracterizar (el amplificador). En la segunda medida, y gracias a la información de calibración, ya se puede obtener el factor de ruido del amplificador.

Trabajamos con la primera medida. Tenemos un dipolo (la resistencia) en cascada con un cuadripolo (el analizador). En la figura 3.2 se puede ver el diagrama de bloques para cada una de las dos medidas. Usando las aproximaciones típicas:

$$N_0 \approx -174 \text{ dBm/Hz (es el valor que se suele tomar para } k T_0)$$

$$n_1 = k \cdot T_0 \cdot RBW \cdot f_{ae}$$

$$N_1 = -165 = -174 + 0 + F_{ae}$$

$$F_{ae} = 9 \text{ dB} \rightarrow 8 \text{ v.p.}$$

Trabajamos con la segunda. Tenemos un dipolo (la resistencia) en cascada con un primer cuadripolo (el amplificador) y en cascada con otro más (el analizador). Usando las aproximaciones típicas:

$$n_2 = k \cdot T_0 \cdot RBW \cdot g \cdot f_T$$

$$N_2 = -143,7 = -174 + 0 + 20 + F_T$$

$$F_T = 10,3 \text{ dB} \rightarrow 10,7152 \text{ v.p.}$$

$$f_T = f + \frac{f_{ae} - 1}{g}$$

$$10,7152 = f + \frac{8 - 1}{100}$$

$$f = 10,6452 \text{ v.p.} \rightarrow 10,3 \text{ dB}$$

Para comparar resultados, ahora vamos a operar con valores más exactos:

$$N_0 = k T_0 = 1,3806 \cdot 10^{-23} \cdot 300 = 4,1418 \cdot 10^{-21} \text{ W/Hz} \rightarrow -173,8281 \text{ dB}$$

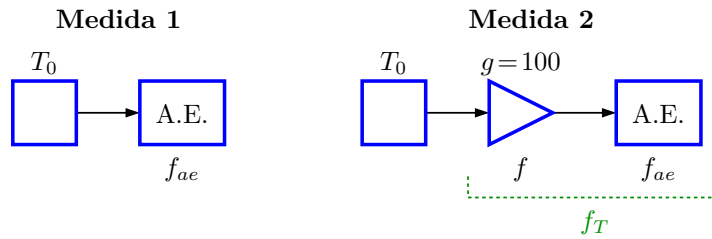


Figura 3.2: Diagrama de cada una de las medidas.

$$N_1 = -165 = -173,8281 + 0 + F_{ae}$$

$$F_{ae} = 8,8281 \text{ dB} \rightarrow 7,635032 \text{ v.p.}$$

$$N_2 = -143,7 = -173,8281 + 0 + 20 + F_T$$

$$F_T = 10,1281 \text{ dB} \rightarrow 10,299354 \text{ v.p.}$$

$$10,299354 = f + \frac{7,635032 - 1}{100}$$

$$f = 10,233004 \text{ v.p.} \rightarrow 10,1000 \text{ dB}$$

Se recomienda al alumno que resuelva el problema con temperaturas, y valores exactos. Debe obtener estos mismos resultados.

Problema 3.16 (Junio de 2007)

Temperatura equivalente de ruido de cada cuadripolo:

$$T_{e1} = 300 (10^{0,12} - 1) \approx 95,5 \text{ K}$$

$$A_2 = L_2 \cdot \alpha_2 = 20 \text{ dB} \rightarrow a_2 = 100 \text{ v.p.}$$

$$T_{e2} = 300 (100 - 1) = 29700 \text{ K}$$

$$T_{e3} = 600 \text{ K}$$

Temperatura equivalente de ruido interno de la cascada:

$$T_e = T_{e1} + \frac{T_{e2}}{g_1} + \frac{T_{e3} a_2}{g_1}$$

$$T_e = 95,5 + \frac{29700}{2000} + \frac{600 \cdot 100}{2000} \approx 140,4 \text{ K}$$

Potencia total equivalente de ruido a la entrada:

$$n = k (T_a + T_e) B_{eq}$$

$$n = 1,3806 \cdot 10^{-23} (400 + 140,4) 40 \cdot 10^6 \approx 3 \cdot 10^{-13} \text{ W}$$

Relación señal ruido en el punto S (que la calculamos en A con todo el ruido):

$$\frac{s}{n} = 10000 \text{ v.p.} \rightarrow 40,0 \text{ dB}$$

Problema 3.17 (Enero de 2010)

De la primera medida sacamos la ganancia ideal del amplificador:

$$G_0 = -10 - (-30) = 20 \text{ dB}$$

En la segunda medida tenemos: un dipolo inicial, que pone la temperatura de ruido a la entrada T_{in} ; un amplificador con ruido interno T_e (valor buscado); y un analizador con ruido $F_{AE} = 20 \text{ dB}$. Del suelo de ruido medido sacamos la densidad total equivalente a la entrada del analizador N_{0s} . Llevamos todas las temperaturas a la entrada del analizador, ponemos la densidad en función de T_e , igualamos al valor calculado anteriormente, y despejamos la temperatura equivalente de ruido interno del amplificador. Por último, a partir de T_e calculamos el factor de ruido pedido:

$$g_0 = 100 \text{ v.p.}$$

$$N_{0e} = 10^{-20} = 1,3806 \cdot 10^{-23} \cdot T_{in}$$

$$T_{in} = 724,32 \text{ K}$$

$$T_{eAE} = 300(100 - 1) = 29700 \text{ K}$$

$$N_{0s} = \frac{n}{RBW} = \frac{10^{-9,64}/1000}{30 \cdot 10^3} = 7,6362 \cdot 10^{-18} \text{ W/Hz}$$

$$N_{0s} = k \left(T_{in} + T_e + \frac{T_{eAE}}{g_0} \right) g_0$$

$$7,6362 \cdot 10^{-18} = 1,3806 \cdot 10^{-23} \left(724,32 + T_e + \frac{29700}{100} \right) 100$$

$$T_e = 4509,75 \text{ K}$$

$$f = 1 + \frac{T_e}{T_0} = 16,03 \text{ v.p.}$$

$$F = 12,05 \text{ dB}$$

Problema 3.18 (Junio de 2010)

1. La ganancia (G_3) es igual a la atenuación de una sección (A_T):

$$G_3 = A_T = \alpha_1 \cdot L_1 + A_2 = 30 + 3 = 33 \text{ dB}$$

2. Temperaturas equivalentes de cada cuadripolo:

$$T_{e1} = T_0(a_1 - 1) = 300(1000 - 1) \approx 300000 \text{ K}$$

$$T_{e2} = T_0(a_2 - 1) = 300(2 - 1) = 300 \text{ K}$$

$$T_{e3} = T_0(f_3 - 1) = 300(4 - 1) = 900 \text{ K}$$

Temperatura equivalente de una sección:

$$T_{ei} = T_{e1} + T_{e2} \cdot a_1 + T_{e3} \cdot a_1 \cdot a_2$$

$$T_{ei} = 3 \cdot 10^5 + 300 \cdot 1000 + 900 \cdot 1000 \cdot 2 = 2,4 \cdot 10^6 \text{ K}$$

3. Como cada sección tiene ganancia total unitaria, basta con sumar las M contribuciones:

$$T_{eM} = M \cdot T_{ei} = M \cdot 2,4 \cdot 10^6 \text{ K}$$

4. Potencia de señal:

$$S_{in} = -56,56 \text{ dBm} \Rightarrow s = 2,208 \cdot 10^{-9} \text{ W}$$

Ruido total:

$$N_{0in} = k \cdot T_{in} \Rightarrow T_{in} = 16 \cdot 10^6 \text{ K}$$

$$n = k \cdot (T_{in} + T_{eM}) \cdot B = 1,38 \cdot 10^{-23} \cdot (16 \cdot 10^6 + 2,4 \cdot 10^6 \cdot M) \cdot 4 \cdot 10^3$$

Formamos la relación señal a ruido total (a la entrada, que es igual que a la salida):

$$\frac{s}{n} = \frac{2,208 \cdot 10^{-9}}{1,38 \cdot 10^{-23} \cdot (16 \cdot 10^6 + 2,4 \cdot 10^6 \cdot M) \cdot 4 \cdot 10^3} = \frac{4 \cdot 10^4}{16 + 2,4 \cdot M}$$

5. Imponemos la calidad mínima:

$$1000 = \frac{4 \cdot 10^4}{16 + 2,4 \cdot M} \Rightarrow M = 10 \text{ secciones}$$

Longitud total del sistema:

$$L_T = M \cdot L_1 = 5 \text{ km}$$

Problema 3.19 (Julio de 2010)

1. De la tensión sacamos la potencia de señal. esa potencia se lleva a través del coaxial, y se compara con la relación señal a ruido.

$$v_{ef} = 10^{86/20} = 20000 \text{ } \mu\text{V} \rightarrow 0,02 \text{ V}$$

$$p_{in} = \frac{v_{ef}^2}{R} = \frac{0,02^2}{75} = 5,3 \cdot 10^{-6} \text{ W}$$

$$A = 0,25 \cdot 95 = 23,75 \text{ dB} \rightarrow 237,14 \text{ v.p.}$$

$$p_{out} = \frac{p_{in}}{a} = 2,25 \cdot 10^{-8} \text{ W}$$

$$\frac{s}{n} = \frac{p_{out}}{n}$$

$$50000 = \frac{2,25 \cdot 10^{-8}}{n}$$

$$n = 4,5 \cdot 10^{-13} \text{ W} \rightarrow -93,5 \text{ dBm}$$

2. En estos casos es mejor operar con relaciones inversas (ruido a señal e interferencia a señal), porque así tenemos un denominador fijo (la señal).

$$\frac{S}{N} = 17 \text{ dB} \rightarrow \frac{n}{s} = \frac{1}{50} \text{ v.p.}$$

$$\frac{S}{I_1} = 22 \text{ dB} \rightarrow \frac{i_1}{s} = \frac{1}{158,5} \text{ v.p.}$$

$$\frac{S}{I_2} = 22 \text{ dB} \rightarrow \frac{i_2}{s} = \frac{1}{158,5} \text{ v.p.}$$

$$\frac{S}{I_3} = 18 \text{ dB} \rightarrow \frac{i_3}{s} = \frac{1}{63,1} \text{ v.p.}$$

$$\frac{n_T}{s} = \frac{n + i_1 + i_2 + i_3}{s} = \frac{n}{s} + \frac{i_1}{s} + \frac{i_2}{s} + \frac{i_3}{s}$$

$$\frac{n_T}{s} = \frac{1}{50} + 2 \cdot \frac{1}{158,5} + \frac{1}{63,1} = 0,0485 \text{ v.p.}$$

$$\frac{s}{n_T} = 20,63 \text{ v.p.} \rightarrow 13,15 \text{ dB}$$

Problema 3.20 (Mayo de 2011)

Vamos a trabajar con 5 cifras significativas. Como la relación señal a ruido más interferencia es de 27 dB, la relación inversa será:

$$27\text{dB} \rightarrow \left(\frac{s}{n+i} \right) = 501,19 \text{ v.p.}$$

$$\left(\frac{n+i}{s} \right) = \frac{1}{501,19} = 1,9953 \cdot 10^{-3} \text{ v.p.}$$

Calculamos la potencia de señal recibida y la potencia de señal interferente:

$$s = \frac{p_T}{a_t} = \frac{5}{10^{9,9}} = 6,2946 \cdot 10^{-10} \text{ W}$$

$$i = N_{0i} B = 7,8125 \cdot 10^{-19} \cdot 800 \cdot 10^3 = 6,25 \cdot 10^{-13} \text{ W}$$

Sustituimos todo y despejamos la potencia de ruido, n :

$$1,9953 \cdot 10^{-3} = \frac{n + 6,25 \cdot 10^{-13}}{6,2946 \cdot 10^{-10}}$$

$$n = 6,3094 \cdot 10^{-13} \text{ W}$$

Por último, ponemos el ruido en función de las temperaturas, y sacamos T_{in} :

$$T_e = 300 (10^{1,9} - 1) = 23530 \text{ K}$$

$$n = k (T_{in} + T_e) B$$

$$T_{in} = 33596 \text{ K}$$

En lugar de trabajar con las 5 cifras significativas es más típico, y es perfectamente admisible, realizar aproximaciones. La calidad, de 27 dB, está 3 dB por debajo de 30, de manera que, en veces de potencia, será la mitad de 1000:

$$27\text{dB} \rightarrow \left(\frac{s}{n+i}\right) = 500 \text{ v.p.}$$

$$\left(\frac{n+i}{s}\right) = 2 \cdot 10^{-3} \text{ v.p.}$$

La atenuación del canal, de 99 dB, está 3 + 3 + 3 dB por encima de 90, por lo que se puede aproximar por:

$$a_t = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 10^9 = 8 \cdot 10^9 \text{ v.p.}$$

Y tenemos una señal recibida:

$$s = 6,25 \cdot 10^{-10} \text{ W}$$

Así, el ruido es igual que la interferencia:

$$n = i = 6,25 \cdot 10^{-13} \text{ W}$$

La temperatura equivalente de ruido interno del receptor vale:

$$T_e = 300(80 - 1) = 23700 \text{ K}$$

Y el resultado final es:

$$T_{in} = 32888 \approx 33000 \text{ K}$$

Problema 3.21 (Junio de 2011)

1. Temperatura equivalente de ruido de una sección (T_{ei}):

$$A(\text{dB}) = \alpha(\text{dB}/100\text{m}) \cdot L(100\text{m}) = 5 \cdot 2 = 10 \text{ dB}$$

$$T_{eA} = T_0(f - 1) = 300(4 - 1) = 900 \text{ K}$$

$$T_{eC} = T_0(a - 1) = 300(10 - 1) = 2700 \text{ K}$$

$$T_{ei} = T_{eA} + \frac{T_{eC}}{g} = 900 + \frac{2700}{10} = 1170 \text{ K}$$

El conjunto de 10 secciones:

$$T_{eTOT} = N \cdot T_{ei} = 10 \cdot 1170 = 11700 \text{ K}$$

2. Como el conjunto tiene ganancia total 0 dB, basta con sumar las dos temperaturas de las dos contribuciones:

$$N_0 = k(T_{eTOT} + T_{IN}) = 1,38 \cdot 10^{-23}(11700 + 300) = 1,656 \cdot 10^{-19} \text{ W/Hz}$$

3. Calculamos la potencia de ruido que obtenemos con N_0 a través de RBW :

$$n = N_0 \cdot RBW = 1,656 \cdot 10^{-19} \cdot 300 \cdot 10^3 = 4,968 \cdot 10^{-14} \text{ W}$$

$$N \approx -103 \text{ dBm}$$

Y dibujamos en la pantalla (figura 3.3):

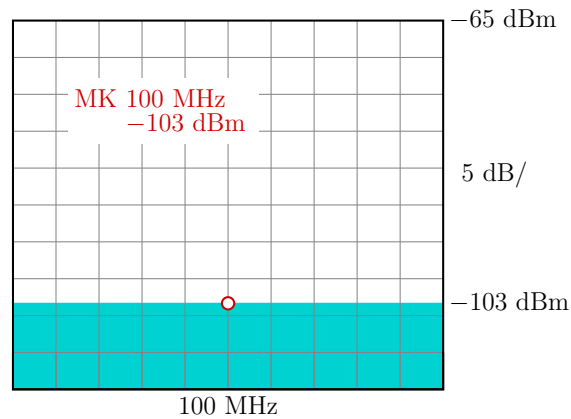


Figura 3.3: Pantalla del analizador.

Problema 3.22 (Julio de 2011)

1. Temperatura equivalente de ruido de una sección:

$$T_{ei} = T_{ecable} + T_{eamplf.} \cdot a = T_{ec} + T_{ea} \cdot a$$

$$T_{ei} = T_0(a - 1) + T_0(f - 1)a \approx T_0 \cdot a + T_0(f - 1)a = T_0 \cdot f \cdot a$$

Temperatura equivalente del sistemas de repetidores:

$$T_{eT} = M \cdot T_{ei} = M \cdot T_0 \cdot f \cdot a$$

Introducimos el dato de la figura de ruido total:

$$T_{eT} = T_0(f_T - 1) \approx 300(12 \cdot 10^7 - 1) \approx 3,6 \cdot 10^{10}$$

$$3,6 \cdot 10^{10} = 30 \cdot 300 \cdot f \cdot a$$

$$f \cdot a = 4 \cdot 10^6$$

2. Sustituimos f por su valor:

$$4 \cdot a = 4 \cdot 10^6 \Rightarrow a = 10^6 \rightarrow A = G = 60 \text{ dB}$$

$$A = \alpha(\text{dB/km}) \cdot L(\text{km})$$

$$60 = 50(\text{dB/km}) \cdot L(\text{km}) \Rightarrow L = 1,2 \text{ km}$$

Problema 3.23 (Julio de 2011)

Ganancia del amplificador final:

Un cable: $A = \alpha \cdot L = 4 \cdot 6 = 24$ dB

Una sección: $A_s = A + G_r = 24 - 20 = 4$ dB

Las 4 secciones: $A_t = 4 \cdot A_s = 4 \cdot 4 = 16$ dB

El amplificador ha de compensar: $G_t = A_t = 16$ dB

Ahora vamos a calcular la relación señal a ruido a la salida. Como cada cable atenúa 24 dB, podemos tener dudas de si es suficiente atenuación para considerar que a su salida el ruido equivale a T_0 . Por si acaso, trabajamos con temperaturas, en lugar de con factores de ruido. Realizamos los cálculos con bastantes decimales, para comparar después con otro resultado.

$$T_{ec} = T(a - 1) = T_0(10^{2,4} - 1)$$

$$T_{ea} = T_0(f_r - 1) = T_0(10^{0,6} - 1)$$

$$T_{et} = T_0(f_t - 1) = T_0(10^{0,9} - 1)$$

$$T_e = T_{ec} + T_{ea}a + T_{ec}\frac{a}{g_a} + T_{ea}\frac{a^2}{g_a} + T_{ec}\frac{a^2}{g_a^2} + T_{ea}\frac{a^3}{g_a^2} + T_{ec}\frac{a^3}{g_a^3} + T_{ea}\frac{a^4}{g_a^3} + T_{et}\frac{a^4}{g_a^4}$$

$$T_T = T_{in} + T_e \approx 7,7763 \cdot 10^6 \text{ K}$$

$$\left(\frac{s}{n}\right)_s = \frac{s_{in}}{k T_T B} = \frac{10^{0,3}/1000}{1,3806 \cdot 10^{-23} \cdot 7,7763 \cdot 10^6 \cdot 10^7} = 1,8584 \cdot 10^6 \text{ v.p.}$$

$$\left(\frac{S}{N}\right)_s \approx 62,69 \text{ dB}$$

Y ahora vamos a trabajar con factores de ruido, asumiendo que en cada terminación hay T_0 porque los cables atenúan mucho. Además, realizaremos las aproximaciones típicas.

$a \approx 250$ v.p. (6 dB por debajo de 30 dB)

$$T_c = T_0 \rightarrow f_c = a \approx 250$$

$$f_a \approx 4 \text{ v.p.}$$

$$f_r \approx 8 \text{ v.p.}$$

$$f_T = a + \frac{f_a - 1}{\frac{1}{a}} + \frac{a - 1}{\frac{g_a}{a}} + \frac{f_a - 1}{\frac{g_a}{a^2}} + \frac{a - 1}{\frac{g_a^2}{a^2}} + \frac{f_a - 1}{\frac{g_a^2}{a^3}} + \frac{a - 1}{\frac{g_a^3}{a^3}} + \frac{f_a - 1}{\frac{g_a^3}{a^4}} + \frac{f_r - 1}{\frac{g_a^4}{a^4}}$$

$$f_T = 250 + \frac{3}{\frac{1}{250}} + \frac{249}{\frac{100}{250}} + \frac{3}{\frac{100}{250^2}} + \frac{249}{\frac{100^2}{250^2}} + \frac{3}{\frac{100^2}{250^3}} + \frac{249}{\frac{100^3}{250^3}} + \frac{3}{\frac{100^3}{250^4}} + \frac{7}{\frac{100^4}{250^4}}$$

$$f_T \approx 25624 \text{ v.p.}$$

$$\left(\frac{s}{n}\right)_s = \frac{s_{in}}{k T_0 f_T B} = \frac{2 \cdot 10^{-3}}{1,38 \cdot 10^{-23} \cdot 300 \cdot 25624 \cdot 10^7} \approx 1,9 \cdot 10^6 \text{ v.p.}$$

$$\left(\frac{S}{N}\right)_s \approx 62,79 \text{ dB}$$

Podemos comprobar que el resultado es muy parecido.

Problema 3.24 (Enero de 2012)

1. Temperatura equivalente de ruido interno:

$$T_{e1} = T_0 (f_1 - 1) = 300 (1,5 - 1) = 150 \text{ K}$$

$$T_{e2} = T_0 (f_2 - 1) = 300 (2 - 1) = 300 \text{ K}$$

$$T_{e3} = T_3 (a_3 - 1) = 300 (a_3 - 1) \text{ K}$$

$$T_{e4} = 600 \text{ K}$$

$$T_e = T_{e1} + T_{e2} \frac{1}{g_1} + T_{e3} \frac{a_2}{g_1} + T_{e4} \frac{a_2 a_3}{g_1}$$

$$T_e = 150 + 300 \frac{1}{100} + 300 (a_3 - 1) \frac{1}{100} + 600 \frac{a_3}{100} = 150 + 9 a_3$$

Temperatura total:

$$T_T = T_a + T_e = 600 + 9 a_3$$

2. Longitud máxima del cable:

$$B = f_{cc2} - f_{cc1} = 2\text{MHz}$$

$$n = k T_T B$$

$$\left(\frac{s}{n}\right)_e = 1000 = \frac{10^{-8}}{1,3806 \cdot 10^{-23} (600 + 9 a_3) 2 \cdot 10^6}$$

$$a_3 = 40173,5 \text{ v.p.} \rightarrow A_3 = 46,0 \text{ dB}$$

$$A_3(\text{dB}) = \alpha(\text{dB/m}) \cdot L(\text{m})$$

$$46,0 = 1,2 \cdot L \rightarrow L = 38,3 \text{ m}$$

Problema 3.25 (Junio de 2012)

Calculamos la densidad espectral de ruido total equivalente a la entrada del sistema:

$$T_{in} = 250 \text{ K}$$

$$T_{e1} = T_1 (a_1 - 1) = 300 (2 - 1) = 300 \text{ K}$$

$$T_{e2} = T_2 (a_2 - 1) = 300 (a_2 - 1)$$

$$T_{e3} = T_0 (f_3 - 1) = 300 (10^{0,25} - 1) \approx 233,5 \text{ K}$$

$$T_{e4} = T_0 (f_4 - 1) = 300 (2 - 1) = 300 \text{ K}$$

$$T_T = T_{in} + T_e = T_{in} + T_{e1} + T_{e2} a_1 + T_{e3} a_1 a_2 + T_{e4} \frac{a_1 a_2}{g_3} = -50 + 1073 a_2$$

$$N_0 = k T_T = 1,3806 \cdot 10^{-23} (-50 + 1073 a_2)$$

Imponemos la calidad de $15 + 3$ dB, y despejamos la atenuación del cable:

$$18 \text{ dB} \rightarrow 63,096(\text{v.p.}) = \frac{10^{-8} \cdot 10^{-3}}{N_0 \cdot 5,5 \cdot 10^6}$$

$$a_2 \approx 2 \text{ v.p.} \rightarrow A_2 = 3 \text{ dB}$$

Calculamos la longitud del cable:

$$A_2(\text{dB}) = \alpha_2(\text{dB/m}) \cdot L(\text{m})$$

$$3 = 0,5 \cdot L \rightarrow L = 6 \text{ m}$$

Problema 3.26 (Abril de 2013)

Densidad espectral unilateral de ruido:

$$T_{e1} = T_0 (f_1 - 1) = 300 (2 - 1) = 300 \text{ K}$$

$$T_{e2} = T_2 (a_a - 1) = 300 (1000 - 1) = 299700 \text{ K}$$

$$T_{e3} = T_0 (f_3 - 1) = 300 (100 - 1) = 29700 \text{ K}$$

$$T_e = T_{e1} + \frac{T_{e2}}{g_1} + \frac{T_{e3} a_2}{g_1}$$

$$T_e = 300 + \frac{299700}{1000} + \frac{29700 \cdot 1000}{1000} = 30299,7 \approx 30300 \text{ K}$$

$$N_0 = k (T_{in} + T_e) = 4,266054 \cdot 10^{-19} \text{ W/Hz}$$

Relación señal a ruido:

$$(S/N)_e = P_{RX} - N_0 - 10 \log(B)$$

$$(S/N)_e = -74 - 10 \log(4,266054 \cdot 10^{-19} \cdot 1000) - 10 \log(20000) \approx 26,7 \text{ dB}$$

Tema 4

DISTORSIÓN

Problema 4.1

Pasamos la señal de entrada (suma de dos sinusoides de igual amplitud) por el polinomio de segundo grado:

$$\begin{aligned} y(t) = & a + c A^2 + b A \cos(\omega_1 t) + b A \cos(\omega_2 t) + \\ & + \frac{c A^2}{2} \cos(2 \omega_1 t) + \frac{c A^2}{2} \cos(2 \omega_2 t) + \\ & + c A^2 \cos[(\omega_2 - \omega_1) t] + c A^2 \cos[(\omega_2 + \omega_1) t] \end{aligned}$$

Donde, como $\omega_1 = 2 \omega_2 / 3$:

$$2 \omega_1 = \frac{4 \omega_2}{3}$$

$$\omega_2 - \omega_1 = \frac{\omega_2}{3}$$

$$\omega_2 + \omega_1 = \frac{5 \omega_2}{3}$$

Es inmediato distinguir las componentes y sus amplitudes:

Continua: $A_{cc} = a + c A^2$

Fundamental a f_1 : $A_0 = b A$

Fundamental a f_2 : $A_0 = b A$

Armónico a $2 f_1$: $A_{n2} = (c A^2) / 2$

Armónico a $2 f_2$: $A_{n2} = (c A^2) / 2$

Intermodulación de 2º orden a $f_2 + f_1$: $A_{i2} = c A^2$

Intermodulación de 2º orden a $f_2 - f_1$: $A_{i2} = c A^2$

Ahora calculamos los coeficientes de distorsión e intermodulación. Sólo hay que trabajar con un armónico a frecuencia doble, y una intermodulación de orden dos. El coeficiente de distorsión (idéntico para $2f_1$ y $2f_2$) es:

$$D_2(\%) = 100 \frac{A_{n2}}{A_0} = 100 \frac{c A^2/2}{b A} = 50 \frac{c A}{b}$$

Y el coeficiente de intermodulación de orden dos (idéntico para $f_2 - f_1$ y $f_2 + f_1$) es:

$$I_2(\%) = 100 \frac{A_{i2}}{A_0} = 100 \frac{c A^2}{b A} = 100 \frac{c A}{b}$$

Problema 4.2

1. La señal a la entrada es:

$$x(t) = A \cos(\omega_1 t) + A \cos(\omega_2 t)$$

Tras pasar por el polinomio de tercer grado queda:

$$\begin{aligned} y(t) = & A \left[1 + \frac{9 A^2 K}{4} \right] [\cos(\omega_1 t) + \cos(\omega_2 t)] + \\ & + \frac{A^3 K}{4} [\cos(3 \omega_1 t) + \cos(3 \omega_2 t)] + \\ & + \frac{3 A^3 K}{4} \left\{ \cos[(2 \omega_1 + \omega_2) t] + \cos[(2 \omega_1 - \omega_2) t] \right\} + \\ & + \frac{3 A^3 K}{4} \left\{ \cos[(2 \omega_2 + \omega_1) t] + \cos[(2 \omega_2 - \omega_1) t] \right\} \end{aligned}$$

Sólo aparecen armónicos al triple del fundamental, y batidos de tercer orden. Coeficiente de distorsión de orden 3:

$$D_3(\%) = 100 \frac{A^3 K/4}{A \left[1 + \frac{9 A^2 K}{4} \right]} = 100 \frac{A^2 K}{4 + 9 A^2 K}$$

Coeficiente de intermodulación de tercer orden:

$$I_3(\%) = 100 \frac{3 A^3 K/4}{A \left[1 + \frac{9 A^2 K}{4} \right]} = 100 \frac{A^2 K}{4 + 9 A^2 K} = 3 D_3$$

2. Banda 300–3400 Hz: pasan f_1 , f_2 , $3f_1$ y $2f_2 - f_1$. Coeficientes, con $A = 1$:

$$D_3 = 100 \frac{1^2 \cdot 0,25}{4 + 9 \cdot 1^2 \cdot 0,25} = 4 \%$$

$$I_3 = 3 D_3 = 12 \%$$

El coeficiente de distorsión armónica total y el coeficiente de distorsión de intermodulación total se calculan haciendo la media geométrica de todas las distorsiones del

tipo en cuestión. Como sólo hay una componente en cada caso, la media geométrica no modifica el resultado:

$$D(\%) = \sqrt{\sum D_n^2(\%)} = D_3$$

$$I(\%) = \sqrt{\sum I_n^2(\%)} = I_3$$

Banda 300–5200 Hz: pasan f_1 , f_2 , $3f_1$, $2f_1 + f_2$, $2f_2 + f_1$ y $2f_2 - f_1$. Coeficientes, con $A = 1$:

$$D_3 = 4\%$$

$$I_3 = 12\%$$

$$I = \sqrt{I_3^2 + I_3^2 + I_3^2} = I_3 \sqrt{3} \approx 20,8\%$$

Para los coeficientes totales, en la distorsión armónica ocurre igual que antes: sólo hay una componente y el resultado no varía; pero en la distorsión de intermodulación hay que obtener la raíz cuadrada de la suma de los cuadrados de tres componentes (iguales):

$$D = D_3$$

$$I = \sqrt{I_3^2 + I_3^2 + I_3^2} = I_3 \sqrt{3} \approx 20,8\%$$

Problema 4.3

1. Nótese que el elemento no lineal es el transmisor. El amplificador de la etapa receptora se supone totalmente lineal.

Calculamos el punto de compresión a 1 dB:

$$G_0 = 20 \log(20) \approx 26 \text{ dB}$$

$$G_{1dB} = G_0 - 1 = 25 \text{ dB}$$

$$10^{(G_{1dB}/20)} = a_1 + \frac{3}{4} a_3 A^2$$

$$10^{(25/20)} = 20 - \frac{3}{4} A^2$$

$$A = 1,7194 \text{ V}$$

$$P_{e1dB} = 10 \log \left(\frac{1,7194^2}{2 \cdot 50} 1000 \right) \approx 14,7 \text{ dBm}$$

$$P_{s1dB} = P_{e1dB} + G_{1dB} = 14,7 + 25 = 39,7 \text{ dBm}$$

Ahora calculamos el punto en el que trabaja el TX. Estudiamos la hipotética señal bitono:

$$\text{Amplitud a la salida de cada fundamental: } a_1 A + \frac{9}{4} a_3 A^3$$

Amplitud de un batido de orden tres: $\frac{3}{4} a_3 A^3$

Formamos la relación de 60 dB entre la potencia de los 2 fundamentales a la salida respecto a la potencia de 2 batidos de tercer orden:

$$\text{Pot. a la salida de los 2 fundamentales: } 2 \frac{\left(a_1 A + \frac{9}{4} a_3 A^3\right)^2}{2 R}$$

$$\text{Pot. de 2 batidos de orden 3: } 2 \frac{\left(\frac{3}{4} a_3 A^3\right)^2}{2 R}$$

$$60 = 20 \log \left[\frac{a_1 A + \frac{9}{4} a_3 A^3}{\left|\frac{3}{4} a_3 A^3\right|} \right]$$

$$10^{60/20} = \frac{20 - \frac{9}{4} A^2}{\frac{3}{4} A^2}$$

$$A = 0,16305 \text{ V}$$

La potencia de la señal bitono hipotética, que es la potencia de mi señal a la entrada, es:

$$P_e = 10 \log \left(2 \frac{0,16305^2}{2 \cdot 50} 1000 \right) = -2,7 \text{ dBm}$$

Luego estamos trabajando con un IBO (back-off a la entrada) respecto al punto de compresión a 1 dB:

$$IBO = P_{e1dB} - P_e = 14,7 - (-2,7) = 17,4 \text{ dB}$$

Comentario: con un IBO tan grande el amplificador trabaja con una señal muy pequeña, y aunque su comportamiento es muy lineal, ofrece poco rendimiento.

2. Cálculos de ruido (cuadripolo 1: amplificador; cuadripolo 2: cable):

$$T_{in} = T_a = 300 \text{ K}$$

$$T_{e1} = T_0 (f_1 - 1) = 300 (10^{0,2} - 1) = 175,47 \text{ K}$$

$$T_{e2} = T_0 (a_2 - 1) \approx 300 a_2 \text{ (suponemos } a_2 \gg 1)$$

$$T_{eT} = T_{e1} + \frac{T_{e2}}{g_1} = 175,47 + \frac{300 a_2}{100} = 175,47 + 3 a_2$$

$$T_T = T_a + T_{e1} = 475,47 + 3 a_2$$

$$n_a = k T_T B = 1,3806 \cdot 10^{-23} (475,47 + 3 a_2) 10^6$$

$$n_a = 1,3806 \cdot 10^{-17} (475,47 + 3 a_2)$$

Cálculos de señal deseada: en el punto de trabajo la potencia a la entrada del TX es -2,7 dBm; como estamos en zona claramente lineal, la salida será:

$$S_{TX} = -2,7 + 26 = 23,3 \text{ dBm}$$

Pasamos por el canal:

$$S_a = 23,3 - 103 = -79,7 \text{ dBm}$$

Un resultado más exacto, en unidades naturales, es:

$$s_a = 1,0609 \cdot 10^{-11} \text{ W}$$

Formamos la relación señal a ruido (total equivalente) a la entrada del receptor, que es igual que la calidad a la salida:

$$\left(\frac{s}{n}\right) = 100 = \frac{1,0609 \cdot 10^{-11}}{1,3806 \cdot 10^{-17} (475,47 + 3 a_2)}$$

$$a_2 = 2403,0 \text{ v.p.} \rightarrow A_2 \approx 33,81 \text{ dB}$$

La hipótesis $a_2 \gg 1$ queda plenamente confirmada. Por último, consideramos la linealidad de la atenuación (dB) con la longitud:

$$33,81 = 0,4 \cdot L$$

$$L \approx 84,5 \text{ m}$$

Si ahora $T_a = 100 \text{ K}$, el nuevo ruido es:

$$n_a = 1,3806 \cdot 10^{-17} (275,47 + 3 a_2)$$

Despejamos a_2 de la nueva relación señal a ruido:

$$100 = \frac{1,0609 \cdot 10^{-11}}{1,3806 \cdot 10^{-17} (275,47 + 3 a_2)}$$

$$a_2 = 2469,6 \text{ v.p.} \rightarrow A_2 \approx 33,93 \text{ dB}$$

$$33,93 = 0,4 \cdot L$$

$$L \approx 84,8 \text{ m}$$

Un resultado muy similar al anterior, porque el ruido a la entrada tiene poco peso con relación al ruido interno.

3. Potencia de señal a la entrada del receptor:

$$S_{RX} = S_a + G_1 - A_2 = -79,7 + 20 - 33,8 = -93,7 \text{ dBm}$$

4. Comprobamos el nivel de señal:

$$-93,7 + 40 = -53,7 \text{ dBm (mayor que } -60 \text{ dBm)}$$

Desde el punto de vista de ruido tenemos un dipolo inicial a $T_a = T_0$ y una cascada de 4 cuadripolos: el amplificador de 20 dB (1), medio cable (2), el amplificador de 40 dB (3), y la otra mitad del cable (4). La atenuación de medio cable es la mitad en dB del valor total, o la raíz cuadrada del valor total en veces de potencia. Calculamos el ruido total equivalente a la entrada del RX:

$$T_a = 300 \text{ K}$$

$$T_{e1} = 175,47 \text{ K}$$

$$a_2 = \sqrt{2403,0} = 49,020 \text{ v.p.}$$

$$T_{e2} = 300 (49,02 - 1) = 14406 \text{ K}$$

$$T_{e3} = 300 (10 - 1) = 2700 \text{ K}$$

$$a_4 = a_2$$

$$T_{e4} = T_{e2}$$

$$T_{eT} = 175,47 + \frac{14406}{100} + \frac{49,02 \cdot 2700}{100} + \frac{49,02 \cdot 14406}{100 \cdot 10000}$$

$$T_{eT} = 1643,78 \text{ K}$$

$$T_T = T_a + T_{eT} = 1943,78 \text{ K}$$

$$n_a = k T_T B = 1,3806 \cdot 10^{-23} \cdot 1943,78 \cdot 10^6$$

$$n_a = 2,6836 \cdot 10^{-14} \text{ W}$$

Formamos la relación señal a ruido:

$$\left(\frac{s}{n} \right) = \frac{1,0609 \cdot 10^{-11}}{2,6836 \cdot 10^{-14}} = 395,33 \text{ v.p.}$$

$$\left(\frac{S}{N} \right) \approx 26,0 \text{ dB}$$

Que cumple con el requisito (umbral de 20 dB).

Problema 4.4 (Septiembre de 2002)

1. Cuando transmitimos el tono de prueba de 100 mW en el punto (B), el amplificador trabaja en el punto de compresión a 1 dB. Comparamos las potencias a la entrada y a la salida:

$$G_1 = G_{1dB} = 10 \log \left(\frac{p_{C1}}{p_{B1}} \right) = 10 \log \left(\frac{2}{0,1} \right) \approx 13,0 \text{ dB} \rightarrow 20 \text{ v.p.}$$

2. Con la sinusoide de 10 nW en el punto (B), tenemos un enorme backoff a la entrada (IBO), de manera que el amplificador trabaja en pequeña señal, sin la saturación de 1 dB en la ganancia:

$$G_{1i} = G_1 + 1 = 14,0 \text{ dB}$$

$$g_{1i} \approx 25,12 \text{ (veces de potencia)}$$

3. El coeficiente c_1 es la ganancia ideal (pequeña señal) en veces de señal:

$$G_{1i} = 14(\text{dB}) = 20 \log(c_1) \rightarrow c_1 \approx 5,0$$

Para calcular c_3 vamos al punto de compresión a 1 dB. La señal de entrada tiene 0,1 W en el punto B. Como una señal modulada en BLU por un tono es, de hecho, otro tono, despejamos la amplitud:

$$p_{B1} = \frac{A^2}{2 \cdot 1} = 0,1 \text{ W} \rightarrow A \approx 0,447 \text{ V} \quad (A^2 = 0,2)$$

En el punto C tenemos 2 W, a la frecuencia fundamental:

$$2 = \frac{1}{2} \left(c_1 A + \frac{3 c_3 A^3}{4} \right)^2$$

$$c_3 \approx -3,519$$

El signo ha de ser negativo para que sature.

4. Para el ruido (pequeña señal) la ganancia del amplificador es $g_{1i} = 25,12$ veces de potencia. Calculamos todas las temperaturas y las llevamos al punto B:

$$T_{e1} = T_0 (f_1 - 1) = 9 T_0$$

$$T_{e2} = T_0 (a_2 - 1) \approx T_0 a_2$$

$$T_{e3} = T_0 (f_3 - 1) = 9 T_0$$

$$T_{eB} = 9 T_0 + \frac{T_0 a_2}{g_{1i}} + \frac{9 T_0 a_2}{g_{1i}} = T_0 \left(9 + \frac{10}{25,12} a_2 \right)$$

5. Potencia de ruido, total equivalente, en el punto B:

$$n_B = k T_{eB} B = 1,3806 \cdot 10^{-23} \cdot T_{eB} \cdot 4 \cdot 10^3 = 5,5224 \cdot 10^{-20} \cdot T_{eB}$$

Comparamos con la señal de 10 nW, e imponemos el umbral de calidad. Despejamos el valor requerido para T_{eB} :

$$35 \leq 10 \log \left[\frac{10 \cdot 10^{-9}}{5,5224 \cdot 10^{-20} \cdot T_{eB}} \right]$$

$$T_{eB} = 57262742 \text{ K}$$

Sustituimos en la expresión del ruido, y despejamos la atenuación del cable:

$$57262742 = 300 \left(9 + \frac{10}{25,12} a_2 \right)$$

$$a_2 = 479457 \text{ v.p.} \rightarrow A_2 \approx 56,8 \text{ dB}$$

Que corresponde a una longitud de cable:

$$56,8 = 0,05 \cdot L$$

$$L = 1136 \text{ m}$$

Problema 4.5 (Junio de 2004)

1. Añadimos al cuadro una tercera columna con la ganancia en dB (restando a la potencia de salida la potencia de entrada). Las tres primeras líneas de la nueva columna muestran una ganancia constante, de manera que podemos asegurar que es una zona con comportamiento lineal. Por lo tanto, la ganancia de pequeña señal es:

$$G_i = 20 \text{ dB}$$

$$g_i = a_1 = 10 \text{ v.s.}$$

2. En la tercera columna buscamos la línea en la que la ganancia ha sufrido una compresión de 1 dB, es decir, buscamos una ganancia de 19 dB:

$$-0,92 - (-20) = 19,08 \text{ dB}$$

$$-0,17 - (-19) = 18,83 \text{ dB}$$

El punto de compresión está entre -20 y -19 dBW de potencia de entrada. Podemos tomar -20 , que es el valor más cercano, promediar los dos valores, o interpolar linealmente. Hacemos lo último, ver figura 4.1, y se obtiene $-19,68$ dBW:

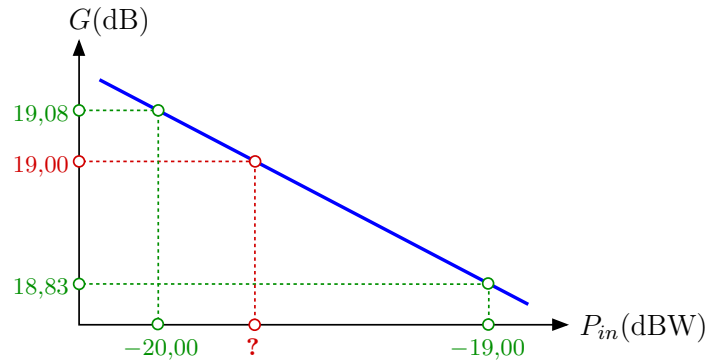


Figura 4.1: Interpolación lineal.

$$P_{in}(1\text{dB}) = \frac{-20(19,00 - 18,83) - 19(19,08 - 19,00)}{19,08 - 18,83} \approx -19,68 \text{ dBW}$$

$$p_{in} = 10,765 \text{ mW}$$

$$P_{out}(1 \text{ dB}) = P_{in} + G_i - 1 = -0,68 \text{ dBW}$$

$$p_{out} = 855,067 \text{ mW}$$

3. Queda por calcular el coeficiente a_3 . De la potencia a la entrada en el P1dB sacamos la amplitud:

$$0,010765 = \frac{A^2}{2 \cdot 50}$$

$$A^2 = 1,0765$$

Y sustituimos valores en la condición del P1dB:

$$10^{G_{1dB}/20} = a_1 + \frac{3}{4} a_3 A^2$$

$$10^{19/20} = 10 + \frac{3}{4} a_3 1,0765$$

$$a_3 \approx -1,347$$

El polinomio es:

$$y \approx -1,347 \cdot x^3 + 10 \cdot x$$

Problema 4.6 (Septiembre de 2004)

Dibujamos la recta de un fundamental a la salida, con ganancia ideal. Un punto puede ser $P_e = -10$ dBm, $P_s = P_e + G_i = 30$ dBm. Otro se calcula de inmediato, sin más que aplicar la ganancia G_i a cualquier entrada. (O, si se prefiere, la pendiente es unidad.)

Dibujamos la recta de una componente I3. Un punto viene dado en el enunciado: la señal de entrada (bitono) es de 0,2 mW, luego uno de los tonos a la entrada tiene 0,1 mW o, lo que es lo mismo, -10 dBm; un batido de tercer orden es de $10 \mu\text{W}$, es decir, -20 dBm. Por otro lado, la pendiente es conocida, y vale 3.

En la figura 4.2 se han dibujado las 2 rectas. La intersección es el IP3.

Por supuesto, el problema también se puede resolver de forma analítica. La ganancia de pequeña señal es dato:

$$a_1 = 10^{G_i/20} = 10^{40/20} = 100$$

A partir del punto que nos definen, calculamos a_3 :

$$p_e = 0,1 \cdot 10^{-3} = \frac{A^2}{2}$$

$$A^2 = 0,2 \cdot 10^{-3}$$

$$10 \cdot 10^{-6} = \frac{\left(\frac{3}{4} a_3 A^3\right)^2}{2}$$

$$20 \cdot 10^{-6} = \frac{9}{16} a_3^2 (0,2 \cdot 10^{-3})^3$$

$$a_3 = -2108,2$$

Imponemos la condición del IP3, y sacamos la amplitud (en el IP3):

$$a_1 = \frac{3}{4} |a_3| A^2$$

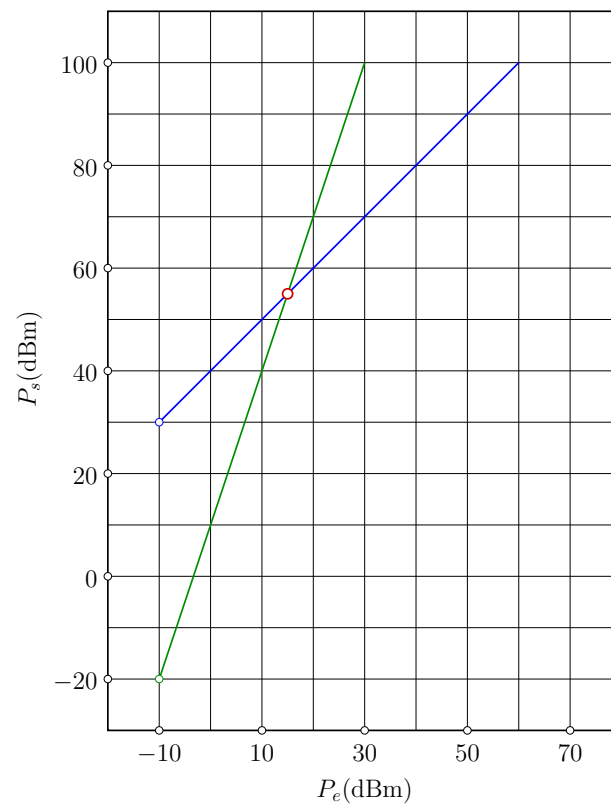


Figura 4.2: Resolución gráfica.

$$100 = \frac{3}{4} 2108,2 A^2$$

$$A^2 = 0,063245$$

Potencias en el IP3:

$$P_e = 10 \log\left(\frac{0,063245}{2} 1000\right) \approx 15,0 \text{ dBm}$$

$$P_s = P_e + G_i = 15,0 + 40 = 55,0 \text{ dBm}$$

Que concuerdan perfectamente con el resultado gráfico.

Problema 4.7 (Septiembre de 2005)

Tenemos que calcular los coeficientes de un polinomio:

$$y = a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3$$

No tenemos datos para hallar a_2 . Podemos imponerle un valor nulo:

$$a_2 = 0$$

El coeficiente a_1 es la ganancia lineal:

$$G_0 = 20 \log(a_1) = 40 \text{ dB} \Rightarrow a_1 = 100 \text{ v.s.}$$

Para calcular a_3 vamos a usar el IP3. La potencia de salida en el IP3 es tanto la potencia de un fundamental sin distorsión como la potencia de un batido de tercer orden:

$$p_{sIP3} \approx 666,807 \text{ W}$$

$$666,807 = \frac{a_1^2 A^2}{2R} = \frac{100^2 A^2}{2 \cdot 50}$$

$$A \approx 2,5823 \text{ V}$$

$$666,807 = \frac{3^2}{4^2} \frac{a_3^2 A^6}{2R} = \frac{9}{16} \frac{a_3^2 2,5823^6}{2 \cdot 50}$$

$$a_3 \approx -20$$

También se puede trabajar a partir del dato del punto de compresión a 1 dB. Con la potencia de salida hallamos la de entrada, y sacamos la amplitud del tono:

$$P_{e1dB} = P_{s1dB} - G_0 + 1 = 47,6 - 40 + 1 = 8,6 \text{ dBm} \rightarrow 7,244 \text{ mW}$$

$$7,244 \cdot 10^{-3} = \frac{A^2}{2R} = \frac{A^2}{100} \Rightarrow A \approx 0,8511 \text{ V}$$

Con el valor de A y la potencia de salida, calculamos a_3 :

$$p_{s1dB} = 57,54 \text{ W} = \left(a_1 A + \frac{3}{4} a_3 A^3 \right)^2 \frac{1}{2R}$$

$$a_3 \approx -20$$

Problema 4.8 (Junio de 2006)

1. La ganancia de pequeña señal es el término lineal del polinomio. En unidades logarítmicas:

$$G_0 = 20 \log(a_1) = 20 \log(80) \approx 38 \text{ dB}$$

2. Calculamos la amplitud A en el punto de compresión a 1 dB:

$$G_{1dB} = 38 - 1 = 37 \text{ dB}$$

$$10^{(G_{1dB}/20)} = a_1 + \frac{3}{4} a_3 A^2$$

$$10^{(37/20)} = 80 - \frac{3}{4} 12,274 A^2$$

$$A \approx 1 \text{ V}$$

Ahora calculamos la potencia de entrada y la de salida para la amplitud obtenida:

$$P_{e1dB} = 10 \log \left(\frac{1^2}{2 \cdot 50} 1000 \right) = 10 \text{ dBm}$$

$$P_{s1dB} = P_{e1dB} + G_{1dB} = 47 \text{ dBm}$$

3. Primero calculamos el nivel de entrada del tono:

$$p_e(W) = 1 = \frac{A^2}{2R}$$

$$A = 10 \text{ V}$$

Ahora calculamos la ganancia comparando las potencias de entrada y salida:

$$G = 20 \log \left[\frac{|a_1 A + (3/4)a_3 A^3|}{A} \right] = 20 \log \left[\left| 80 - (3/4) \cdot 12,274 \cdot 1^2 \right| \right] \approx 58,5 \text{ dB}$$

Comentario: el resultado no tiene sentido. El modelo matemático (polinomio de tercer grado) no sirve para este nivel de entrada. O bien la ganancia es mucho menor que en el punto de compresión a 1 dB, o bien el dispositivo se ha destruido.

Problema 4.9 (Junio de 2007)

La ganancia de pequeña señal es:

$$a_1 = 20 \text{ v.s.}$$

$$G_0 = 20 \log(a_1) \approx 26 \text{ dB}$$

En el punto de compresión a 1 dB:

$$G_{1dB} = G_0 - 1 = 25 \text{ dB}$$

$$10^{G_{1dB}/20} = a_1 + \frac{3}{4} a_3 A^2$$

$$10^{25/20} = 20 - \frac{3}{8} A^2$$

$$A^2 \approx 5,9125$$

Potencias en el P1dB:

$$P_{e1dB} = 10 \log \left(\frac{5,9125}{2 \cdot 50} 1000 \right) \approx 17,7 \text{ dBm}$$

$$P_{s1dB} = P_{e1dB} + G_{1dB} = 42,7 \text{ dBm}$$

Problema 4.10 (Septiembre de 2007)

1. Con las tres primeras potencias de entrada prácticamente no hay variación en la ganancia, de manera que estamos en pequeña señal. La ganancia ideal (de pequeña señal) es:

$$G_i = P_{out} - P_{in} = 21 - (-5) = 26 \text{ dB}$$

2. Para encontrar el punto de compresión a 1 dB, buscamos en el cuadro filas con ganancia de 25 dB (1 dB menos que la ideal):

$$P_{in} = 11 \Rightarrow G = 25,16 \text{ dB}$$

$$P_{in} = 12 \Rightarrow G = 24,92 \text{ dB}$$

Interpolamos entre 11 y 12 dBm:

$$P_{in} = \frac{12(25,16 - 25) + 11(25 - 24,92)}{25,16 - 24,92}$$

El punto de compresión está caracterizado por:

$$P_{in} \approx 11,67 \text{ dBm}$$

$$P_{out} = P_{in} + G_i - 1 \approx 36,67 \text{ dBm}$$

La amplitud (al cuadrado) en el punto de compresión es:

$$10^{(11,67/10)} = \frac{A^2}{2R} \rightarrow A^2 \approx 1,469$$

3. Calculamos el coeficiente a_1 (parte lineal del polinomio):

$$a_1 = 10^{(G_i/20)} \approx 20$$

Ya sólo resta calcular el coeficiente a_3 :

$$G_i - 1 = 25 = 20 \log \left[\frac{a_1 A + (3/4)a_3 A^3}{A} \right]$$

$$10^{(25/20)} = a_1 + (3/4)a_3 A^2$$

$$a_3 \approx -2$$

Negativo, por supuesto, para que saturé.

Problema 4.11 (Septiembre de 2008)

1. En la primera medida, como el tercer armónico es despreciable, estamos en pequeña señal. Por lo tanto:

$$G_0 = P_{s0} - P_e = -6 - (-30) = 24 \text{ dB}$$

$$a_1 = 10^{24/20} = 15,8489 \text{ v.s.}$$

Ahora usamos la segunda medida. De la potencia a la entrada sacamos A^2 :

$$P_e = 10 \text{ dBm} \rightarrow 0,01 \text{ W}$$

$$p_e = 0,01 = \frac{A^2}{2R} = \frac{A^2}{2 \cdot 50}$$

$$A^2 = 1$$

Y con la potencia del tercer armónico calculamos a_3 :

$$P_{s0} = -2,04 \text{ dBm} \rightarrow 6,25173 \cdot 10^{-4} \text{ W}$$

$$p_{s0} = 6,25173 \cdot 10^{-4} = \frac{1}{2R} \left(\frac{a_3 A^3}{4} \right)^2 = \frac{1}{2 \cdot 50} \left(\frac{a_3 \cdot 1}{4} \right)^2$$

$$a_3 = -1$$

La potencia del fundamental a la salida es redundante y se puede usar para comprobar los resultados.

2. La señal de entrada es la suma de dos sinusoides. Si la potencia total es el doble de 10 dBm, entonces cada senoide componente tiene precisamente 10 dBm. Luego:

$$p_{e1} = 0,01 \text{ W}$$

$$A^2 = 1$$

A la salida tendremos:

$$f_1, f_2: \quad \frac{1}{2R} \left[a_1 A + \frac{9}{4} a_3 A^3 \right]^2 \rightarrow 32,67 \text{ dBm}$$

$$3f_1, 3f_2: \quad \frac{1}{2R} \left[\frac{1}{4} a_3 A^3 \right]^2 \rightarrow -2,04 \text{ dBm}$$

$$\text{batidos orden 3:} \quad \frac{1}{2R} \left[\frac{3}{4} a_3 A^3 \right]^2 \rightarrow 7,50 \text{ dBm}$$

Problema 4.12 (Junio de 2009)

La ganancia en la zona lineal (pequeña señal) es:

$$G_0 = 20 \log(a_1)$$

Y en el punto de compresion a 1 dB tenemos un dB menos:

$$G_{1dB} = 20 \log(a_1) - 1$$

Pasamos G_{1dB} a unidades naturales (veces de señal):

$$10^{\left[\frac{20 \log(a_1) - 1}{20}\right]} = 10^{\log(a_1)} \cdot 10^{(-1/20)} = \frac{a_1}{10^{(1/20)}}$$

Llevamos el resultado anterior a la condición en el P1dB:

$$\frac{a_1}{10^{(1/20)}} = a_1 + \frac{3}{4} a_3 A^2$$

Por conveniencia, despejamos A^2 (en el P1dB):

$$A^2 = \frac{4}{3} \left(\frac{1}{10^{(1/20)}} - 1 \right) \frac{a_1}{a_3}$$

Calculamos la potencia de salida en el P1dB:

$$p_{s1dB} = \frac{1}{2R} \left[a_1 A + \frac{3}{4} a_3 A^3 \right]^2 = \frac{1}{2R} A^2 \left[a_1 + \frac{3}{4} a_3 A^2 \right]^2$$

Y, por último, sustituimos el valor de A^2 :

$$p_{s1dB} = \frac{1}{2R} \frac{4}{3} \left(\frac{1}{10^{(1/20)}} - 1 \right) \frac{a_1}{a_3} \frac{a_1^2}{10^{(2/20)}} \approx -0,0575883 \frac{1}{R} \frac{a_1^3}{a_3}$$

Problema 4.13 (Enero de 2010)

En el IP3 se cumple que:

$$a_1 = -\frac{3}{4} a_3 A^2$$

$$A^2 = -\frac{4}{3} \frac{a_1}{a_3}$$

Sustituimos el valor de A^2 en la expresión de la potencia de salida en el IP3:

$$p_{s0} = \frac{a_1^2}{2R} A^2 = -\frac{2}{3R} \frac{a_1^3}{a_3}$$

Problema 4.14 (Junio de 2010)

1. El tono de entrada tiene 10 dBm, que son 10 mW. La amplitud vale:

$$p_e = \frac{A^2}{2R} \Rightarrow \frac{1}{100} = \frac{A^2}{2 \cdot 50} \Rightarrow A = 1 \text{ V}$$

2. Como no hay componente a $f_2 = 2f_0$, el coeficiente es nulo:

$$a_2 = 0$$

3. Despejamos a_3 a partir de la potencia del armónico a $3f_0 = 30$ kHz. El resultado es negativo para que exista efecto de saturación.

$$P_{s3}(\text{dBm}) = 10 \cdot \log \left[\frac{(a_3 A^3/4)^2}{2R} \cdot 1000 \right]$$

$$-8 = 10 \cdot \log \left[\frac{(a_3/4)^2}{100} \cdot 1000 \right] \Rightarrow a_3 \approx -0,5 \text{ veces de señal}$$

4. Despejamos a_1 a partir de la potencia del fundamental a la salida.

$$P_s(\text{dBm}) = 10 \cdot \log \left[\frac{\left(a_1 A + \frac{3}{4} a_3 A^3\right)^2}{2R} \cdot 1000 \right]$$

$$29,7 = 10 \cdot \log \left[\left(a_1 - \frac{3}{4} \cdot 0,5\right)^2 \cdot 10 \right] \Rightarrow a_1 \approx 10,0 \text{ veces de señal}$$

5. La ganancia de pequeña señal es a_1 (en veces de señal). Por lo tanto:

$$G_0 = 20 \cdot \log(a_1) = 20 \text{ dB}$$

6. En el punto de compresión a 1 dB:

$$1 = 20 \cdot \log \left[\frac{a_1 A'}{\left(a_1 A' + \frac{3}{4} a_3 A'^3\right)} \right] = 20 \cdot \log \left[\frac{10}{\left(10 - \frac{3}{8} A'^2\right)} \right]$$

$$A' = 1,703 \text{ V} \Rightarrow A' \approx 1,7 \text{ V}$$

Potencias:

$$P_{e1dB} = 10 \cdot \log \left(\frac{A'^2}{2R} 1000 \right) = 10 \cdot \log (1,7^2 \cdot 10) = 14,6 \text{ dBm}$$

$$P_{s1dB} = P_{e1dB} + G_{1dB} = 14,6 + 19 = 33,6 \text{ dBm}$$

Problema 4.15 (Julio de 2010)

A partir de las medidas del analizador, sacamos las potencias a f_0 y $3f_0$ a la salida del amplificador:

$$\text{A } f_0: -4 + 50 = 46 \text{ dBm} \rightarrow 40 \text{ W}$$

$$\text{A } 3f_0: -16 + 50 = 34 \text{ dBm} \rightarrow 2,5 \text{ W}$$

Calculamos esas potencias en función del polinomio, y despejamos los coeficientes:

$$A = 2 \text{ V}$$

Trabajamos a $3f_0$:

$$p_{s3} = \frac{1}{2R} \left(\frac{a_3 A^3}{4} \right)^2$$

$$2,5 = \frac{1}{2 \cdot 50} \left(\frac{a_3 2^3}{4} \right)^2$$

$$a_3 = -7,9 \text{ (negativo para que haya saturación!)}$$

Como no se ve nada a $2f_0$ podemos despreciar a_2 : $a_2 \approx 0$

Trabajamos a f_0 :

$$p_s = \frac{1}{2R} \left(a_1 A + \frac{3a_3 A^3}{4} \right)^2$$

$$40 = \frac{1}{2 \cdot 50} \left(a_1 2 - \frac{3 \cdot 7,9 \cdot 2^3}{4} \right)^2$$

$$a_1 = 55,3 \text{ v.s.}$$

Y la ganancia de pequeña señal es:

$$G_0 = 20 \log(a_1) = 34,9 \text{ dB}$$

En realidad se puede dar un resultado más preciso respecto al coeficiente a_2 . Como no se ve ninguna línea espectral a $2f_0$, es seguro que a esa frecuencia tenemos menos de -28 dBm (valor del límite inferior de la pantalla). Pasando al amplificador son 22 dBm, que analíticamente se corresponden con:

$$p_{s2} = \frac{1}{2R} \left(\frac{a_2 A^2}{2} \right)^2$$

de donde se saca que $a_2 < 2$.

Problema 4.16 (Diciembre de 2010)

1. Puesto que una de las rectas que se cortan en el IP3 es la de un fundamental a la salida con ganancia de pequeña señal, la diferencia entre las potencias del enunciado es la ganancia ideal, G_0 , que en veces de señal es precisamente el coeficiente a_1 del polinomio:

$$P_{s\,IP3} - P_{e\,IP3} = 49 - 23 = 26 \text{ dB}$$

$$26(\text{dB}) = 20 \log [a_1(\text{veces señal})] \rightarrow a_1 = 19,953 \approx 20$$

A partir de la potencia de entrada de un fundamental, calculamos la amplitud A :

$$P_{e\,IP3} = 23 \text{ dBm} \rightarrow p_{e\,IP3} = 0,2(\text{W}) = \frac{A^2}{2 \cdot 50} \rightarrow A = \sqrt{20} \text{ V}$$

Por último, imponemos la condición del IP3:

$$a_1 A = -\frac{3}{4} a_3 A^3 \rightarrow a_1 = -\frac{3}{4} a_3 A^2$$

$$20 = -\frac{3}{4} a_3 20$$

$$a_3 = -\frac{4}{3} \text{ (negativo para que exista saturación)}$$

2. En el P1dB:

$$G_{P1dB} = G_0 - 1 = 26 - 1 = 25 \text{ dB}$$

$$10^{G_0/20} = a_1 + \frac{3}{4} a_3 A'^2$$

$$10^{25/20} = 20 - \frac{3}{4} \frac{4}{3} A'^2 \rightarrow A'^2 \approx 2,2172$$

Luego las potencias pedidas son:

$$P_{e\,P1dB} = 10 \log \left[\frac{A'^2}{2R} 1000 \right] = 13,46 \text{ dBm}$$

$$P_{s\,P1dB} = P_{e\,P1dB} + G_{P1dB} = 38,46 \text{ dBm}$$

Problema 4.17 (Junio de 2011)

1. La ganancia de pequeña señal es el término lineal del polinomio. En unidades logarítmicas:

$$G_i = 20 \log(a_1) = 20 \log(40) \approx 32 \text{ dB}$$

2. En el punto de compresión a 1 dB la ganancia es $32 - 1 = 31$ dB. Por otro lado, la ganancia se puede obtener comparando la amplitud al cuadrado del fundamental a la salida con el cuadrado de la amplitud a la entrada:

$$G_{1dB} = 32 - 1 = 20 \log \left[\frac{a_1 A + \frac{3}{4} a_3 A^3}{A} \right] = 20 \log \left[\frac{40A + \frac{3}{4}(-602,5)A^3}{A} \right]$$

$$10^{(31/20)} = 40 + \frac{3}{4}(-602,5)A^2$$

$$A \approx 0,1 \text{ V}$$

Ahora calculamos la potencia de entrada y la de salida para la amplitud obtenida:

$$P_{e1dB} = 10 \log \left(\frac{A^2}{2R} 1000 \right) = -10 \text{ dBm}$$

$$P_{s1dB} = 10 \log \left[\frac{\left(a_1 A + \frac{3}{4} a_3 A^3 \right)^2}{2R} 1000 \right] = P_{e1dB} + G_i - 1 = 21 \text{ dBm}$$

3. Primero calculamos el nivel de entrada del único tono:

$$p_e(W) = 10 \cdot 10^{-3} = \frac{A^2}{2R}$$

$$A = 1 \text{ V}$$

Ahora calculamos la ganancia comparando las potencias de entrada y salida:

$$G = 20 \log \left[\frac{|a_1 A + (3/4)a_3 A^3|}{A} \right]$$

$$G = 20 \log \left[\left| 40 - (3/4) \cdot 602,5 \cdot 1^2 \right| \right] \approx 52,3 \text{ dB}$$

Comentario: El resultado no tiene sentido. El modelo matemático (polinomio de tercer grado) no sirve para este nivel de entrada. La ganancia debería ser mucho menor que en el punto de compresión a 1 dB. (También cabe la posibilidad de que el dispositivo se destruya.)

Problema 4.18 (Julio de 2011)

De la potencia de $x(t)$ sacamos la amplitud de pico al cuadrado A^2 (al cuadrado nos vendrá mejor en operaciones posteriores):

$$-10 \text{ dBm} \rightarrow 10^{-4} \text{ W}$$

$$10^{-4} = 2 \frac{A^2}{2 \cdot 50} \rightarrow A^2 = 5 \cdot 10^{-3}$$

La pantalla del analizador cubre desde f_i hasta f_f :

$$f_i(\text{MHz}) = CF - SPAN/2 = 100,1 - 0,5 = 99,6$$

$$f_f(\text{MHz}) = CF + SPAN/2 = 100,1 + 0,5 = 100,6$$

De manera que sólo se muestran 4 deltas de $y(t)$, a las frecuencias:

$$2f_1 - f_2 = 99,7 \text{ MHz (un batido de orden 3)}$$

$$f_1 = 99,9 \text{ MHz (un fundamental)}$$

$$f_2 = 100,1 \text{ MHz (un fundamental)}$$

$$2f_2 - f_1 = 100,3 \text{ MHz (un batido de orden 3)}$$

Potencia de un fundamental a la salida:

$$p_{s0} = \frac{1}{2R_{at}} \left[a_1 A + \frac{9}{4} a_3 A^3 \right]^2 = \frac{1}{2R_{at}} A^2 \left[a_1 + \frac{9}{4} a_3 A^2 \right]^2$$

$$p_{s0} = \frac{1}{2 \cdot 50 \cdot 10^{-4}} 5 \cdot 10^{-3} \left[40 - \frac{9}{4} 4 \cdot 2,5 \cdot 10^{-5} \right]^2 \approx 8 \cdot 10^{-6} \text{ W}$$

$$P_{s0} \approx -21,0 \text{ dBm}$$

Potencia de un batido de tercer orden:

$$p_{s3} = \frac{1}{2R_{at}} \left[\frac{3}{4} a_3 A^3 \right]^2 = \frac{1}{2R_{at}} \left[\frac{3}{4} a_3 \right]^2 [A^2]^3$$

$$p_{s3} = \frac{1}{2 \cdot 50 \cdot 10^{-4}} \left[\frac{3}{4} 4 \right]^2 [5 \cdot 10^{-3}]^3 = 1,125 \cdot 10^{-12} \text{ W}$$

$$P_{s3} \approx -89,5 \text{ dBm}$$

Y en la figura 4.3 se puede observar cómo queda la pantalla del analizador.

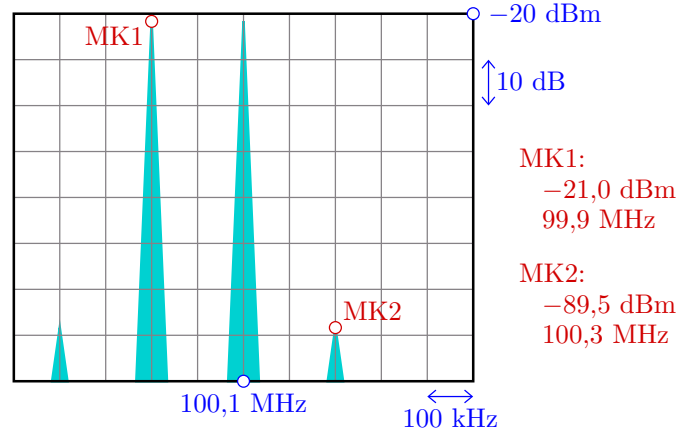


Figura 4.3: Señal medida en el analizador.

Problema 4.19 (Enero de 2012)

1. En el cuadro 4.1 aparecen las potencias de salida y las ganancias. Además, se muestran resultados intermedios.

$P_e(\text{dBm})$	$p_e(\text{W})$	$A_e(\text{V})$	$P_s(\text{dBm})$	$G(\text{dB})$
0,00	10^{-3}	0,3162	25,96	25,96
4,00	$2,512 \cdot 10^{-3}$	0,5012	29,86	25,86
8,00	$6,310 \cdot 10^{-3}$	0,7943	33,60	25,60
12,00	$15,85 \cdot 10^{-3}$	1,2589	36,92	24,92

Cuadro 4.1: Potencias y ganancias, siempre a f_0 .

2. Ganancia de pequeña señal:

$$G_0 = 20 \log(a_1) = 26,0 \text{ dB}$$

Ganancia en el P1dB:

$$G_{1\text{dB}} = G_0 - 1 = 25,0 \text{ dB}$$

De la condición en el P1dB sacamos la amplitud al cuadrado:

$$10^{G_{1\text{dB}}/20} = a_1 + \frac{3}{4} a_3 A_{1\text{dB}}^2$$

$$10^{25/20} = 20 - \frac{3}{4} 2 A_{1\text{dB}}^2$$

$$A_{1\text{dB}}^2 = 1,4781$$

Calculamos las potencias en el P1dB:

$$P_{e1\text{dB}} = 10 \log \left(\frac{A_{1\text{dB}}^2}{2R} \right) = 10 \log \left(\frac{1,4781}{2 \cdot 50} 1000 \right) = 11,70 \text{ dBm}$$

$$P_{s1\text{dB}} = P_{e1\text{dB}} + G_{1\text{dB}} = 36,70 \text{ dBm}$$

El resultado es coherente con el cuadro, que sitúa el P1dB entre 8 y 12 dBm a la entrada.

3. Imponemos la condición del IP3 y sacamos la amplitud al cuadrado:

$$a_1 = \frac{3}{4} |a_3| A_{IP3}^2$$

$$20 = \frac{3}{4} 2 A_{IP3}^2$$

$$A_{IP3}^2 = 13,3$$

A la salida, la potencia de un batido de tercer orden es igual que la potencia del fundamental sin distorsión:

$$P_{eIP3} = 10 \log \left[\frac{A_{IP3}^2}{2R} \right] = 10 \log \left[\frac{13,3}{2 \cdot 50} 1000 \right] = 21,25 \text{ dBm}$$

$$P_{s3} = P_{eIP3} + G_0 = 47,25 \text{ dBm}$$

Problema 4.20 (Junio de 2012)

1. Calculamos la amplitud a la salida del fundamental (el resto es despreciable por estar en zona lineal) cuando hay 30 W:

$$p_{s0} = \frac{A_{s0}^2}{2R}$$

$$30 = \frac{A_{s0}^2}{2 \cdot 50} \rightarrow A_{s0} = \sqrt{3000} \text{ V}$$

El coeficiente a_1 es la ganancia (v.s.) en zona lineal:

$$a_1 = \frac{A_{s0}}{A_e} = \frac{\sqrt{3000}}{10} = \sqrt{30} \text{ v.s.}$$

También podemos trabajar con potencias:

$$p_e = \frac{10^2}{2 \cdot 50} = 1 \text{ W}$$

$$p_{s0} = 30 \text{ W}$$

$$a_1^2 = \frac{p_{s0}}{p_e} = \frac{30}{1}$$

2. Como estamos en zona lineal la potencia de salida del fundamental tiene una saturación despreciable:

$$p_{s0} \approx \frac{(a_1 A_e)^2}{2R} = 30 \text{ W}$$

Potencia del segundo armónico:

$$p_{s2} = \frac{(a_2 A_e^2/2)^2}{2R} = \frac{(50 a_2)^2}{100}$$

Relacionamos las 2 potencias y despejamos a_2 :

$$50 = 10 \log \left(\frac{p_{s0}}{p_{s2}} \right)$$

$$30 \cdot 10^{-5} \cdot 100 = (50 a_2)^2$$

$$a_2 = 3,4641 \cdot 10^{-3}$$

3. Ganancia en el P1dB:

$$G_0 = 20 \log(a_1) \approx 14,77 \text{ dB}$$

$$G_{1dB} = G_0 - 1 \approx 13,77 \text{ dB}$$

La potencia a la entrada en el P1dB es el doble del caso anterior (1 W):

$$p_{1dB} = 2 \cdot 1 = 2 \text{ W}$$

Que se corresponde con una amplitud A_{1dB} :

$$2 = \frac{A_{1dB}^2}{2 \cdot 50}$$

$$A_{1dB}^2 = 200$$

Aplicamos la condición del P1dB y despejamos a_3 :

$$10^{G_{1dB}/20} = a_1 + \frac{3}{4} a_3 A_{1dB}^2$$

$$10^{13,77/20} = \sqrt{30} + \frac{3}{4} a_3 200$$

$$a_3 \approx -3,97 \cdot 10^{-3}$$

Problema 4.21 (Julio de 2012)

La ganancia ideal es a_1 , y en el P1dB estamos 1 dB por debajo del valor ideal:

$$G_0 = 20 \log(a_1) = 20 \text{ dB}$$

$$G_{1dB} = G_0 - 1 = 19 \text{ dB}$$

De la condición del P1dB sacamos la amplitud A (realmente A^2 , por comodidad). Con la amplitud calculamos las potencias:

$$10^{G_{1dB}/20} = a_1 + \frac{3}{4} a_3 A^2$$

$$10^{19/20} = 10 - \frac{3}{4} 0,145 A^2$$

$$A^2 \approx 10$$

$$P_{e1dB} = 10 \log \left(\frac{A^2}{2R} \right) = 10 \log \left(\frac{10}{2 \cdot 100} 1000 \right) \approx 17,0 \text{ dBm}$$

$$P_{s1dB} = P_{e1dB} + G_{1dB} = 36,0 \text{ dBm}$$

De la condición del IP3 sacamos la nueva A . Con la amplitud calculamos las potencias:

$$a_1 = \frac{3}{4} |a_3| A^2$$

$$10 = \frac{3}{4} 0,145 A^2$$

$$A^2 \approx 91,954$$

$$P_{eIP3} = 10 \log \left(\frac{91,954}{2 \cdot 100} 1000 \right) \approx 26,6 \text{ dBm}$$

$$P_{sIP3} = P_{eIP3} + G_0 = 46,6 \text{ dBm}$$

Problema 4.22 (Abril de 2013)

Trabajamos con la condición que impone el IP3:

$$a_1 = -\frac{3}{4} a_3 A^2$$

$$A^2 = -\frac{4}{3} \frac{a_1}{a_3}$$

Calculamos la potencia de salida en el IP3, teniendo en cuenta el resultado anterior:

$$p_{sIP3} = \frac{1}{2R} \left(\frac{3}{4} a_3 A^3 \right)^2 = \frac{1}{2R} \frac{9}{16} a_3^2 (A^2)^3 = -\frac{2}{3} \frac{1}{R} \frac{a_1^3}{a_3}$$

Ahora trabajamos con la condición que impone el P1dB (la amplitud A es distinta a la anterior):

$$G_0 = 20 \log(a_1)$$

$$G_{1dB} = 20 \log(a_1) - 1$$

$$10^{\left[\frac{20 \log(a_1) - 1}{20} \right]} = 10^{\log(a_1)} \cdot 10^{(-1/20)} = \frac{a_1}{10^{(1/20)}}$$

$$\frac{a_1}{10^{(1/20)}} = a_1 + \frac{3}{4} a_3 A^2$$

$$A^2 = \frac{4}{3} \left(\frac{1}{10^{(1/20)}} - 1 \right) \frac{a_1}{a_3}$$

Calculamos la potencia de salida en el P1dB, teniendo en cuenta el resultado anterior:

$$p_{s1dB} = \frac{1}{2R} \left[a_1 A + \frac{3}{4} a_3 A^3 \right]^2 = \frac{1}{2R} A^2 \left[a_1 + \frac{3}{4} a_3 A^2 \right]^2$$

$$p_{s1dB} = \frac{1}{2R} \frac{4}{3} \left(\frac{1}{10^{(1/20)}} - 1 \right) \frac{a_1}{a_3} \frac{a_1^2}{10^{(2/20)}} \approx -0,0575883 \frac{1}{R} \frac{a_1^3}{a_3}$$

Formamos la relación de potencias:

$$\frac{p_{sIP3}}{p_{s1dB}} \approx \frac{2/3}{0,0575883} = 11,5764 \text{ v.p.} \rightarrow 10,6 \text{ dB}$$

Tema 5

MODULACIÓN ANALÓGICA

Problema 5.1

- DBL: estudiamos el ancho de banda:

$$B = 2W = 2 \cdot 15(\text{k}) = 30 \text{ kHz (OK)}$$

Imponemos la calidad y sacamos la potencia transmitida:

$$\left(\frac{S}{N}\right)_s = Z = 36 \text{ dB}$$

$$\left(\frac{S}{N}\right)_e = Z - 3 = 33 \text{ dB}$$

$$n_e = k T_0 B f = 1,3806 \cdot 10^{-23} \cdot 300 \cdot 30 \cdot 10^3 \cdot 16 \approx 2,0 \cdot 10^{-15} \text{ W}$$

$$N_e = -117,0 \text{ dBm}$$

$$33 = S_e - (-117,0)$$

$$S_e = -84,0 \text{ dBm}$$

$$S_{TX} = S_e + A = -84,0 + 122 = 38,0 \text{ dBm} \rightarrow 6,31 \text{ W}$$

Valor de pico de la señal modulada:

$$p_{TX} = \frac{A_t^2}{2R} \langle x_n^2 \rangle$$

$$6,31 = \frac{A_t^2}{2 \cdot 50} 0,22$$

$$A_p = A_t \approx 53,6 \text{ V}$$

- AM: estudiamos el ancho de banda:

$$B = 2W = 2 \cdot 15(\text{k}) = 30 \text{ kHz (OK)}$$

Imponemos la calidad y sacamos la potencia transmitida:

$$\eta = \frac{m^2 \langle x_n^2 \rangle}{1 + m^2 \langle x_n^2 \rangle} = \frac{0,9^2 \cdot 0,22}{1 + 0,9^2 \cdot 0,22} \approx 0,15125$$

$$G_D = 10 \log(2\eta) \approx -5,2 \text{ dB}$$

$$\left(\frac{S}{N}\right)_s = \left(\frac{S}{N}\right)_e + G_D$$

$$36 = \left(\frac{S}{N}\right)_e - 5,2$$

$$\left(\frac{S}{N}\right)_e = 41,2 \text{ dB}$$

$$41,2 = S_e - (-117,0)$$

$$S_e = -75,8 \text{ dBm}$$

$$S_{TX} = -75,8 + 122 = 46,2 \text{ dBm} \rightarrow 41,7 \text{ W}$$

Valor de pico de la señal modulada:

$$p_{TX} = \frac{A^2}{2R} [1 + m^2 \langle x_n^2 \rangle]$$

$$41,7 = \frac{A^2}{2 \cdot 50} [1 + 0,9^2 \cdot 0,22]$$

$$A = 59,5 \text{ V}$$

$$A_p = A(1 + m) = 59,5(1 + 0,22) = 72,6 \text{ V}$$

- FM: estudiamos el ancho de banda:

$$B_c = 2(\Delta f + W)$$

$$180 = 2(\Delta f + 15)$$

$$\Delta f = 75 \text{ kHz}$$

A partir de la calidad final (36 dB), incluyendo la mejora por pre-deénfasis, sacamos la calidad a la entrada del demodulador, y de ahí el parámetro Z :

$$M \approx \frac{1}{3\left(\frac{2,1}{15}\right)^2} = 17,0 \text{ v.p.} \rightarrow 12,3 \text{ dB}$$

$$D = \frac{\Delta f}{W} = \frac{75}{15} = 5$$

$$\left(\frac{S}{N}\right)_s = Z + M + 10 \log(3 D^2 \langle x_n^2 \rangle)$$

$$36 = Z + 12,3 + 10 \log(3 \cdot 5^2 \cdot 0,22)$$

$$Z = 11,5$$

Verificamos que está por encima del umbral:

$$z_u = 40 (D + 1) = 240 \text{ v.p.} \rightarrow 23,8 \text{ dB}$$

Como la Z calculada es insuficiente, no queda más remedio que forzar una nueva calidad con el valor umbral Z_u :

$$Z = Z_u = 23,8 \text{ dB}$$

$$\left(\frac{S}{N}\right)_s = 23,8 + 12,3 + 10 \log(3 \cdot 5^2 \cdot 0,22) = 48,3 \text{ dB}$$

A partir de la Z fijada por el umbral calculamos la potencia transmitida:

$$Z = S_e - (N_e - 3)$$

$$23,8 = S_e - (-117 - 3)$$

$$S_e = -96,2 \text{ dBm}$$

$$S_{TX} = -96,2 + 122 = 25,8 \text{ dBm} \rightarrow 0,380 \text{ W}$$

Valor de pico de la señal modulada:

$$p_{TX} = \frac{A^2}{2R}$$

$$0,380 = \frac{A^2}{2 \cdot 50}$$

$$A_p = A = 6,16 \text{ V}$$

Problema 5.2 (Abril de 1992)

1. Señal a la entrada del diodo:

$$v_e(t) = x(t) + c(t)$$

Señal a la salida del diodo (entrada del filtro):

$$\begin{aligned} y_1(t) = & \frac{A_m^2 + A_c^2}{8} + \frac{A_m}{2} \cos(\omega_m t) + \frac{A_c}{2} \cos(\omega_c t) + \\ & + \frac{A_m^2}{8} \cos(2\omega_m t) + \frac{A_c^2}{8} \cos(2\omega_c t) + \\ & + \frac{A_c A_m}{4} \left\{ \cos[(\omega_c - \omega_m)t] + \cos[(\omega_c + \omega_m)t] \right\} \end{aligned}$$

El espectro bilateral se observa en la figura 5.1.

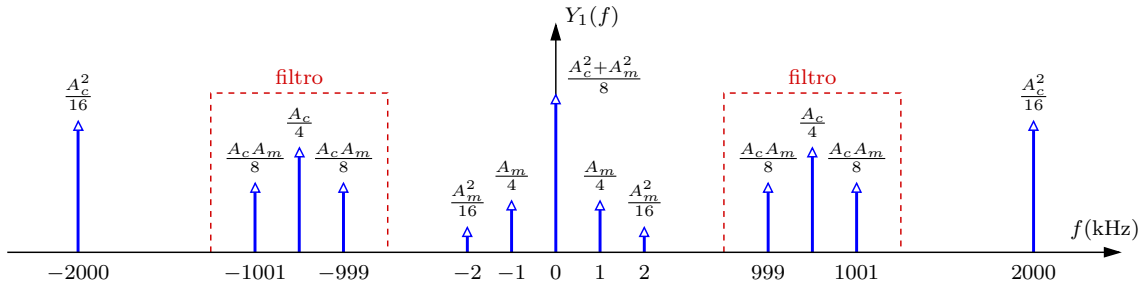


Figura 5.1: Espectro bilateral. Nótase la componente de continua en $f = 0$.

2. Tras el filtro queda:

$$y(t) = \frac{A_c}{2} [1 + A_m \cos(\omega_m t)] \cos(\omega_c t)$$

Comparando con la forma canónica de AM:

$$A = \frac{A_c}{2}$$

$$m = A_m$$

Si imponemos el valor máximo de m (que es 1):

$$A_m = 1 \text{ V}$$

Si imponemos el valor de la *PEP*:

$$\text{A la salida del amplificador: } PEP = 180 \text{ W}$$

$$\text{A la entrada del amplificador: } PEP = \frac{180}{10} = 18 \text{ W}$$

$$18 = \frac{A^2}{2} (1 + 1)^2$$

$$A = 3 \text{ V}$$

$$A_c = 2A = 6 \text{ V}$$

Este es un modulador típico de AM: se conoce como modulador *cuadrático* o *de ley cuadrática*. Para que funcione adecuadamente (sin excesiva distorsión) el coeficiente que acompaña a v_e^2 debe ser pequeño, lo que da lugar a índices de modulación bajos (usualmente por debajo del 10 %).

3. Atenuación del medio:

$$A_t = 60 + 10 \log(100) = 80 \text{ dB}$$

Potencia media transmitida:

$$p_T = PEP \frac{1 + m^2 \langle x_n^2 \rangle}{(1 + m)^2}$$

Potencia recibida:

$$p_R = \frac{PEP}{10^8} \frac{1 + m^2 \langle x_n^2 \rangle}{(1 + m)^2}$$

Imponemos el valor de calidad a la salida:

$$z = \frac{p_R}{N_0 W}$$

$$\left(\frac{s}{n}\right)_s = \eta z = \frac{m^2 \langle x_n^2 \rangle}{1 + m^2 \langle x_n^2 \rangle} \frac{PEP}{10^8 \cdot 10^{-12} \cdot W} \frac{1 + m^2 \langle x_n^2 \rangle}{(1 + m)^2}$$

$$\left(\frac{s}{n}\right)_s = \frac{m^2 \cdot \langle x_n^2 \rangle \cdot PEP}{10^8 \cdot 10^{-12} \cdot W \cdot (1 + m)^2}$$

$$100 = \frac{1^2 \cdot 0,5 \cdot 180}{10^8 \cdot 10^{-12} \cdot W \cdot (1 + 1)^2}$$

$$W = 2250 \text{ Hz}$$

Anchos de banda:

$$B(\text{postdetección}) = W = 2,25 \text{ kHz}$$

$$B(\text{predetección}) = 2W = 4,5 \text{ kHz}$$

Problema 5.3 (Septiembre de 1992)

- Hay que escoger las subportadoras de tal modo que la BLUs de cada rama pase por su filtro correspondiente:

$$c_1 = 100 \text{ kHz (se pierde algo de señal, es inevitable)}$$

$$c_2 = 104 \text{ kHz (hay más valores posibles)}$$

$$c_3 = 108 \text{ kHz (hay más valores posibles)}$$

El espectro de potencia unilateral se observa en la figura 5.2.

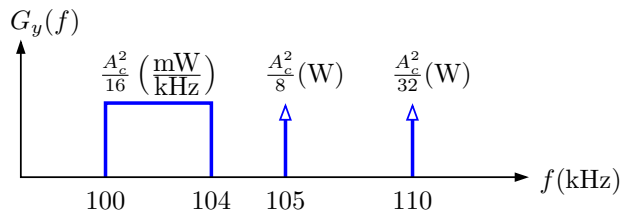


Figura 5.2: Espectro de potencia unilateral.

En las figuras 5.3, 5.4 y 5.5 se muestra gráficamente la obtención de los tres sub-espectros de la figura 5.2. Se recomienda al alumno que estudie cuidadosamente el proceso que sigue cada señal. Es imprescindible trabajar con los espectros matemáticos bilaterales.

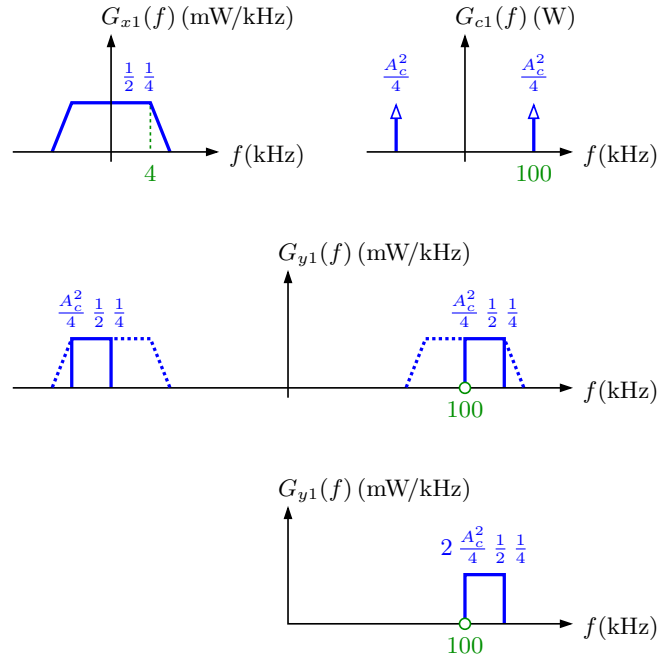


Figura 5.3: Obtención del subespectro de potencia de la rama superior.

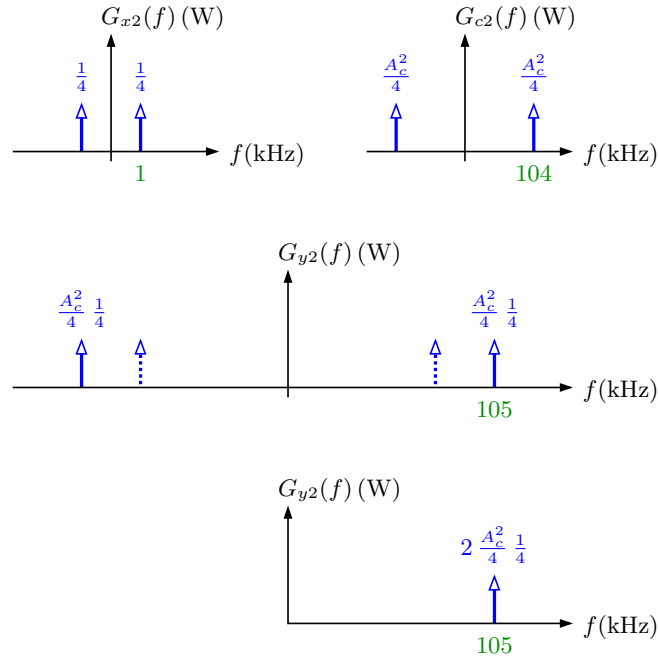


Figura 5.4: Obtención del subespectro de potencia de la rama media.

2. Obtenemos la potencia total a la salida integrando la densidad espectral de potencia:

$$p_y = \int_0^\infty G_y(f) df = 4 \frac{A_c^2}{16} + \frac{A_c^2}{8} + \frac{A_c^2}{32} = \frac{13 A_c^2}{32}$$

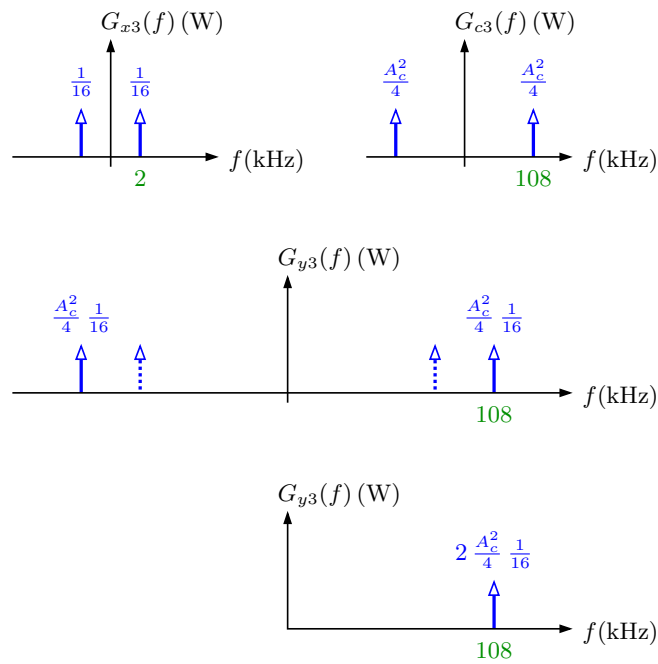


Figura 5.5: Obtención del subespectro de potencia de la rama inferior.

Igualamos a 7 W y despejamos la amplitud de las subportadoras:

$$7 = \frac{13 A_c^2}{32}$$

$$A_c \approx 4,15 \text{ V}$$

Problema 5.4 (Febrero de 1993)

1. Para calcular el índice de modulación de AM medimos, sobre la gráfica, los valores máximo y mínimo de la envolvente:

$$A_{max} = 3 \text{ V}$$

$$A_{min} = 1 \text{ V}$$

$$m = \frac{A_{max} - A_{min}}{A_{max} + A_{min}} = \frac{3 - 1}{3 + 1} = \frac{1}{2} \quad (50 \%)$$

2. Potencia media de AM:

$$A = \frac{A_{max} + A_{min}}{2} = \frac{3 + 1}{2} = 2 \text{ V}$$

$$p = \frac{2^2}{2 \cdot 1} [1 + 0,5^2 \cdot 0,5] = 2,25 \text{ W}$$

3. Potencia equivalente de pico de AM:

$$PEP = \frac{A_{max}^2}{2R} = \frac{3^2}{2 \cdot 1} = 4,5 \text{ W}$$

4. Potencia media de DBL:

$$A_t = 3 \text{ V}$$

$$p = \frac{A_t^2}{2R} \langle x_n^2 \rangle = \frac{3^2}{2 \cdot 1} \cdot 0,5 = 2,25 \text{ W}$$

5. Potencia equivalente de pico de DBL:

$$PEP = \frac{A_t^2}{2R} = 4,5 \text{ W}$$

Problema 5.5 (Febrero de 1993)

1. En el punto 1 tenemos una señal FM modulada por un tono:

$$y_1(t) = A \cos[\omega_c t + \beta \sin(\omega_m t)]$$

$$\beta = \frac{f_d A_m}{f_m}$$

La amplitud A no tiene que coincidir necesariamente con A_c ; depende de cómo esté implementado el modulador. En el punto 2 la señal está atenuada 20 dB, es decir, 10 veces de señal:

$$y_2(t) = \frac{A}{10} \cos[\omega_c t + \beta \sin(\omega_m t)]$$

Para llegar al punto 3 derivamos la señal del punto 2, obteniendo una mezcla de AM y FM:

$$y_3(t) = -\frac{A}{10} [\omega_c + \beta \omega_m \cos(\omega_m t)] \sin[\omega_c t + \beta \sin(\omega_m t)]$$

El detector de envolvente se queda con la envolvente (el signo menos es un desfase de 180°):

$$y_4(t) = \frac{A}{10} [\omega_c + \beta \omega_m \cos(\omega_m t)]$$

La señal del punto 4 debe pasar sin problemas por el filtro paso bajo, de manera que en 5 obtenemos la misma señal que en 4:

$$y_5(t) = y_4(t)$$

(El demodulador debería incluir también un condensador para eliminar la continua.)

2. Anchos de banda:

$$B_1 = B_2 = B_c = 2 f_m (\beta + 1)$$

$$B_5 = f_m$$

3. Es un demodulador de FM por conversión en AM. El FPB elimina componentes no deseadas y quita ruido.

Problema 5.6 (Junio de 1993)

1. La amplitud no es constante. Además, la frecuencia es constante y estamos modulando con una senoide.

La modulación es DBL. La envolvente de la señal modulada no tiene la forma de la moduladora, y además hay cambios de fase (180°) en la señal modulada cada vez que la moduladora cambia de signo.

2. En DBL no hay portadora sola:

$$p_c = 0 \text{ W}$$

Potencia media (sobre 1Ω):

$$p_{TX} = \frac{A_t^2}{2R} \langle x_n^2 \rangle = \frac{20^2}{2 \cdot 1} 0,5 = 100 \text{ W}$$

3. La potencia de ruido a la entrada del receptor se calcula integrando la densidad espectral de potencia. Observando $G(f)$ se puede apreciar que encierra el área de un rectángulo:

$$n = \int G(f) df = 2 \cdot 200 \cdot 2,5 \cdot 10^{-9} = 1 \text{ } \mu\text{W}$$

4. La frecuencia central para el filtro receptor debe ser la frecuencia de la portadora, de ese modo (en DBL) podemos aprovechar al máximo el ancho de banda disponible:

$$f_0 = f_c = 100 \text{ kHz}$$

Como DBL es una modulación lineal con dos banda laterales, la modulación ocupa el doble de lo que ocupa la moduladora. Por ello, el máximo ancho de banda para la moduladora es:

$$W = \frac{B}{2} = \frac{40(\text{k})}{2} = 20 \text{ kHz}$$

5. Calculamos la señal a la entrada del demodulador, pasando la potencia transmitida por el medio, por el filtro y por el amplificador:

$$s_e = p_R = p_{TX} \cdot |M(f)|^2 \cdot g \cdot |H(f)|^2$$

$$p_R = 100 \cdot (10^{-2})^2 \cdot 100 \cdot 1^2 = 1 \text{ W}$$

La densidad espectral de ruido es plana en la banda del filtro de predetección. Así, basta con pasar el nivel de ruido por el amplificador y el filtro:

$$N_e = N_0 = 2 \cdot 2,5 \cdot 10^{-9} \cdot 100 \cdot 1^2 = 5 \cdot 10^{-7} \text{ W/kHz}$$

Ahora es inmediato calcular el parámetro z :

$$z = \frac{p_R}{N_0 W} = \frac{1}{5 \cdot 10^{-7} \cdot 20} = 10^5 \text{ v.p.}$$

En DBL, la calidad de predetección es:

$$\left(\frac{s}{n}\right)_e = \frac{z}{2}$$

$$\left(\frac{S}{N}\right)_e = 50 - 3 = 47 \text{ dB}$$

6. Teniendo en cuenta la ganancia de demodulación:

$$\left(\frac{S}{N}\right)_s = Z = \left(\frac{S}{N}\right)_e + G_D = 47 + 3 = 50 \text{ dB}$$

Problema 5.7 (Junio de 1993)

1. Pulsación angular instantánea:

$$\text{Fase: } \theta(t) = \omega_c t + \beta \sin(\omega_m t)$$

$$\omega_i(t) = \frac{d\theta}{dt} = \omega_c + \beta \omega_m \cos(\omega_m t)$$

Frecuencia instantánea:

$$f_i(t) = \frac{\omega_i(t)}{2\pi}$$

Siendo:

$$f_c = 10^9 \text{ Hz}$$

$$f_m = 400 \text{ Hz}$$

$$\omega_c = 2\pi f_c$$

$$\omega_m = 2\pi f_m$$

$$\beta = 2$$

2. Señal modulada en FM:

$$y(t) = A \cos[2\pi 10^9 t + 2 \sin(2\pi 400 t)]$$

$$A = A_c$$

$$0,5 = \frac{A_c^2}{2 \cdot 1}$$

$$A = 1 \text{ V}$$

3. Ancho de banda de Carson:

$$B_c = 2 f_m (\beta + 1) = 2 \cdot 400 \cdot (2 + 1) = 2400 \text{ Hz}$$

4. En un espectro unilateral de FM, modulando con un tono, cada delta tiene una amplitud:

$$A J_n(\beta)$$

Como el ancho de banda de Carson abarca 7 deltas, las amplitudes de interés son:

$$\text{En } n = 0: \quad 1 \cdot J_0(2) = 0,224$$

$$\text{En } n = 1: \quad 1 \cdot J_1(2) = 0,577$$

$$\text{En } n = -1: \quad 1 \cdot J_{-1}(2) = -0,577$$

$$\text{En } n = 2: \quad 1 \cdot J_2(2) = 0,353$$

$$\text{En } n = -2: \quad 1 \cdot J_{-2}(2) = 0,353$$

$$\text{En } n = 3: \quad 1 \cdot J_3(2) = 0,129$$

$$\text{En } n = -3: \quad 1 \cdot J_{-3}(2) = -0,129$$

En la figura 5.6 se observa el espectro resultante.

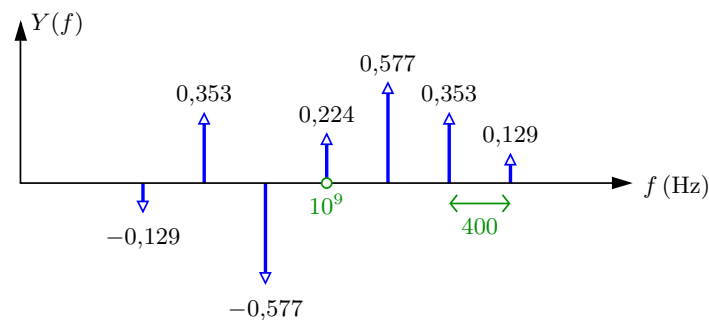


Figura 5.6: Espectro unilateral de la señal modulada.

5. La señal deseada es distorsionada con el preénfasis y ecualizada con el deénfasis, de manera que debe quedarse igual. Pero el ruido, que no pasa por el preénfasis, se filtra e iguala con el deénfasis. De este modo se consigue: menos ruido en conjunto y un ruido más uniforme en frecuencia. Desde el punto de vista de calidad (relación señal a ruido), la lectura es similar: la calidad global mejora, y además la calidad se vuelve más homogénea en el ancho de banda de postdetección.

Problema 5.8 (Septiembre de 1993)

1. Expresión de la señal modulada:

$$y(t) = 10 [1 + \cos(2\pi 10^4 t)] \cos(2\pi 10^9 t)$$

Es una modulación AM, con $m = 1$ y $A = 10$ V.

2. Es un espectro típico de AM. En unilateral hay tres deltas en $f_c - f_m$, f_c y $f_c + f_m$. Las amplitudes de las deltas (de señal, y en voltios) son $10/2$, 10 y $10/2$, respectivamente. Las frecuencias son:

$$f_c = 10^9 \text{ Hz}$$

$$f_m = 10^4 \text{ Hz}$$

3. Potencias:

$$p_{TX} = 75 \text{ W}$$

$$p_c = 50 \text{ W}$$

$$p_{2BL} = 25 \text{ W}$$

$$PEP = 200 \text{ W}$$

4. En un sistema banda base:

$$\left(\frac{s}{n}\right)_{sBB} = z$$

En nuestro caso particular, operando obtenemos:

$$\left(\frac{s}{n}\right)_{sAM} = \frac{1}{3} z$$

En AM nos sale una relación más pequeña.

Problema 5.9 (Septiembre de 1993)

1. La fase de una señal FM modulada por un tono coseno es:

$$\theta(t) = \omega t + \beta \sin(\omega_m t)$$

Como el seno es una función normalizada, la máxima desviación de fase es el índice de modulación:

$$\beta = \frac{A_m f_d}{f_m} = \frac{2 \cdot 1000}{1000} = 2 \text{ radianes}$$

2. Ancho de banda de Carson en el punto A:

$$B_A = 2 f_m (\beta + 1) = 2 \cdot 1000 (2 + 1) = 6 \text{ kHz}$$

3. Potencia en el punto A:

$$p_A = \frac{A^2}{2R} = \frac{4^2}{2 \cdot 1} = 8 \text{ W}$$

4. En un espectro de señal bilateral, cada delta tiene una amplitud:

$$A_i(V) = \frac{A}{2} J_n(\beta)$$

Así, por ejemplo:

$$A_0 = \frac{4}{2} J_0(2) = \frac{4}{2} 0,22389 \approx 0,45 \text{ V}$$

$$A_{-3} = \frac{4}{2} J_{-3}(2) = \frac{4}{2} (-0,12894) \approx -0,26 \text{ V}$$

El espectro en el punto A se observa en la figura 5.7.

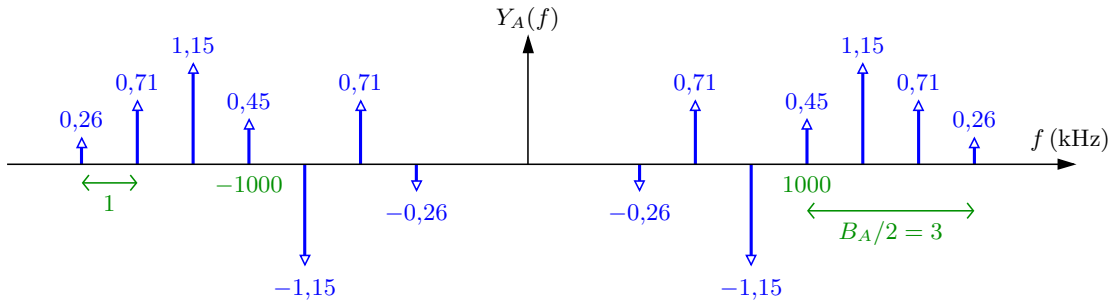


Figura 5.7: Espectro en el punto A.

5. Para calcular la frecuencia portadora transmitida, pasamos la señal del modulador por el multiplicador de frecuencia:

$$f'_c = 10 \cdot 1(\text{M}) = 10 \text{ MHz}$$

6. Para calcular el ancho de banda de Carson transmitido, tenemos en cuenta que el índice de modulación ha sido afectada por el multiplicador de frecuencia:

$$\beta' = 10 \cdot 2 = 20$$

$$B = 2 \cdot 1000 (20 + 1) = 42 \text{ kHz}$$

7. Frecuencias de corte del filtro paso banda:

$$f_{ccS} = f'_c + \frac{B}{2} = 10,021 \text{ MHz}$$

$$f_{ccI} = f'_c - \frac{B}{2} = 9,979 \text{ MHz}$$

Problema 5.10 (Febrero de 1994)

1. Funcionamiento del transmisor: la información de entrada es estéreo, con los canales izquierdo, L, y derecho, R. La suma monofónica L+R pasa directamente al punto B. La diferencia L-R se modula en DBL con una subportadora, y pasa al punto B. La subportadora (sola), dividida entre dos, pasa también al punto B. De esta manera, se consigue en B una multiplexación de los tres elementos mencionados: L+R en banda base, tono de subportadora a mitad de frecuencia, y L-R modulado en DBL. En la figura 5.8 se observa el espectro de la multiplexación. El conjunto multiplexado actúa como moduladora banda base de la portadora fundamental en FM. Por último, la señal pasa por la etapa de potencia y se radia al canal.

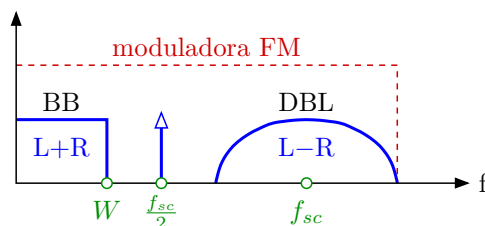


Figura 5.8: Espectro de la multiplexación en B.

Funcionamiento del receptor: se recibe la señal FM, que es amplificada y filtrada (filtro de predetección). Suponiendo que el demodulador FM (discriminador) cumple su cometido, a la salida se obtiene la multiplexación del punto B. Mediante un banco de filtros se separan tres ramas. La superior se queda con el monofónico L+R, en el punto D. La rama inferior recupera la subportadora a frecuencia mitad, y la multiplica por dos; de ese modo se obtiene una subportadora DBL recuperada (enganchada en frecuencia y fase). La rama media, gracias a la subportadora recuperada, demodula coherente la DBL, dando a su salida (punto E) la información L-R. Por último, con sencillas sumas y restas, a partir de L+R y L-R se llega a L y R por separado (puntos F y G, respectivamente). (Los amplificadores —realmente atenuadores— finales están para corregir el factor 2 que acompaña a L y a R.)

2. En el punto A tenemos una DBL a 38 kHz, modulada por la señal bitono L-R:

$$x_A(t) = \frac{1}{2} \left\{ \cos[(\omega_{sc} - \omega_L)t] + \cos[(\omega_{sc} + \omega_L)t] + \right. \\ \left. - \cos[(\omega_{sc} - \omega_R)t] - \cos[(\omega_{sc} + \omega_R)t] \right\}$$

Señal en el punto B tenemos la multiplexación completa, con la señal DBL anterior, la subportadora a frecuencia mitad, y la información monofónica banda base L+R:

$$x_B(t) = x_A(t) + \cos(\omega_L t) + \cos(\omega_R t) + \cos[(\omega_{sc}/2)t]$$

Donde las pulsaciones son:

$$\omega_{sc} = 2\pi \cdot 38 \cdot 10^3 \text{ rad/s}$$

$$\omega_R = 2\pi \cdot 10 \cdot 10^3 \text{ rad/s}$$

$$\omega_L = 2\pi \cdot 10^3 \text{ rad/s}$$

3. El espectro de potencia unilateral se observa en la figura 5.9. La señal $x_A(t)$ da lugar a las 4 deltas de frecuencia alta, todas con amplitud:

$$\frac{(1/2)^2}{2 \cdot 1} = \frac{1}{8}$$

Las 3 deltas restantes se corresponden con la subportadora a frecuencia mitad, y con los tonos L y R en banda base. Estas 3 deltas tienen una amplitud:

$$\frac{1^2}{2 \cdot 1} = \frac{1}{2}$$

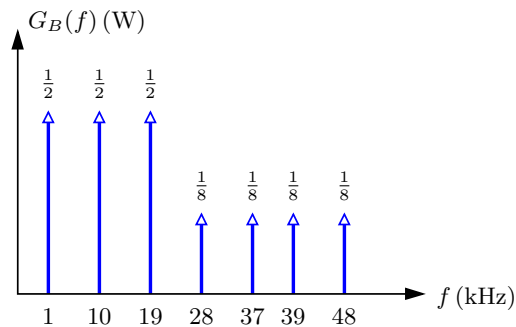


Figura 5.9: Espectro de potencia unilateral en B.

4. Para calcular la potencia media en el punto B integramos la densidad espectral de potencia. Como está formada por deltas, basta con sumar sus contribuciones:

$$p_B = \int_0^\infty G_B(f) df = 3 \frac{1}{2} + 4 \frac{1}{8} = 2 \text{ W}$$

5. La frecuencia central del filtro debe ser la frecuencia de portadora:

$$f_0 = f_c = 100 \text{ MHz}$$

El ancho de banda del filtro es el de Carson:

$$B = B_c = 2(\Delta f + W) = 2(75 + 48)(\text{k}) = 246 \text{ kHz}$$

6. Formamos el balance de las potencias y despejamos la ganancia del amplificador:

$$P_e = P_{TX} - A_t + G_A$$

$$-40 = 70 - 153 + G_A$$

$$G_A = 43 \text{ dB}$$

7. Como ya se ha explicado, para demodular DBL (demodulación coherente) se necesita una réplica exacta de la subportadora empleada en el modulador. Una forma cómoda de conseguirla es transmitir, multiplexado con la información, un tono piloto obtenido de la propia subportadora. El hecho de que se haya dividido la frecuencia de subportadora para llegar a la frecuencia del tono piloto se debe únicamente a la facilidad que añade a la hora de recuperar la subportadora (con un filtro estrecho).

8. Al demodular FM se introduce una densidad espectral de ruido parabólica, que perjudica más las altas frecuencias. El canal L–R está en la parte alta del espectro, y su calidad es inferior. Para igualar ambas relaciones (S/N) se pueden utilizar redes de preénfasis-deénfasis. Los filtros se deben colocar, idealmente, justo antes de las entradas $x_L(t)$ y $x_R(t)$ del transmisor (preénfasis), y en las salidas F y G del receptor (deénfasis).

9. Primer caso: FM generada por el transmisor del enunciado (estéreo) que es recibida por un dispositivo monofónico. Al demodular la FM se realiza un filtrado paso bajo a W , de manera que sólo se obtiene a la salida la información L+R.

Segundo caso: FM generada por un transmisor monofónico que es recibida por el dispositivo del enunciado. Idealmente, no se obtiene nada en la demodulación de la DBL (punto E), de manera que el L+R del punto D pasa a las salidas F y G.

Problema 5.11 (Junio de 1994)

1. No funcionaría como se espera. Se puede interpretar de la siguiente forma: la portadora modularía a la moduladora, de manera que no se transmitiría la información de la moduladora (portadora y moduladora habrían intercambiado sus funciones).

2. Señal modulada en AM:

$$y_{AM}(t) = A[1 + m \cdot x_n(t)] \cos(\omega_c t)$$

$$m = 0,5$$

$$x_n(t) = \cos(\omega_m t)$$

$$A = A_c$$

3. Potencia de portadora sola:

$$p_c = A_c^2/2$$

Potencia de una banda lateral:

$$p_{1bl} = \frac{1}{2} p_c m^2 \langle x_n^2 \rangle = \frac{1}{2} \cdot \frac{A_c^2}{2} \cdot 0,5^2 \cdot 0,5 = \frac{A_c^2}{32}$$

En la figura 5.10 se observa la densidad espectral de potencia de $y_{AM}(t)$.

Calculamos la potencia media total sumando las contribuciones del espectro:

$$p_y = 2 \frac{A_c^2}{4} + 4 \frac{A_c^2}{64} = \frac{9}{16} A^2$$

4. En la figura 5.11 se observa la señal $y_{AM}(t)$. Parámetros de interés:

$$y_{max} = \frac{3}{2} A_c$$

$$y_{min} = \frac{1}{2} A_c$$

$$T_m = 1 \text{ } \mu\text{s}$$

$$T_c = 0,2 \text{ } \mu\text{s}$$

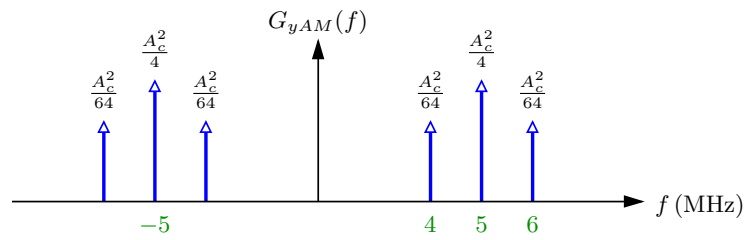


Figura 5.10: Densidad espectral de potencia de $y_{AM}(t)$.

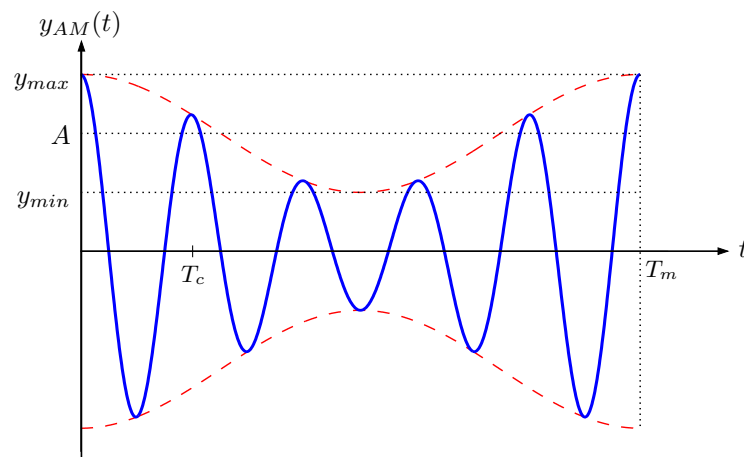


Figura 5.11: Señal $y_{AM}(t)$.

5. En la figura 5.12 se observa el espectro de la señal $y_i(t)$.

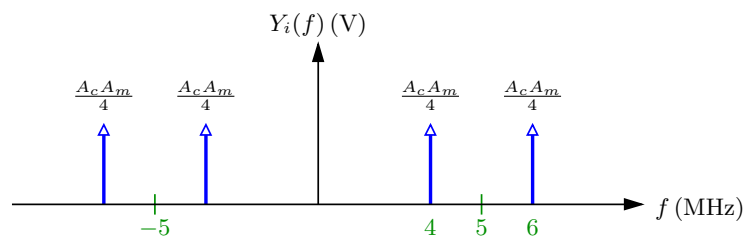


Figura 5.12: Espectro de la señal $y_i(t)$.

6. La señal $y_i(t)$ es analógica, continua, periódica ($T = T_m$) y definida en potencia. Se trata de una modulación DBL, con moduladora sinusoidal.
7. Frecuencia de corte inferior del filtro:

$$4 < f_{cci} < 6$$

Por ejemplo: $f_{cci} = 5 \text{ MHz}$

8. Al pasar el espectro $Y_i(f)$ por el filtro se elimina la banda lateral inferior. En la figura 5.13 se observa la densidad espectral de potencia de $y_{BLUs}(t)$.

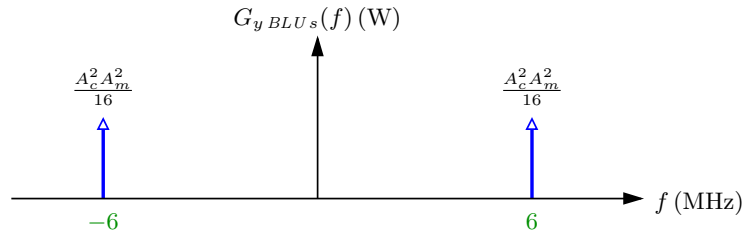


Figura 5.13: Densidad espectral de potencia de $y_{BLUs}(t)$.

Potencia media total:

$$p_y = \frac{A_c^2 A_m^2}{8}$$

9. La señal $y_{BLUs}(t)$ es una senoide normal, con frecuencia y amplitud:

$$f_{BLUs} = f_c + f_m = 6 \text{ MHz}$$

$$A_{BLUs} = \frac{A_c A_m}{2} \text{ V}$$

El dibujo se deja a cargo del alumno.

Problema 5.12 (Junio de 1994)

1. El enunciado deja cierto margen a la hora de construir la multiplexación. Está claro que hay que multiplexar 40 canales; se sobreentiende que la separación entre canales es constante (y máxima); pero no especifica nada sobre las bandas de guarda en los extremos de la multiplexación.

En la solución que se propone se ha llenado el espectro disponible (de 996 a 1004 MHz) con los 40 canales (cada uno con un ancho de banda —Carson— de 100 kHz) y con 40 bandas de guarda, donde el tamaño de esas bandas es la incógnita x . La idea es interponer x entre dos canales consecutivos, dejando guardas de $x/2$ en cada extremo de la multiplexación. Con esta aclaración, y observando la figura 5.14, es fácil reproducir los resultados.

$$B_c = 2(\Delta f + W) = 2(47 + 3)(k) = 100 \text{ kHz}$$

$$B_T = N \cdot B_c + N \cdot x$$

$$8000(k) = 40 \cdot 100(k) + 40 \cdot x(k)$$

$$x = 100 \text{ kHz}$$

Los valores pedidos son:

$$\text{Frec. central del primer canal: } f_1 = 996,1 \text{ MHz}$$

$$\text{Ancho de banda de un canal: } B_c = 100 \text{ kHz}$$

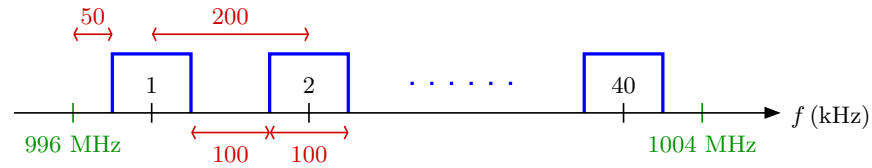


Figura 5.14: Espectro de la multiplexación.

Guarda entre canales: $x = 100$ kHz

Separación entre portadoras de canales: $\Delta f = 200$ kHz

Para la potencia de cada canal, imponemos que todos transmiten la misma, y que la suma de todas las potencias (por ser incorreladas) da 10 W (a la salida del amplificador):

$$p_1 = p_2 = \dots = p_n = \frac{p_T/g_T}{N} = \frac{10/10}{40}$$

$$p_i = 0,025 \text{ W}$$

2. Trabajamos con el condicionamiento de ancho de banda. En B_T multiplexamos N canales y N guardas, todos con el ancho de banda de Carson:

$$B_c = 2W(D+1) \approx 2WD = 2 \cdot 3000 \cdot D = 6000 \cdot D$$

$$B_T = (N + N) B_c$$

$$8000000 = 12000 \cdot N \cdot D$$

$$666,6 = N \cdot D$$

Trabajamos con el condicionamiento de calidad. En un canal cualquiera:

$$\left(\frac{s}{n}\right)_i = 3 \cdot D^2 \cdot \langle x_n^2 \rangle \cdot z = 3 \cdot D^2 \cdot \langle x_n^2 \rangle \cdot \frac{p_R/N}{N_0 W}$$

$$3000 = 3 \cdot D^2 \cdot 0,5 \cdot \frac{10^{-13}/N}{10^{-19} \cdot 3 \cdot 10^3}$$

$$D^2 = 2N$$

Tenemos 2 ecuaciones con 2 incógnitas. Despejamos D y N :

$$D = 11$$

$$N = 60,5 \rightarrow N = 60 \text{ canales}$$

La nueva desviación máxima de frecuencia es:

$$\Delta f = DW = 11 \cdot 3(\text{k}) = 33 \text{ kHz}$$

Problema 5.13 (Junio de 1994)

1. En la expresión general de una señal FM debemos sustituir los valores de los parámetros. Buena parte de la información se encuentra en la figura del enunciado (el espectro). La frecuencia de portadora, con la $J_0(\beta)$, está a 30 MHz; entre 2 deltas contiguas hay $f_m = 2$ kHz; a partir de la potencia (dato del enunciado) se calcula la amplitud; el índice de modulación se obtiene de forma inmediata.

$$p = \frac{A^2}{2R}$$

$$1250 = \frac{A^2}{2 \cdot 1}$$

$$A = 50 \text{ V}$$

$$\beta = \frac{\Delta f}{f_m} = \frac{6}{2} = 3$$

$$y_{FM}(t) = 50 \cos[2\pi \cdot 30 \cdot 10^6 \cdot t + 3 \sin(2\pi \cdot 2 \cdot 10^3 \cdot t)]$$

Estando la señal en voltios, el tiempo en segundos, y las frecuencias en hercios.

2. Ancho de banda de Carson:

$$B_c = 2(\Delta f + W) = 2(6 + 2)(\text{k}) = 16 \text{ kHz}$$

3. Consultamos los valores de $J_n(3)$: hay 13 deltas significativas. Eso da lugar a un ancho de banda:

$$B = 12(\text{saltos}) \cdot 2(\text{kHz/salto}) = 24 \text{ kHz}$$

4. El ancho de banda de Carson abarca 9 deltas. La potencia incluida es:

$$p_c = \frac{A^2}{4} \sum_{n=-4}^4 2J_n^2(\beta)$$

$$p_c = \frac{50^2}{4} [2(-0,26005)^2 + 2(0,33906)^2 + 2(-0,33906)^2 + \\ + 2(0,48609)^2 + 2(0,48609)^2 + 2(0,30906)^2 + \\ + 2(-0,30906)^2 + 2(0,13203)^2 + 2(0,13203)^2]$$

$$p_c \approx 1245 \text{ W}$$

Porcentaje respecto a la total:

$$100 \frac{p_c}{p} = 100 \frac{1245}{1250} = 99,6 \%$$

Se cumple que el ancho de banda de Carson incluye al menos el 99 % de la potencia. La diferencia en dB entre ambas potencias es:

$$\Delta P = 10 \log\left(\frac{p}{p_c}\right) \approx 0,0174 \text{ dB}$$

Que es claramente despreciable.

5. Viene perfectamente especificado en las transparencias del curso.

Problema 5.14 (Septiembre de 1994)

1. Como el ruido tras el filtrado de predetección no es blanco, lo mejor es calcular por separado potencia de señal y potencia de ruido para formar la relación de calidad. Empezamos con la potencia de señal. Pasamos de PEP a potencia media transmitida. Incluimos la atenuación del medio y el paso por el filtro (que es plano en el ancho de banda de la DBL):

$$PEP = \frac{A_t^2}{2R}$$

$$p_T = \frac{A_t^2}{2R} \langle x_n^2 \rangle = PEP \langle x_n^2 \rangle$$

$$p_T = 50 \cdot 0,5 = 25 \text{ W} \rightarrow 14,0 \text{ dBW}$$

$$P_e = P_T - A + 10 \log(10^4) = 14,0 - 60 + 40 = -6,0 \text{ dBW}$$

Ahora calculamos la potencia de ruido integrando la densidad espectral unilateral antes del detector. La integral equivale al área de un rectángulo, donde la altura es N_0 tras el filtro de predetección (multiplicado por 10^4) y la base es $2W + W/8$:

$$n_e = \int_0^\infty G_{ne}(f) df = N_0 \cdot |H_{pre}|^2 \cdot W \cdot (2 + 1/8)$$

$$n_e = 2 \cdot 10^{-12} \cdot 10^4 \cdot 4000 \cdot (17/8) = 1,7 \cdot 10^{-4} \text{ W}$$

$$N_e = -37,70 \text{ dBW}$$

Y la relación señal a ruido queda:

$$\left(\frac{S}{N}\right)_e = -6,0 - (-37,70) = 31,70 \text{ dB}$$

Hemos mantenido dos decimales en los dB (algo poco corriente) porque, como ya se verá, en este problema es importante resaltar pequeñas diferencias. El alumno puede comprobar que no es correcto usar directamente:

$$\left(\frac{s}{n}\right)_e = \frac{z}{2} \quad (\text{iNO!})$$

Porque el filtrado de predetección no es el típico, y nos llega un ruido que no es blanco (y que ocupa un poco más de $2W$).

2. En este apartado seguimos teniendo un ruido de predetección que no es blanco. Pero como el filtro de postdetección elimina las zonas en pendiente, quedándose sólo con la parte plana (y dentro del ancho de banda preceptivo de W , por ser $\alpha = 1$), ahora sí podemos usar las fórmulas típicas de DBL. La ganancia del filtro de postdetección afecta a señal y ruido, de manera que no modifica la calidad (y no se tiene en cuenta).

$$\left(\frac{s}{n}\right)_s = z$$

$$Z = P_e - 10 \log(N_0 \cdot |H_{pre}|^2) - 10 \log(4000) = 34,97 \text{ dB}$$

Resultado que normalmente se toma como 35,0 dB. Nótese que no se corresponde con la calidad de predetección del apartado anterior más la ganancia de demodulación de DBL (3 dB), porque antes del detector no teníamos la calidad típica, sino que, por culpa del filtrado, se colaba más ruido. (Luego, como es inmediato comprobar, en este caso concreto la ganancia de demodulación es ligeramente superior —por el ruido extra que se elimina filtrando en postdetección—.)

3. Ahora, con $\alpha = 1,5$, el filtro de postdetección deja pasar completa la densidad de ruido (no blanca) que forma el filtro de predetección. Podemos calcular todo el ruido que hay en esta nueva situación, pero es más inmediato comparar el ruido que hay ahora con el que teníamos antes. En realidad basta con comparar el ancho de banda ideal típico de postdetección del apartado anterior (W , en paso bajo) con el que tenemos ahora ($W + W/16$, paso bajo). (La figura 5.15 puede servir de ayuda para entender esta última afirmación.) La calidad se verá reducida (pues aumenta el ruido) en:

$$\Delta = 10 \log \left(\frac{W + W/16}{W} \right) = 10 \log \left(\frac{1,0625}{1} \right) = 0,26 \text{ dB}$$

Luego la calidad es:

$$\left(\frac{S}{N} \right)_s = 34,97 - 0,26 = 34,71 \text{ dB}$$

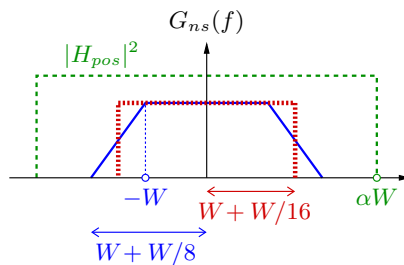


Figura 5.15: Ruido a la salida del filtro de postdetección ($\alpha = 1,5$).

(Calcular el valor de la potencia de ruido a la salida del filtro de postdetección es una opción poco atractiva, pues hay que realizar el proceso de demodulación, teniendo en cuenta el paso por los filtros. Como es lógico, se llega al mismo resultado.)

Problema 5.15 (Febrero de 1995)

1. El esquema de bloques del demodulador se observa en la figura 5.16. Primero se filtra la FM de la multiplexación, y se demodula para obtener el conjunto audio+vídeo. Después, mediante un banco de filtros, en la rama superior se recupera directamente en paso bajo el vídeo, y en la rama inferior en paso banda se demodula la FM del audio. Las dos ramas deben ecualizarse a la salida con deénfasis. Los anchos de banda de las dos modulaciones de frecuencia, B y B_R , se calculan mediante la regla de Carson.

$$W_R = 5,5(\text{M}) + 230/2(\text{K}) = 5,615 \text{ MHz}$$

$$W_R \sim 6 \text{ MHz}$$

$$B_R \approx 2(9 + 6)(\text{M}) = 30 \text{ MHz (como en el transmisor)}$$

$$B = 2(100 + 15)(\text{k}) = 230 \text{ kHz}$$

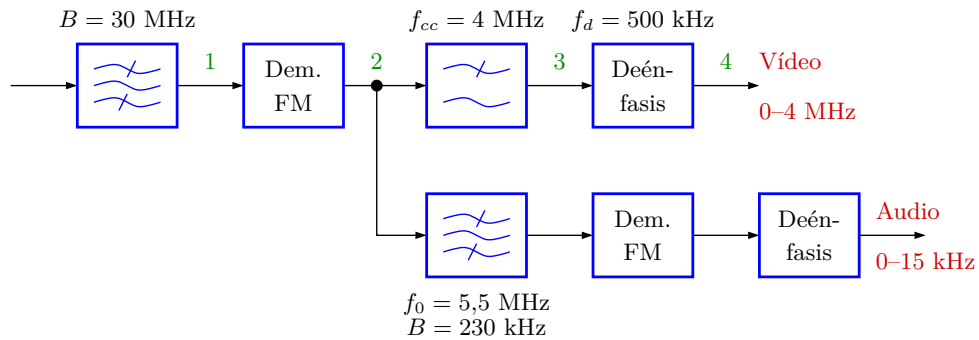


Figura 5.16: Esquema de bloques del demodulador.

En la figura 5.17 se observa la señal compuesta vídeo+audio (multiplexación). El conjunto ocupa aproximadamente $W_R \sim 6 \text{ MHz}$. (Este valor, 6 MHz, es de hecho el ancho de banda que se asigna a las señales de TV analógicas.)

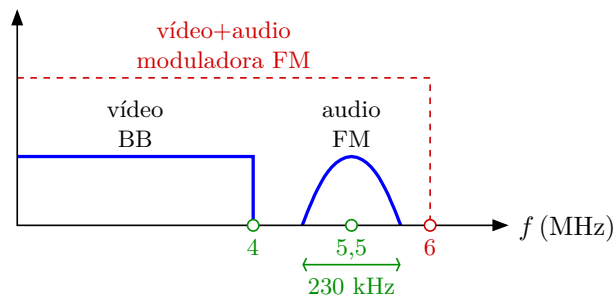


Figura 5.17: Multiplexación vídeo+audio.

2. Calculamos la z umbral y la z del sistema:

$$D = \frac{\Delta f}{W_R} = \frac{9}{6} = 1,5$$

$$z_u = 40(D + 1) = 100 \text{ v.p.}$$

$$z = \frac{p_R}{N_0 W_R} = \frac{10^{-9}}{10^{-20} \cdot 6 \cdot 10^6} = 16666,6 \hat{\text{v.p.}} \text{ (OK)}$$

Calidad a la salida del demodulador FM (punto 2):

$$\langle x_n^2 \rangle = 0,09 + 0,01 = 0,1 \text{ W (sobre } 1 \Omega)$$

$$\left(\frac{s}{n}\right)_s = 3 D^2 \langle x_n^2 \rangle z$$

$$\left(\frac{s}{n}\right)_s = 3 \cdot 1,5^2 \cdot 0,1 \cdot 16666,6 = 11250 \text{ v.p.}$$

$$\left(\frac{S}{N}\right)_s \approx 40,5 \text{ dB}$$

3. Tenemos que calcular la calidad de vídeo (punto 4 del esquema). Un modo cómodo de trabajar (y muy típico en ingeniería) es tomar la relación señal a ruido anterior, y modificarla para llegar al nuevo punto del esquema. La relación señal a ruido de vídeo más audio (punto 2) cambia por varias razones: a) Al pasar del punto 2 al 3 nos quedamos sólo con la señal de vídeo (se reduce la potencia de señal). b) Al pasar del punto 2 al 3 se reduce el ancho de banda (llega menos ruido). c) Al pasar del punto 3 al punto 4 obtenemos una mejora de deénfasis. Los cambios (b) y (c) mejoran la calidad, mientras que el (a) la reduce.

$$(S/N)_{\text{vídeo}} = (S/N)_{\text{vídeo+audio}} + M_{\text{deénf}} + R_{\text{ruido}} - R_{\text{señal}}$$

Mejora de pre-deénfasis para el vídeo:

$$M \approx \frac{1}{3 \left(\frac{0,5}{4}\right)^2} = 21,3 \text{ v.p.}$$

$$M \approx 13,3 \text{ dB}$$

Reducción del ruido parabólico:

$$G_n = k f^2 \quad (k \text{ es una constante})$$

$$n_{\text{vídeo}} = \int_0^4 k f^2 df = k \frac{4^3}{3}$$

$$n_{\text{vídeo+audio}} = \int_0^6 k f^2 df = k \frac{6^3}{3}$$

$$R_{\text{ruido}} = 10 \log\left(\frac{n_{\text{vídeo+audio}}}{n_{\text{vídeo}}}\right) = 10 \log\left(\frac{6^3}{4^3}\right) \approx 5,3 \text{ dB}$$

Reducción de la potencia de señal:

$$R_{\text{señal}} = 10 \log\left(\frac{0,1}{0,09}\right) \approx 0,46 \text{ dB}$$

Por lo tanto:

$$(S/N)_{\text{vídeo}} = 40,5 + 13,3 + 5,3 - 0,46 = 58,64 \text{ dB}$$

Problema 5.16 (Junio de 1995)

1. Tomamos la forma canónica de AM, con la portadora interferida:

$$y(t) = A [1 + m \langle x_n^2 \rangle] \cos[\omega_c t + 0,2 \sin(\omega_0 t)]$$

Cuando la moduladora se anula nos queda una señal FM (portadora f_c) modulada por un tono (a frecuencia f_0 , con índice de modulación $\beta = 0,2$).

$$y(t) = A \cos[\omega_c t + 0,2 \sin(\omega_0 t)]$$

$$A = 10 \text{ V}$$

$$f_c = 1 \text{ MHz}$$

$$f_c = f_m = 1 \text{ kHz}$$

El espectro de salida unilateral se observa en la figura 5.18. Cada línea espectral tiene una potencia:

$$J_n^2(0,2) \frac{A^2}{2}$$

Y los valores de interés de las funciones de Bessel de primera especie son:

$$J_0(0,2) = 9,9002 \cdot 10^{-1}$$

$$J_1(0,2) = 9,9501 \cdot 10^{-2}$$

$$J_2(0,2) = 4,9834 \cdot 10^{-3}$$

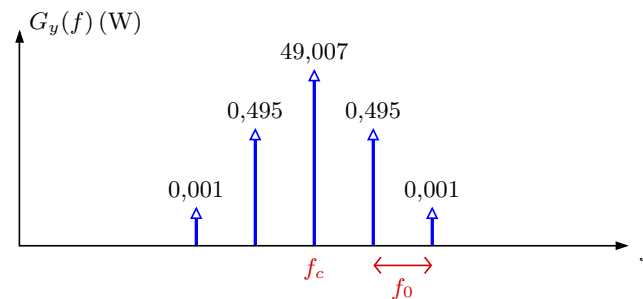


Figura 5.18: Espectro unilateral de salida, sin modular.

2. Operamos sobre la forma canónica completa:

$$f_0 = 1 \text{ kHz}$$

$$f_m = 10 \text{ kHz}$$

$$m = 1$$

$$\begin{aligned} y(t) &= 10 [1 + \cos(\omega_m t)] \cos[\omega_c t + 0,2 \sin(\omega_0 t)] \\ &= 10 \cos[\omega_c t + 0,2 \sin(\omega_0 t)] + 5 \cos[(\omega_c + \omega_m) t + 0,2 \sin(\omega_0 t)] + \\ &\quad + 5 \cos[(\omega_c - \omega_m) t + 0,2 \sin(\omega_0 t)] \end{aligned}$$

Se obtienen 3 señales FM, con portadoras $f_c - f_m$, f_c y $f_c + f_m$. El espectro unilateral completo se observa en la figura 5.19.

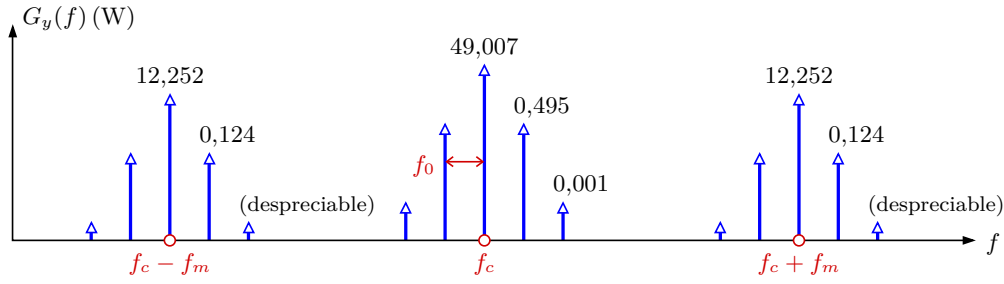


Figura 5.19: Espectro unilateral de salida, modulando.

3. Con la moduladora nula tenemos la potencia de el tono de portadora:

$$p_1 = \frac{A^2}{2R} = \frac{10^2}{2 \cdot 1} = 50 \text{ W}$$

Con la moduladora sinusoidal tenemos la potencia de una AM:

$$p_2 = \frac{10^2}{2} [1 + 1 \cdot 0,5] = 75 \text{ W}$$

4. Para demodular multiplicamos la señal AM por la portadora recibida (detección):

$$y_d(t) = y(t) \cdot c'(t)$$

$$y_d(t) = A [1 + m x_n] \cos[\omega_c t + 0,2 \sin(\omega_0 t)] \cdot A'_c \cos(\omega_c t)$$

$$y_d(t) = \frac{A A'_c}{2} [1 + m x_n] \left\{ \cos[2\omega_c t + 0,2 \sin(\omega_0 t)] + \cos[0,2 \sin(\omega_0 t)] \right\}$$

Tras el filtro paso bajo queda:

$$y_d(t) = \frac{A A'_c}{2} [1 + m x_n] \cos[0,2 \sin(\omega_0 t)]$$

$$y_d(t) = \frac{A A'_c}{2} [1 + \cos(\omega_m t)] \cos[0,2 \sin(\omega_0 t)]$$

Que es el resultado obtenido en el apartado segundo particularizado con $\omega_c = 0$. Por lo tanto, la densidad espectral de potencia estará formada por 3 subespectros tipo FM centrados en $f = 0$, en f_m y en $-f_m$. En la figura 5.20 se observa la representación cualitativa del espectro.

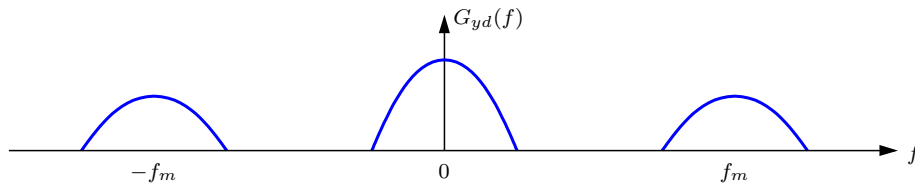


Figura 5.20: Espectro de salida del demodulador.

Comentario: la interferencia sigue presente después del proceso de demodulación.

Problema 5.17 (Septiembre de 1995)

1. Desde el punto de vista de potencia, una señal FM es una senoide. Por lo tanto:

$$p_1 = 2 = \frac{A_1^2}{2 \cdot 1}$$

$$A_1 = 2 \text{ V}$$

Parámetros de la señal FM:

$$f_c = f_0 = 1 \text{ MHz}$$

$$f_m = 50 \text{ kHz}$$

$$\beta = \frac{f_d A_m}{f_m} = \frac{50(\text{k}) \cdot 1}{50(\text{k})} = 1$$

El espectro FM unilateral está formado por deltas, cada una con amplitud:

$$\frac{A_1^2 \cdot J_n^2(1)}{2}$$

Los órdenes significativos de las funciones de Bessel de primera especie son:

$$J_0(1) = 7,6520 \cdot 10^{-1}$$

$$J_1(1) = 4,4005 \cdot 10^{-1}$$

$$J_2(1) = 1,1490 \cdot 10^{-1}$$

En la figura 5.21 se observa el espectro unilateral en el punto 1.

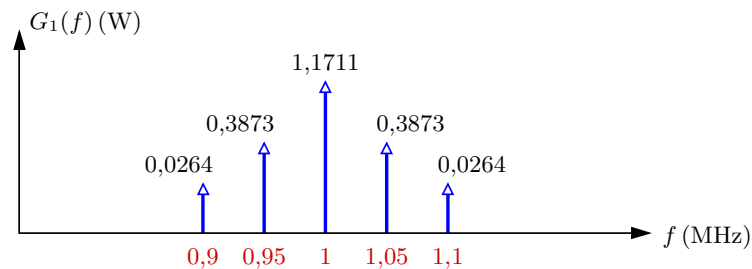


Figura 5.21: Espectro unilateral en el punto 1.

2. Por el filtro 2 debe pasar la señal FM generada en el modulador. El oscilador ha de desplazar la FM a la frecuencia de salida (100 MHz). El filtro 4 se debe quedar con la FM desplazada. El filtro 7 trabaja igual que el 4. El filtro 8, paso bajo, se queda con el ancho de banda de la información moduladora inicial. Por lo tanto, las frecuencias y anchos de banda son:

$$f_2 = 1 \text{ MHz}$$

$$B_c = 2W(\beta + 1) = 200 \text{ kHz}$$

$$B_2 = 200 \text{ kHz}$$

$$\pm f_1 \mp f_3 = \pm 1(\text{M}) \mp f_3 = 100(\text{M})$$

$$f_1 = 101 \text{ MHz (también sirve 99)}$$

$$f_4 = f_7 = 101 \text{ MHz}$$

$$B_4 = B_7 = 200 \text{ kHz}$$

$$W_8 = 50 \text{ kHz}$$

3. El mezclador con oscilador es un modulador DBL. Se utiliza, junto con el filtro 4, para hacer una conversión de frecuencia hacia arriba de la FM.
4. Valor cuadrático medio de la moduladora (que es una FM) normalizada:

$$p_1 = 2$$

$$A_1 = 2$$

$$\langle y_1^2 \rangle = \frac{p_1}{A_1^2} = \frac{2}{2^2} = 0,5$$

Que es el valor esperado, pues una FM normalizada es un tono normalizado desde el punto de vista de potencias. Ahora calculamos la potencia de la DBL completa:

$$p_{DBL} = \frac{(A_1 A_3)^2}{2 R} \langle y_1^2 \rangle = \frac{(2 \cdot 10)^2}{2} 0,5 = 100 \text{ W}$$

Por último, al pasar por el filtro 4 se elimina una de las 2 FM:

$$p_5 = \frac{p_{DBL}}{2} = 50 \text{ W}$$

5. Parámetro z del sistema:

$$z = \frac{p_R}{N_0 W}$$

$$Z = -100 + 160 - 10 \log(50 \cdot 10^3) \approx 13,0 \text{ dB}$$

$$z = 20 \text{ v.p.}$$

Valor umbral:

$$z_u = 40 (\beta + 1) = 80 \text{ v.p.}$$

Luego el sistema no funciona.

Problema 5.18 (Junio de 1996)

1. Tomamos como referencia el ancho de banda de la moduladora, W . La emisión 1 ocupa $2W$ y no tiene portadora sola, luego lo más lógico es que sea DBL. La emisión 2 ocupa $2W$ y sí cuenta con portadora sola, de manera que ha de ser AM. La emisión 3 ocupa mucho más de el doble de la moduladora, lo que implica que no es una modulación lineal, luego será FM. La emisión 4 ocupa un poco más de W , por lo que debe ser una BLR (Banda Lateral Residual).

2. Parámetros de la señal 1:

$$B = f_2 - f_1 = 10 \text{ kHz}$$

$$p = \frac{\text{base} \cdot \text{altura}}{2} = g_p \cdot W = 10^{-10} \cdot 5000 = 5 \cdot 10^{-7} \text{ W}$$

$$P \approx -33,0 \text{ dBm}$$

Parámetros de la señal 2:

$$B = f_4 - f_3 = 10 \text{ kHz}$$

$$p = p_c + p_{2bl} = p_1 + g_p \cdot 2W = 10^{-5} + 10^{-10} \cdot 10000 = 1,1 \cdot 10^{-5} \text{ W}$$

$$P \approx -19,6 \text{ dBm}$$

$$p_{2bl} = p_c \cdot m^2 \cdot \langle x_n^2 \rangle$$

$$10^{-10} \cdot 10000 = 10^{-5} \cdot m^2 \cdot 0,1$$

$$m = 1$$

Parámetros de la señal 3:

$$B = f_6 - f_5 = 50 \text{ kHz}$$

$$B = 2(\Delta f + W)$$

$$50000 = 2(\Delta f + 5000)$$

$$\Delta f = 20 \text{ kHz}$$

$$D = \frac{\Delta f}{W} = \frac{20}{5} = 4$$

$$p = \left(S + \frac{B - S}{2} \right) g_p = (32 + 9)(\text{k}) \cdot 10^{-10} = 4,1 \cdot 10^{-6} \text{ W}$$

$$P \approx -23,9 \text{ dBm}$$

Parámetros de la señal 4:

$$B = f_9 - f_7 = 6 \text{ kHz}$$

$$p = \frac{f_8 - f_7}{2} g_p + \frac{f_9 - f_8}{2} g_p$$

$$p = 1000 \cdot 10^{-10} + 5000 \cdot 10^{-10} = 6 \cdot 10^{-7}$$

$$P = -32,2 \text{ dBm}$$

3. Estudiamos cada una de las emisiones, imponiendo que la calidad de salida sea 10 dB.

Modulación DBL (emisión 1):

$$\left(\frac{s}{n}\right)_s = z = \frac{p_R}{N_0 W}$$

$$10 = -33,0 - N_0(\text{dBm/Hz}) - 10 \log(5000)$$

$$N_0 = -80,0 \text{ dBm/Hz}$$

Modulación AM (emisión 2):

$$\eta = \frac{m^2 \langle x_n^2 \rangle}{1 + m^2 \langle x_n^2 \rangle} = \frac{1^2 \cdot 0,1}{1 + 1^2 \cdot 0,1} = 0,09$$

$$\eta \approx -10,4 \text{ dB}$$

$$\left(\frac{s}{n}\right)_s = \eta \cdot z$$

$$10 = -10,4 - 19,6 - N_0(\text{dBm/Hz}) - 10 \log(5000)$$

$$N_0 = -77,0 \text{ dBm/Hz}$$

Modulación FM (emisión 3):

$$Z = -23,9 - N_0(\text{dBm/Hz}) - 10 \log(5000) = -60,9 - N_0(\text{dBm/Hz})$$

$$\left(\frac{s}{n}\right)_s = (3 D^2) \cdot \langle x_n^2 \rangle \cdot z$$

$$10 = 10 \log(3 \cdot 4^2) + 10 \log(0,1) - 60,9 - N_0(\text{dBm/Hz})$$

$$N_0 = -64,1 \text{ dBm/Hz}$$

$$Z = -60,9 - (-64,1) = 3,2 \text{ dB}$$

$$z_u = 40 (D + 1) = 200 \text{ v.p.} \rightarrow 23,0 \text{ dB}$$

No es necesario interferir la FM con $-64,1 \text{ dBm/Hz}$, pues no se ha alcanzado el umbral. Basta con lograr que el ruido capture a la señal. En el límite (en la realidad sería mejor dar un margen de seguridad):

$$Z = Z_u = 23,0 \text{ dB}$$

$$23,0 = -60,9 - N_0(\text{dBm/Hz})$$

$$N_0 = -83,9 \text{ dBm/Hz}$$

Luego el caso más exigente es el de AM. Por lo tanto, para asegurar que se interfieren las 3 emisiones el suelo de ruido debe ser:

$$N_0 = -77,0 \text{ dBm/Hz}$$

Problema 5.19 (Septiembre de 1996)

1. Potencia media transmitida en AM:

$$p_T = \frac{1 + m^2 \langle x_n^2 \rangle}{(1 + m)^2} PEP = \frac{1 + 1^2 \cdot 0,5}{(1 + 1)^2} 100 = 37,5 \text{ W}$$

Potencia media transmitida en FM:

$$p_T = PEP = 100 \text{ W}$$

2. La PEP no varía para ninguna de las dos modulaciones. Como en FM $p_T = PEP$, tampoco varía la potencia media transmitida. En AM, la nueva potencia media es:

$$x_p = 1 \text{ V (está normalizada)}$$

$$\langle x_n^2 \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} x^2 f_x(x) dx = 2 \int_0^{\infty} x^2 (1 - x) dx = \frac{1}{6}$$

$$p_T = \frac{1 + 1^2 \cdot (1/6)}{1 + 1^2 \cdot 0,5} 37,5 = 29,1\hat{6} \text{ W}$$

Que supone una variación porcentual respecto al valor inicial:

$$\Delta p_T = 37,5 - 29,1\hat{6} = 8,3 \text{ W}$$

$$\Delta p_T(\%) = 100 \frac{8}{37,5} = 22,2\hat{2} \text{ (disminuyendo)}$$

3. Atenuación del trayecto:

$$A_t = 50 + 20 \log[10] = 70 \text{ dB}$$

Calidad a la salida en AM:

$$\eta = \frac{m^2 \langle x_n^2 \rangle}{1 + m^2 \langle x_n^2 \rangle} = \frac{1^2 \cdot 0,5}{1 + 1^2 \cdot 0,5} = 0,3\hat{3}$$

$$z = \frac{p_T/a_t}{N_0 W} = \frac{20/10^7}{10^{-13} \cdot 3000} = 6666,6\hat{6} \text{ v.p.}$$

$$\left(\frac{S}{N}\right)_s = 10 \log(\eta \cdot z) \approx 33,5 \text{ dB}$$

Calidad a la salida en FM:

$$z = 6666,6\hat{6} \text{ v.p.}$$

$$D = \frac{12}{3} = 4$$

$$z_u = 40(4 + 1) = 200 \text{ v.p. (OK)}$$

$$\left(\frac{s}{n}\right)_s = 3 \cdot 4^2 \cdot 0,5 \cdot 6666,6\hat{6} = 160000 \text{ v.p.}$$

$$\left(\frac{S}{N}\right)_s \approx 52,0 \text{ dB}$$

Comentario: FM ofrece una gran calidad (eso sí, al precio de un ancho de banda elevado).

Problema 5.20 (Febrero de 1997)

1. Los moduladores de AM entregan señales similares. El de la rama inferior con la moduladora desfasada 180° (es decir, negativa):

$$y_L^+(t) = A[1 + m x_n(t)] \cos(\omega_c t)$$

$$y_L^-(t) = A[1 - m x_n(t)] \cos(\omega_c t)$$

La señal $y_L(t)$ se obtiene sumando las dos ramas, con sus signos correspondientes:

$$y_L(t) = 2A \cdot m \cdot x_n(t) \cdot \cos(\omega_c t) = A m \left\{ \cos[(\omega_c + \omega_m) t] + \cos[(\omega_c - \omega_m) t] \right\}$$

2. El espectro de $y_L(t)$ se observa en la figura 5.22.

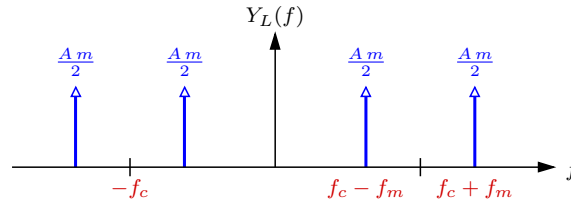


Figura 5.22: Espectro de $y_L(t)$.

3. Es una DBL, con amplitud total $A_t = 2A m$.
4. Potencia media total de $y_L(t)$:

$$p = 4 \frac{A^2 m^2}{4} = A^2 m^2$$

5. Potencia equivalente de pico:

$$PEP = \frac{A_t^2}{2R} = \frac{2^2 \cdot A^2 \cdot m^2}{2} = 2 A^2 m^2$$

6. Diferencia entre la potencia media y la PEP:

$$\Delta P = 10 \log\left(\frac{PEP}{p}\right) = 10 \log\left(\frac{2 A^2 m^2}{A^2 m^2}\right)$$

$$\Delta P = 3 \text{ dB}$$

7. Ancho de banda de $y_L(t)$:

$$B = 2 f_m = 2 \cdot 5(\text{k}) = 10 \text{ kHz}$$

8. Modular en BLU. Así el ancho de banda de la modulación se reduciría a la mitad.

9. A la salida del modulador FM:

$$y_1(t) = A' \cos[\omega_{c1} t + \beta \sin(\omega_m t)]$$

Tras el multiplicador de frecuencia:

$$y_2(t) = A' \cos[10 \omega_{c1} t + 10 \beta \sin(\omega_m t)]$$

Tras el mezclador:

$$y_3(t) = A' \cos[10 \omega_{c1} t + 10 \beta \sin(\omega_m t)] \cdot \cos(\omega_{c2} t)$$

$$y_3(t) = \frac{A'}{2} \cos[(\omega_{c2} + 10 \omega_{c1}) t + 10 \beta \sin(\omega_m t)] + \\ + \frac{A'}{2} \cos[(\omega_{c2} - 10 \omega_{c1}) t - 10 \beta \sin(\omega_m t)]$$

Y, finalmente, tras el filtro:

$$y_A(t) = \frac{A'}{2} \cos[(\omega_{c2} - 10 \omega_{c1}) t - 10 \beta \sin(\omega_m t)]$$

$$y_A(t) = \frac{A'}{2} \cos[2\pi \cdot 90 \cdot 10^6 \cdot t - 10 \sin(2\pi \cdot 5 \cdot 10^3 \cdot t)]$$

10. Potencia media total de $y_A(t)$:

$$p = \frac{(A'/2)^2}{2} = \frac{(A')^2}{8}$$

11. Ancho de banda según Carson:

$$B = 2 f_m (10 \beta + 1) = 2 \cdot 5000 (10 \cdot 1 + 1) = 110 \text{ kHz}$$

12. Aparece en las transparencias de la asignatura.

13. La modulación angular ocupa mucho más ancho de banda que la modulación lineal.

14. Calculamos las potencias de DBL y FM, ambas con una misma *PEP*:

$$p_{DBL} = PEP \cdot \langle x_n^2 \rangle = PEP \cdot 0,5$$

$$p_{FM} = PEP$$

La relación entre P_{FM} y P_{DBL} es independiente del valor de m , y vale:

$$P_{FM} - P_{DBL} = 3 \text{ dB}$$

15. FM es más robusta. En FM la atenuación variable no modifica la información, mientras que en AM se introduce una modulación parásita.

Problema 5.21 (Junio de 1997)

1. Parámetros de la modulación:

$$p_y = PEP = \frac{A^2}{2R} = \frac{10^2}{2} = 50 \text{ W}$$

$$B = 2(\Delta f + W) = 2(9 + 5)(\text{M}) = 28 \text{ MHz}$$

$$f_i(t) = f_c + \Delta f \cdot x_n(t)$$

$$f_{i\max} = f_c + \Delta f = 11,429 \text{ GHz}$$

$$f_{i\min} = f_c - \Delta f = 11,411 \text{ GHz}$$

2. Tomamos la frecuencia central del filtro igual a la frecuencia portadora:

$$f_0 = f_c = 11,420 \text{ GHz}$$

3. Razonamos sobre el valor del primer oscilador. Las conversiones siguen la ecuación (en MHz):

$$\pm 11420 \pm f_{OL1} \pm f_{OL2} = 480$$

Si $f_{OL1} = 11 \text{ GHz}$, los 2 primeros sumandos tienen que restarse entre sí (de otro modo saldría un valor excesivamente grande en módulo):

$$\pm 420 \pm (1400 + 10n) = 480$$

Y no hay valor de n que nos permita llegar a los 480 Mz. Luego tomamos:

$$f_{OL1} = 10 \text{ GHz}$$

De nuevo es necesario que los 2 primeros sumandos se cancelen entre sí:

$$\pm 1420 \pm (1400 + 10n) = 480$$

Y es fácil comprobar que se cumple con $n = 50$:

$$-1420 + (1400 + 10 \cdot 50) = 480$$

Resumiendo, las frecuencias de los osciladores son:

$$f_{OL1} = 10 \text{ GHz}$$

$$f_{OL2} = 1900 \text{ MHz}$$

4. Calidad a la salida:

$$z = \frac{p_R}{N_0 W} = \frac{50/10^{10}}{10^{-18} \cdot 5 \cdot 10^6} = 1000 \text{ v.p.}$$

$$D = \frac{9}{5} = 1,8$$

$$z_u = 40(D + 1) = 112 \text{ v.p. (OK)}$$

$$\left(\frac{s}{n}\right)_s = 3 \cdot D^2 \cdot \langle x_n^2 \rangle \cdot z = 3 \cdot 1,8^2 \cdot 0,2 \cdot 1000 = 1944 \text{ v.p.}$$

$$\left(\frac{S}{N}\right)_s (S/N)_s \approx 32,9 \text{ dB}$$

5. Frecuencia de corte:

$$M = \frac{1}{3 \left(\frac{f_{cc}}{W} \right)^2}$$

$$100 = \frac{1}{3 \left(\frac{f_{cc}}{5 \cdot 10^6} \right)^2}$$

$$f_{cc} \approx 288,68 \text{ kHz}$$

6. Cuanto mayor sea Δf mayor será la calidad a la salida. Por lo tanto, se trata de estudiar los condicionantes que limitan Δf .

Condicionante de entrada: $\Delta f \leq 35 \text{ MHz}$.

Ahora imponemos el condicionante de ancho de banda:

$$B = 2(\Delta f + W)$$

$$72 = 2(\Delta f + 5)$$

$$\Delta f \leq 31 \text{ MHz}$$

Nos tenemos que quedar con el valor más restrictivo, que es:

$$\Delta f = 31 \text{ MHz}$$

Problema 5.22 (Septiembre de 1997)

1. La señal $y_A(t)$ está modulada en FM.

$$p_A = PEP = \frac{A^2}{2R} = \frac{10^2}{2 \cdot 1} = 50 \text{ W}$$

$$B = B_c = 2(\Delta f + W) = 2(75 + 15)(\text{k}) = 180 \text{ kHz}$$

2. La señal $y_B(t)$ está modulada en AM.

$$p_B = \frac{A^2}{2R} [1 + m^2 \langle x_n^2 \rangle] = \frac{100^2}{2} [1 + 0,5^2 \cdot 0,2] = 5250 \text{ W}$$

$$PEP = \frac{A^2}{2R} (1 + m)^2 = \frac{100^2}{2} (1 + 0,5)^2 = 11250 \text{ W}$$

$$B = 2W = 2 \cdot 15(\text{k}) = 30 \text{ kHz}$$

3. La señal $y_A(t)$ solo se puede recibir con el A. (El B no deja pasar el ancho de banda de FM).

$$f_0 = f_a = 104,6 \text{ MHz}$$

$$10,7 = \pm 104,6 \mp f_{OLA}$$

$$f_{OLA} = 93,9 \text{ MHz}$$

$$f_{OLA} = 115,3 \text{ MHz}$$

4. La señal $y_B(t)$ se podría recibir con el A, pero los filtros sobredimensionados dejarían pasar mucho ruido (y posibles interferencias) innecesariamente. Lo adecuado es recibir la señal $y_B(t)$ con el B.

$$f_0 = f_b = 1,046 \text{ MHz}$$

$$f_{OLB} = 534 \text{ kHz}$$

$$f_{OLB} = 1558 \text{ kHz}$$

5. Calidad a la salida del RX A (FM):

$$D = \frac{\Delta f}{W} = \frac{75}{15} = 5$$

$$z = \frac{p_A/a_t}{N_0 W} = \frac{50/10^{10}}{10^{-18} \cdot 15000} = 333333.\hat{3} \text{ v.p.}$$

$$z_u = 40(D + 1) = 240 \text{ v.p. (OK)}$$

$$\left(\frac{s}{n}\right)_s = 3 \cdot D^2 \cdot \langle x_n^2 \rangle \cdot z = 3 \cdot 5^2 \cdot 0,2 \cdot 333333.\hat{3} = 5 \cdot 10^6 \text{ v.p.}$$

$$\left(\frac{S}{N}\right)_s \approx 67,0 \text{ dB}$$

6. Calidad a la salida del RX B (AM):

$$\eta = \frac{m^2 \langle x_n^2 \rangle}{1 + m^2 \langle x_n^2 \rangle} = \frac{0,5^2 \cdot 0,2}{1 + 0,5^2 \cdot 0,2} = 0,04761904762$$

$$z = \frac{p_B/a_t}{N_0 W} = \frac{5250/10^{6,5}}{10^{-18} \cdot 15000} = 1,106797181 \cdot 10^{11} \text{ v.p.}$$

$$\left(\frac{s}{n}\right)_s = \eta \cdot z \approx 5,27046 \cdot 10^9 \text{ v.p.}$$

$$\left(\frac{S}{N}\right)_s \approx 97,2 \text{ dB}$$

(Un valor muy alto.)

Problema 5.23 (Diciembre de 1997)

1. Como a la entrada hay T_0 trabajamos con factor de ruido:

$$N_{in} = \frac{10^{-17,4}}{1000} \approx 4 \cdot 10^{-21} \text{ W/Hz}$$

$$f = +\frac{T_e}{T_0} = 1 + \frac{400}{300} = 2.\hat{3} \text{ v.p.}$$

$$n_e = N_{in} \cdot B \cdot g \cdot f = 4 \cdot 10^{-21} \cdot 200 \cdot 10^3 \cdot 100 \cdot 2.\hat{3} = 1,8\hat{6} \cdot 10^{-13} \text{ W}$$

$$N_e \approx -97,3 \text{ dBm}$$

2. En la banda del filtro (centrada en 1 MHz) el ruido a la entrada es despreciable frente al ruido del motor:

$$n_{mot} \gg n_{in}$$

$$n'_{in} = n_{in} + n_{mot} \approx n_{mot}$$

Para calcular el nuevo ruido a la entrada (que es el ruido del motor) hay que integrar la densidad de ruido en la banda que deja pasar el filtro. Sustituimos el trapecio rectángulo que forma la densidad filtrada por un rectángulo con altura el valor medio. (Aquí es exacto, pero cuando es aproximado sigue siendo un recurso muy típico de ingeniería). La figura 5.23 ilustra el proceso.

$$N = \frac{10^{-15}}{2} = 5 \cdot 10^{-16} \text{ W/Hz (a 1 MHz)}$$

$$B = 200 \text{ kHz}$$

$$g = 100 \text{ v.p.}$$

$$n'_{in} \approx n_{mot} = 5 \cdot 10^{-16} \cdot 100 \cdot 200 \cdot 10^3 = 10^{-8} \text{ W}$$

$$N'_{in} \approx -50 \text{ dBm}$$

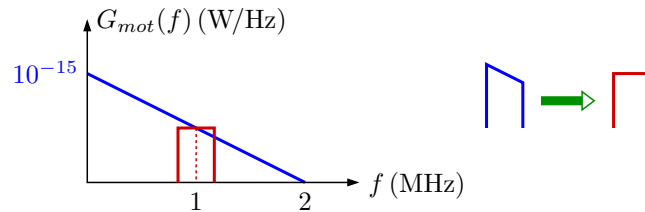


Figura 5.23: Proceso para el cálculo del ruido del motor.

3. Calidad a la salida del demodulador:

$$D = \frac{\Delta f}{W} = \frac{20}{10} = 2$$

$$B = 2(\Delta f + W) = 2(20 + 10)(\text{k}) = 60 \text{ kHz}$$

$$\langle x_n^2 \rangle = 0,5$$

$$z = \frac{p_R}{N_0 W} = \frac{p_R}{N_0 B} \cdot \frac{B}{W} = 100 \cdot \frac{60}{10} = 600 \text{ v.p.}$$

$$z_u = 40(2 + 1) = 120 \text{ v.p. (OK)}$$

$$\left(\frac{s}{n} \right)_s = 3 \cdot D^2 \cdot \langle x_n^2 \rangle \cdot z = 3 \cdot 2^2 \cdot 0,5 \cdot 600 = 3600 \text{ v.p.}$$

$$\left(\frac{S}{N} \right)_s \approx 35,6 \text{ dB}$$

4. Sería mejor ajustar el ancho de banda del filtro al ancho de banda de Carson, para que entre menos ruido (el exceso de ruido del posible mal filtrado de posdetección no se ha considerado en los cálculos). Se puede añadir una red de preénfasis deénfasis. También se puede modular con más profundidad, aumentando la relación de desviación.

Problema 5.24 (Junio de 1998)

1. Frecuencia central del filtro de entrada:

$$f_0 = \frac{12050 + 10950}{2} = 11500 \text{ MHz}$$

La banda de emisiones cabe en el ancho de banda del filtro situado tras la antena:

$$B_{\text{filtro}} = 1200 \text{ MHz}$$

$$B_{\text{emisiones}} = 12050 - 10950 = 1100 \text{ MHz (OK)}$$

2. Para que el segundo oscilador trabaje dentro de su margen es necesario que el primero haga un batido de cancelación (forme una resta con la señal recibida):

$$f_{\text{linea}} = f_d - f_{OL1} = 11503 - 10000 = 1503 \text{ MHz}$$

Frecuencia del segundo oscilador local:

$$\pm 1503 \mp f_{OL2} = 479,5$$

$$f_{OL2} - 1503 = 479,5$$

$$f_{OL2} = 1982,5 \text{ MHz (dentro del margen)}$$

3. El ancho de banda de FM es 30 MHz, por enunciado. A la entrada del RX la señal tiene 10 pW. Para calcular N_0 hay que sumar 3 contribuciones: el ruido que realmente está a la entrada, el ruido del amplificador llevado a la entrada, y el ruido de la línea llevado a la entrada. Como la señal deseada pasará por la línea con frecuencia:

$$f_{\text{linea}} = f_d - f_{OL1} = 1503 \text{ MHz}$$

Hay que calcular el ruido de la línea de 10 m a esa frecuencia:

$$\alpha = 0,0516 \sqrt{1503} \approx 2 \text{ dB/m}$$

$$A = \alpha \cdot L = 2 \cdot 10 = 20 \text{ dB}$$

Por lo tanto:

$$T_{eA} = T_0 (a - 1) = 300 (100 - 1) = 29700 \text{ K}$$

$$T_{eG} = T_0 (f - 1) = 300 (2 - 1) = 300 \text{ K}$$

$$T_T = T_{in} + T_{eG} + \frac{T_{eA}}{g} = 150 + 300 + \frac{29700}{1000} = 479,7 \text{ K}$$

$$\left(\frac{s}{n}\right)_e = \frac{p_R}{N_0 B} = \frac{10 \cdot 10^{-12}}{1,3806 \cdot 10^{-23} \cdot 479,7 \cdot 30 \cdot 10^6} = 50,33 \text{ v.p.}$$

$$\left(\frac{S}{N}\right)_e \approx 17,0 \text{ dB}$$

4. Señal ruido de postdetección:

$$D = \frac{8}{5}$$

$$M \approx \frac{1}{3 \left(\frac{500}{5000} \right)^2} = 33.\widehat{3}$$

$$z = \frac{10 \cdot 10^{-12}}{1,3806 \cdot 10^{-23} \cdot 479,7 \cdot 5 \cdot 10^6} \approx 301,9899 \text{ v.p.}$$

$$z_u = 40 (D + 1) = 104 \text{ v.p. (OK)}$$

$$\left(\frac{s}{n} \right)_s = 3 \cdot D^2 \cdot \langle x_n^2 \rangle \cdot z \cdot M = 3 \cdot \left(\frac{8}{5} \right)^2 \cdot 0,2 \cdot 301,9899 \cdot 33.\widehat{3}$$

$$\left(\frac{s}{n} \right)_s = 154461,9 \text{ v.p.} \rightarrow 41,9 \text{ dB}$$

Problema 5.25 (Septiembre de 1998)

1. A primera vista la solución está en el propio enunciado: si debe pasar la banda comprendida entre 512 y 1610 kHz, se requiere un ancho de banda:

$$B = 1610 - 512 = 1098 \text{ kHz}$$

Pero como nos obligan a que el centro del filtro sea $f_0 = 1000 \text{ kHz}$, resulta que la banda de emisiones no está bien centrada, y para dejar pasar todas hay que extender un poco el filtro. En la figura 5.24 se ilustra la situación. Por lo tanto:

$$f_{bs} - f_0 = 1610 - 1000 = 610 \text{ kHz}$$

$$f_0 - f_{bi} = 1000 - 512 = 488 \text{ kHz}$$

$$B = 2 \cdot 610 = 1220 \text{ kHz}$$

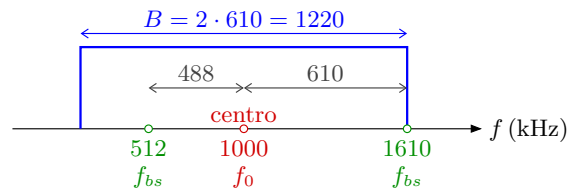


Figura 5.24: Filtro para la banda de emisiones.

2. Notación de subíndices: primer filtro $\rightarrow 1$; amplificador $\rightarrow 2$; mezclador $\rightarrow 3$; segundo filtro $\rightarrow 3$. Figura de ruido:

$$f_T = f_1 + \frac{f_2 - 1}{1/a_1} + \frac{f_3 - 1}{g_2/a_1} + \frac{f_4 - 1}{g_2/(a_1 a_3)}$$

$$f_T = 20 + (10 - 1) 20 + (4 - 1) \frac{20}{20000} + (100 - 1) \frac{20 \cdot 2}{20000} \approx 200 \text{ v.p.}$$

$$F_T \approx 23,0 \text{ dB}$$

Ganancia:

$$G_T = -13 + 43 - 3 - 20 = 7 \text{ dB} \rightarrow 5 \text{ v.p.}$$

3. Cálculo del calor cuadrático medio de la moduladora normalizada:

$$\langle x_n^2 \rangle = \frac{\langle x^2 \rangle}{x_p^2} = \frac{1}{3^2} = \frac{1}{9}$$

Cálculo de la amplitud promedio de la envolvente:

$$p_y = \frac{A^2}{2R} [1 + m^2 \langle x_n^2 \rangle]$$

$$52,78 \cdot 10^{-6} = \frac{A^2}{2 \cdot 1} [1 + 0,5^2 \cdot (1/9)]$$

$$A \approx 0,01 \text{ V}$$

Señal temporal a la salida de la antena (en voltios con t en segundos):

$$y(t) \approx 0,01 [1 + 0,5 x_n(t)] \cos(2\pi \cdot 1179 \cdot 10^3 \cdot t)$$

4. Frecuencia del oscilador local:

$$f_I = \pm f_d \mp f_{OL}$$

$$455 = -1179 + f_{OL}$$

$$f_{OL} = 1634 \text{ kHz}$$

5. Relación señal ruido de predetección:

$$T_{eT} = 300 (200 - 1) \approx 60000 \text{ K}$$

$$N_0 = N_{in} + k T_{eT} = 52,78 \cdot 10^{-15} + 8,3 \cdot 10^{-19} \approx 52,78 \cdot 10^{-15} \text{ W/Hz}$$

$$z = \frac{p_R}{N_0 W} = \frac{52,78 \cdot 10^{-6}}{52,78 \cdot 10^{-15} \cdot 5000} = 200000 \text{ v.p.}$$

$$\left(\frac{s}{n} \right)_e = \frac{z}{2} = 100000 \text{ v.p.} \rightarrow 50,0 \text{ dB}$$

6. Relación señal ruido de postdetección:

$$\eta = \frac{m^2 \langle x_n^2 \rangle}{1 + m^2 \langle x_n^2 \rangle} = \frac{0,5^2 \cdot (1/9)}{1 + 0,5^2 \cdot (1/9)} = 0,027$$

$$\eta \approx -15,7 \text{ dB}$$

$$\left(\frac{S}{N} \right)_s = \eta + Z \approx -15,7 + 53 = 37,3 \text{ dB}$$

Problema 5.26 (Septiembre de 1999)

1. A la salida del sumador:

$$v_i(t) = x(t) + c(t) = A_m \cos(\omega_m t) + A_c \cos(\omega_c t)$$

Después del bloque no lineal:

$$\begin{aligned} v_o(t) = & 2 A_m \cos(\omega_m t) + 2 A_c \cos(\omega_c t) + \frac{A_m^2}{2} [1 + \cos(2\omega_m t)] + \\ & + \frac{A_c^2}{2} [1 + \cos(2\omega_c t)] + 2 A_m A_c \cos(\omega_m t) \cos(\omega_c t) \end{aligned}$$

Y tras el filtrado se obtiene la señal AM en el punto A:

$$y_A(t) = 2 A_c \cos(\omega_c t) + 2 A_m A_c \cos(\omega_m t) \cos(\omega_c t)$$

$$y_A(t) = 2 A_c [1 + A_m \cos(\omega_m t)] \cos(\omega_c t)$$

2. Frecuencia central:

$$f_0 = f_c = 300 \text{ MHz}$$

Ancho de banda del filtro del transmisor:

$$B = 2W = 2 \cdot 5(\text{k}) = 10 \text{ kHz}$$

3. El índice de modulación, m , es igual en A y en B. Calculamos m y A con los datos de las potencias, en el punto B:

$$PEP = \frac{A^2}{2} (1 + m)^2 \quad \rightarrow \quad 112,5 = \frac{A^2}{2} (1 + m)^2$$

$$p_y = \frac{A^2}{2} [1 + m^2 \langle x_n^2 \rangle] \quad \rightarrow \quad 56,25 = \frac{A^2}{2} [1 + m^2 \cdot 0,5]$$

$$m = A_m = 0,5 \text{ (en A y en B)}$$

$$A = 2 A_c = 10 \text{ V (en B)}$$

$$g = 10^{20/20} = 10 \text{ v.s.}$$

$$A = \frac{10}{10} = 1 \text{ V (en A)}$$

4. Amplitud máxima y mínima:

$$A_{max} = A (1 + m) = 1,5 \text{ V}$$

$$A_{min} = A (1 - m) = 0,5 \text{ V}$$

5. Relación señal ruido que se mide en el punto C (no es la relación señal a ruido total equivalente a la entrada del demodulador, que sí incluye todo el ruido del receptor):

$$N'_0 = k T_{in} = 1,3806 \cdot 10^{-23} \cdot 5 \cdot 300 = 2,0709 \cdot 10^{-20} \text{ W/Hz}$$

$$B = 2W = 2 \cdot 5(\text{k}) = 10 \text{ kHz}$$

$$\left(\frac{s}{n}\right)_C = \frac{3 \cdot 10^{-9}}{2,0709 \cdot 10^{-20} \cdot 10000} = 1,4486 \cdot 10^7 \text{ v.p.}$$

$$\left(\frac{S}{N}\right)_C \approx 71,6 \text{ dB}$$

6. Relación señal ruido a la salida del demodulador:

$$\langle x_n^2 \rangle = 0,5 \text{ (tono)}$$

$$\eta = \frac{m^2 \langle x_n^2 \rangle}{1 + m^2 \langle x_n^2 \rangle} = \frac{0,5^2 \cdot 0,5}{1 + 0,5^2 \cdot 0,5} = 0,1$$

$$T_T = T_{in} + 2 T_0 (a_1 - 1) + T_0 (f_2 - 1) a_1$$

$$T_T = 9 T_{in} + 2 T_0 + 2 T_0 = 9 T_0 = 2700 \text{ K}$$

$$N_0 = k T_T = 1,3806 \cdot 10^{-23} \cdot 2700 = 3,72762 \cdot 10^{-20} \text{ W/Hz}$$

$$z = \frac{p_R}{N_0 W} = \frac{3 \cdot 10^{-9}}{3,72762 \cdot 10^{-20} \cdot 5000} = 1,6096 \cdot 10^7 \text{ v.p.}$$

$$\left(\frac{s}{n}\right)_s = \eta \cdot z = 1,7885 \cdot 10^6 \text{ v.p.} \rightarrow 62,5 \text{ dB}$$

Problema 5.27 (Junio de 2000)

1. Señal en el punto A:

$$p_A = \frac{p_B}{g_0} = \frac{PEP}{g_0} = \frac{10}{5} = 2 \text{ W}$$

$$2 = \frac{A_A^2}{2}$$

$$A_A = 2 \text{ V}$$

$$f_{cA} = f_c = 90 \text{ MHz}$$

$$y_A(t) = 2 \cos \left[2\pi \cdot 90 \cdot 10^6 \cdot t + 2\pi \cdot 950 \int_0^t x_n(\tau) d\tau \right]$$

Señal en el punto B:

$$p_B = 10 = \frac{A_B^2}{2}$$

$$A_B = \sqrt{20} \approx 4,47 \text{ V}$$

$$f_{cB} = 10 \cdot f_{cA} = 900 \text{ MHz}$$

$$y_B(t) = 4,47 \cos \left[2\pi \cdot 10 \cdot 90 \cdot 10^6 \cdot t + 2\pi \cdot 10 \cdot 950 \int_0^t x_n(\tau) d\tau \right]$$

Señal en el punto C:

$$A_C = \frac{A_B}{10^{120/20}} \approx 4,47 \cdot 10^{-6} \text{ V}$$

$$f_{cB} = f_{cA}$$

$$y_C(t) = 4,47 \cdot 10^{-6} \cos \left[2\pi \cdot 10 \cdot 90 \cdot 10^6 \cdot t + 2\pi \cdot 10 \cdot 950 \int_0^t x_n(\tau) d\tau \right]$$

2. Frecuencia central del filtro de predetección:

$$f_0 = f_{cB} = f_{cC} = 900 \text{ MHz}$$

Ancho de banda (Carson):

$$\Delta f_C = 10 \cdot 950 = 9,5 \text{ kHz}$$

$$B = 2(\Delta f + W) = 2(9,5 + 2,5)(\text{k}) = 24 \text{ kHz}$$

3. Potencia transmitida (punto B):

$$p_B = PEP = 10 \text{ W}$$

4. El receptor está constituido por una cascada de 2 elementos: un amplificador (cuadripolo 1) y un filtro (cuadripolo 2). Temperatura equivalente del conjunto (punto C):

$$T_{e1} = T_0 (f_1 - 1) \approx 300 (4 - 1) = 900 \text{ K}$$

$$T_{e2} = T_0 (a_2) = 300 (10 - 1) = 2700 \text{ K}$$

$$T_e = T_{e1} + \frac{T_{e2}}{g_1} = 900 + \frac{2700}{1000} \approx 900 \text{ K}$$

El primer elemento actúa como un LNA.

5. Señal a la entrada del RX:

$$P_B = 40 \text{ dBm}$$

$$P_C = P_B - A_t = 40 - 120 = -80 \text{ dBm} \rightarrow 10^{-11} \text{ W}$$

Ruido total equivalente a la entrada del RX:

$$T_T = T_{in} + T_e = 3,009 \cdot 10^5 + 900 = 3,018 \cdot 10^5 \text{ K}$$

$$N_0 = k T_T \approx 4,17 \cdot 10^{-18} \text{ W/Hz}$$

$$n = N_0 B \approx 10^{-13} \text{ W} \rightarrow -100 \text{ dBm}$$

Calidad a la entrada del demodulador (punto D):

$$\left(\frac{S}{N} \right)_D = P_C - N = -80 - (-100) = 20 \text{ dB}$$

6. Calidad a la salida del demodulador (punto E):

$$D = \frac{9,5}{2,5} = 3,8$$

$$z = \frac{p_C}{N_0 W} = \frac{10^{-11}}{4,17 \cdot 10^{-18} \cdot 2500} \approx 959,23 \text{ v.p.}$$

$$z_u = 40 (D + 1) = 192 \text{ v.p. (OK)}$$

$$\left(\frac{s}{n}\right)_E = 3 \cdot D^2 \cdot \langle x_n^2 \rangle \cdot z = 3 \cdot 3,8^2 \cdot 0,5 \cdot 9592 \approx 20777 \text{ v.p.}$$

$$\left(\frac{S}{N}\right)_E \approx 43,2 \text{ dB}$$

Problema 5.28 (Septiembre de 2000)

1. Potencia media:

$$p = \sum_i p_i = 0,63 + 2(4,16 + 1,56 + 0,21)$$

$$p = 12,49 \text{ W}$$

2. Ancho de banda de Carson:

$$W = f_m = 5 \text{ kHz (separación entre deltas contiguas)}$$

$$p = 12,49 = \frac{A^2}{2}$$

$$A \approx 5 \text{ V}$$

$$0,63 = \frac{5^2}{2} J_0^2(\beta)$$

$$J_0(\beta) \approx 0,2245$$

$$\beta \approx 2$$

$$B_c = 2(\beta + 1) f_m = 2(2 + 1) 5 \text{ kHz} = 30 \text{ kHz}$$

3. Parámetros de la señal:

$$A = 5 \text{ V}$$

$$\beta = 2$$

$$f_m = 5 \text{ kHz}$$

$$f_c = 100 \text{ kHz}$$

Expresión temporal de la señal (en voltios, con t en segundos):

$$y(t) = 5 \cos[2\pi \cdot 100 \cdot 10^3 \cdot t + 2 \sin(2\pi \cdot 5 \cdot 10^3 \cdot t)]$$

4. Se deja como tarea al lector.

Problema 5.29 (Junio de 2002)

1. Salida del modulador producto:

$$y(t) = A[1 + m x_n(t)] \cos(\omega_c t)$$

$$s(t) = \cos(\Delta\omega t)$$

$$y(t) \cdot s(t) = \frac{A}{2}[1 + m x_n(t)] \left\{ \cos[(\omega_c + \Delta\omega)t] + \cos[(\omega_c - \Delta\omega)t] \right\}$$

Efectivamente, la señal de salida tiene las conversiones de frecuencia hacia arriba y hacia abajo.

2. En la figura 5.25 se detalla el diagrama de bloques del conversor.

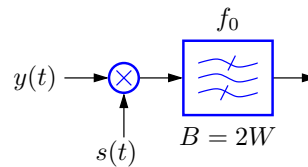


Figura 5.25: Diagrama de bloques del conversor de frecuencia.

El ancho de banda del filtro siempre es el que corresponde a una modulación lineal: $B = 2W$, donde W es el ancho de banda de la información moduladora. La frecuencia central del filtro debe ser la frecuencia resultante deseada: $f_c + \Delta f$ o $f_c - \Delta f$.

3. Salida del dispositivo no lineal:

$$v_e(t) = A[1 + m x_n] \cos(\omega_c t) + \cos(\Delta\omega t)$$

$$v_s = a_1 v_e + a_2 v_e^2$$

$$\begin{aligned} v_s(t) = & a_1 A[1 + m x_n] \cos(\omega_c t) + a_1 \cos(\Delta\omega t) + \\ & + \frac{a_2 A^2}{2} [1 + 2m x_n + x_n^2] [1 + \cos(2\omega_c t)] + \\ & + \frac{a_2}{2} [1 + \cos(2\Delta\omega t)] + \\ & + \frac{a_2 A}{2} [1 + m x_n] \left\{ \cos[(\omega_c + \Delta\omega)t] + \cos[(\omega_c - \Delta\omega)t] \right\} \end{aligned}$$

Vemos que contiene la señal AM desplazada en frecuencia hacia arriba y hacia abajo.

4. En la figura 5.26 se muestra el espectro de potencia de la señal de salida del dispositivo no lineal. Se aprecian las siguientes componentes espectrales:
- Continua; hay dos sumandos. (Está dibujado como una delta en el origen.)
 - Subespectro de la moduladora, en BB. (Está dibujado rectangular.)
 - Subespectro en el origen de la señal x_n^2 , en BB. (Como es un producto de x_n consigo misma en el tiempo, es una convolución en frecuencia que ocupa el doble de ancho de banda que la señal original. Está dibujado triangular.)
 - Tono a Δf .

- Tono a $2\Delta f$.
- AM centrada en f_c , modulada por x_n .
- AM centrada en $f_c - \Delta f$, modulada por x_n .
- AM centrada en $f_c + \Delta f$, modulada por x_n .
- AM centrada en $2f_c$, modulada por:

$$z_n = \frac{x_n + \frac{x_n^2}{2m}}{z_p}$$

con índice de modulación $m' = 2m \cdot z_p$.

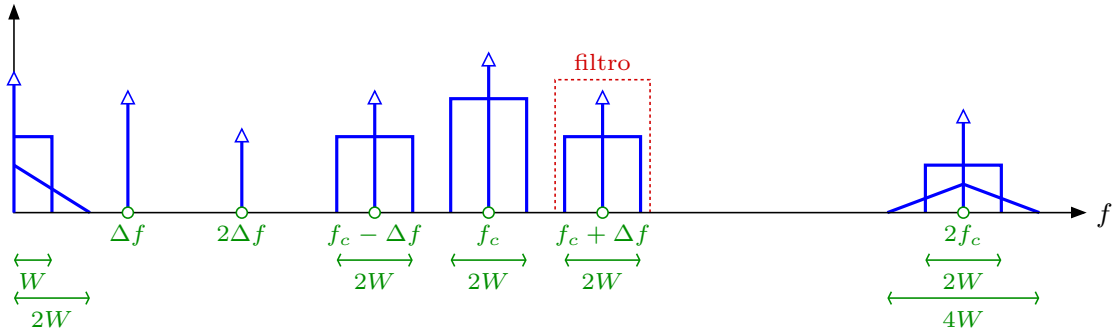


Figura 5.26: Densidad espectral de potencia unilateral.

Para obtener la AM desplazada hacia arriba hay que filtrar con:

$$f_0 = f_c + \Delta f$$

$$B = 2W$$

Problema 5.30 (Junio de 2002)

1. Densidad espectral de ruido total equivalente a la entrada del RX:

$$T_{in} = 180 \text{ K}$$

$$T_e = T_0 (f - 1) = 300 (10^{0,12} - 1) \approx 95,5 \text{ K}$$

$$N_0 = k (T_{in} + T_e) \approx 3,8032 \cdot 10^{-21} \text{ W/Hz}$$

Ancho de banda de Carson:

$$B_c = 2 (\Delta f + W) = 2 (8 + 5) (\text{M}) = 26 \text{ MHz}$$

Formamos la relación señal a ruido de predetección, y despejamos la atenuación:

$$\left(\frac{s}{n} \right)_e = \frac{p_T / a_t}{N_0 B_c}$$

$$10^{1,5} = \frac{100/a_t}{3,8032 \cdot 10^{-21} \cdot 26 \cdot 10^6}$$

$$a_t \approx 3,1980 \cdot 10^{13} \text{ v.p.}$$

$$A_t \approx 135,0 \text{ dB}$$

Calidad de postdetección:

$$D = \frac{\Delta f}{W} = \frac{8}{5} = 1,6$$

$$z = \frac{p_R}{N_0 W} = \left(\frac{s}{n}\right)_e \cdot \frac{B_c}{W} = 10^{1,5} \cdot \frac{26}{5} \approx 164,44 \text{ v.p.}$$

$$z_u = 40(D + 1) = 104 \text{ v.p. (OK)}$$

$$M \approx \frac{1}{3\left(\frac{0,5}{5}\right)^2} = 33,3 \text{ v.p.}$$

$$\left(\frac{s}{n}\right)_s = 3 \cdot D^2 \cdot \langle x_n^2 \rangle \cdot z \cdot M$$

$$\left(\frac{s}{n}\right)_s = 3 \cdot 1,6^2 \cdot 0,33 \cdot 164,44 \cdot 33,3 \approx 13892 \text{ v.p.}$$

$$\left(\frac{S}{N}\right)_s \approx 41,1 \text{ dB}$$

2. Podemos aumentar la desviación de frecuencia. Para ganar 3 dB necesitamos:

$$3 = 20 \log\left(\frac{\Delta f'}{8(M)}\right)$$

$$\Delta f' \approx 11,3 \text{ MHz}$$

Problema 5.31 (Enero de 2003)

Como $W \ll B$ y necesitamos $(S/N) \uparrow$, elegimos FM. Se puede demostrar que las demás modulaciones no cumplen los requisitos; probemos por ejemplo con DBL:

$$B = 2W = 8 \text{ kHz (sirve, aunque se desperdicia mucho)}$$

$$s_u = \frac{10^{-8,4}}{1000} \approx 4 \cdot 10^{-12} \text{ W}$$

$$\left(\frac{s}{n}\right)_s = z = \frac{4 \cdot 10^{-12}}{4 \cdot 10^{-18} \cdot 4000} = 250 \text{ v.p.}$$

$$\left(\frac{S}{N}\right)_s \approx 24 \text{ dB (no sirve)}$$

En la figura 5.27 se observa el diagrama de bloques del sistema de telecomunicación propuesto.

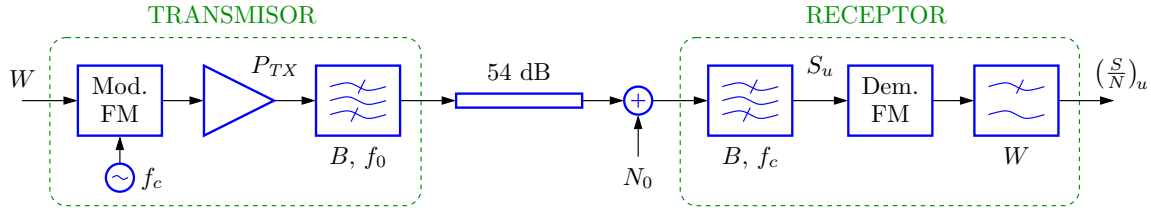


Figura 5.27: Diagrama de bloques del sistema propuesto.

Imponemos el ancho de banda del medio:

$$B = 2(\Delta f + W)$$

$$50 = 2(\Delta f + 4)$$

$$\Delta f \leq 21 \text{ kHz}$$

$$D = \frac{\Delta f}{W} = \frac{21}{4} = 5,25$$

$$D \leq 5,25$$

Probamos a transmitir el máximo admisible por cuestiones de distorsión:

$$p_{TX} = 1 \text{ } \mu\text{W} \rightarrow -30 \text{ dBm}$$

$$P_{RX} = P_{TX} - At = -30 - 54 = -84 \text{ dBm} \rightarrow 4 \cdot 10^{-12} \text{ W}$$

Vemos que la potencia recibida es el valor umbral s_u (mínimo requerido). Por lo tanto la potencia transmitida queda fijada.

Ahora estudiamos la calidad:

$$z = \frac{s_u}{N_0 W} = \frac{4 \cdot 10^{-12}}{4 \cdot 10^{-18} \cdot 4000} = 250 \text{ v.p.}$$

Que cumple en el límite, pues coincide con z_u . Esto implica que no podemos usar una relación de desviación menor de 5,25. Luego la calidad de posdetección es:

$$\left(\frac{s}{n}\right)_s = 3 \cdot D^2 \cdot \langle x_n^2 \rangle \cdot z_u$$

$$\left(\frac{s}{n}\right)_s = 3 \cdot 5,25^2 \cdot 0,5 \cdot 250 \approx 10336 \text{ v.p.}$$

$$\left(\frac{S}{N}\right)_s \approx 40,1 \text{ dB}$$

Que NO es suficiente. Pero podemos fácilmente conseguir el valor necesario añadiendo preénfasis-deénfasis con:

$$M \approx 10 \text{ dB}$$

Problema 5.32 (Junio de 2003)

1. En A obtenemos una señal FM con frecuencia moduladora baja e índice de modulación pequeño. En B, gracias al multiplicador $\times N_2$, subimos la frecuencia de portadora y aumentamos el índice de modulación. En D, pasando por el mezclador $\times N_1$ y el filtro, colocamos la frecuencia portadora en el valor deseado para transmitir.

2. Señal en A:

$$y_A(t) = A \cos[\omega_c t + \beta_1 \sin(\omega_m t)]$$

$$\beta_1 = 1$$

$$\omega_c = 2\pi f_c$$

$$f_c = 200 \text{ kHz}$$

Señal en B:

$$y_B(t) = A \cos[N_2 \omega_c t + N_2 \sin(\omega_m t)]$$

Señal en C:

$$y_C(t) = y_B(t) \cdot A_c \cos(N_1 \omega_c t)$$

$$y_C(t) = \frac{A_c A}{2} \cos[(N_2 + N_1) \omega_c t + N_2 \sin(\omega_m t)] + \frac{A_c A}{2} \cos[(N_2 - N_1) \omega_c t + N_2 \sin(\omega_m t)]$$

La amplitud de la señal modulada, A , puede no coincidir con la amplitud de la portadora, A_c , todo depende del proceso interno del modulador. Los espectros en A, B y C se observan en la figura 5.28.

3. Como se requiere un índice de modulación de 64:

$$\beta = N_2 = 64$$

Ahora imponemos el valor de la portadora final:

$$f_0 = (N_2 + N_1) f_c$$

$$23,6 = (64 + N_1) 0,2$$

$$N_1 = 54$$

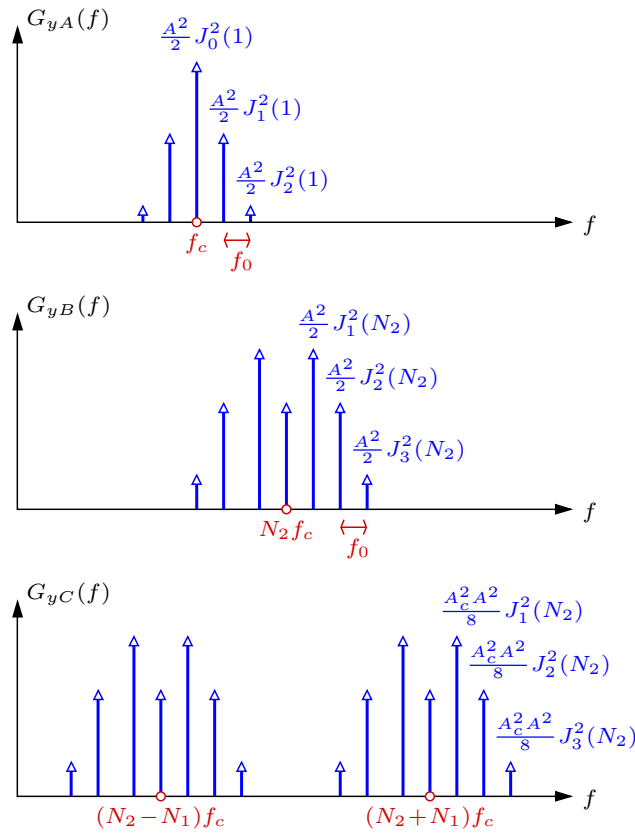
4. Parámetros del filtro paso banda de salida:

$$f_0 = 23,6 \text{ MHz}$$

$$B = 2(\beta + 1) f_m = 2(64 + 1) 1(\text{k}) = 130 \text{ kHz}$$

5. Señal FM transmitida, punto D:

$$y(t) = \frac{A_c A}{2} \cos[2\pi \cdot 23,6 \cdot 10^6 \cdot t + 64 \sin(2\pi \cdot 10^3 \cdot t)]$$

Figura 5.28: Espectros en A, B y C. ($R = 1 \Omega$.)

Problema 5.33 (Septiembre de 2003)

Calculamos la densidad espectral total equivalente de ruido:

$$T_e = T_0 (f - 1) = 300 (10^{0,08} - 1) \approx 60,7 \text{ K}$$

$$N_0 = k (I_{in} + T_e) = 1,3806 \cdot 10^{-23} (140 + 60,7) \approx 2,7709 \cdot 10^{-21} \text{ W/Hz}$$

Calculamos el parámetro z :

$$z = \frac{p_T/a_t}{N_0 W} = \frac{160/a_t}{2,7709 \cdot 10^{-21} \cdot 5 \cdot 10^6} \approx \frac{1,1549 \cdot 10^{16}}{a_t}$$

Calculamos la mejora por pre-deénfasis:

$$M \approx \frac{1}{3 \left(\frac{0,5}{5} \right)^2} = 33,3$$

Imponemos el valor de la calidad, y despejamos la atenuación:

$$\left(\frac{s}{n} \right)_s = 3 \cdot D^2 \cdot \langle x_n^2 \rangle \cdot z \cdot M$$

$$10^{4,5} = 3 \cdot \left(\frac{8}{5} \right)^2 \cdot 0,28 \cdot \frac{1,1549 \cdot 10^{16}}{a_t} \cdot 33,3$$

$$a_t \approx 2,6178 \cdot 10^{13} \text{ v.p.}$$

$$A_t \approx 134,2 \text{ dB}$$

Por último, verificamos que no se ha producido captura por ruido:

$$z_u = 40 (D + 1) = 104 \text{ v.p.}$$

$$z \approx \frac{1,1549 \cdot 10^{16}}{2,6178 \cdot 10^{13}} = 441,2 \text{ v.p. (OK)}$$

Problema 5.34 (Febrero de 2004)

1. Señal en el punto A:

$$y_A(t) = A \cos[\omega_c t + 1 \sin(\omega_m t)] = A \sum_n J_n(1) \cos[(\omega_c + n \omega_m) t]$$

En la figura 5.29 se muestra la densidad espectral de potencia de la señal.

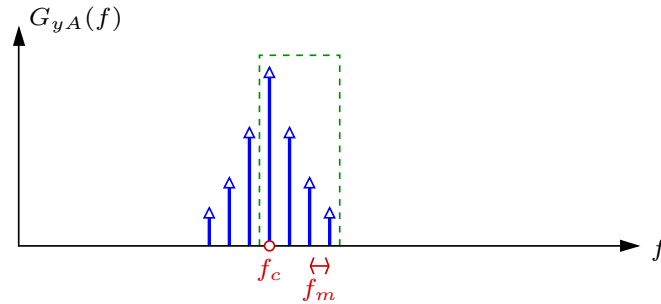


Figura 5.29: Espectro en A. (Espectro en B recuadrado con línea discontinua verde.)

2. Señal en el punto B:

$$y_B(t) = A J_0(1) \cos[\omega_c t] + A J_1(1) \cos[(\omega_c + \omega_m) t] + \\ + A J_2(1) \cos[(\omega_c + 2 \omega_m) t] + A J_3(1) \cos[(\omega_c + 3 \omega_m) t]$$

El espectro de potencia de la señal en B está recuadrado con línea discontinua verde en la figura 5.29.

3. Señal en el punto C:

$$y_C(t) = \frac{A}{2} J_0(1) \cos[(2\omega_c - \omega_m) t] + \frac{A}{2} J_0(1) \cos[\omega_m t] + \frac{A}{2} J_1(1) \cos[2\omega_c t] + \\ + \frac{A}{2} J_1(1) \cos[2\omega_m t] + \frac{A}{2} J_2(1) \cos[(2\omega_c + \omega_m) t] + \frac{A}{2} J_2(1) \cos[3\omega_m t] + \\ + \frac{A}{2} J_3(1) \cos[(2\omega_c + 2\omega_m) t] + \frac{A}{2} J_3(1) \cos[4\omega_m t]$$

El espectro de la señal en C se observa en la figura 5.30.

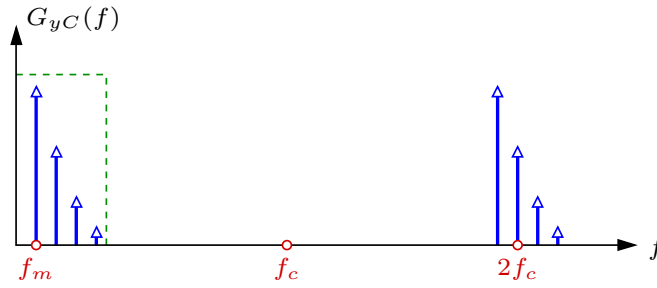


Figura 5.30: Espectro en C. (Espectro en D recuadrado con línea discontinua verde.)

4. Señal en el punto D:

$$y_D(t) = \frac{A}{2} J_0(1) \cos[\omega_m t] + \frac{A}{2} J_1(1) \cos[2\omega_m t] + \\ + \frac{A}{2} J_2(1) \cos[3\omega_m t] + \frac{A}{2} J_3(1) \cos[4\omega_m t]$$

El espectro de potencia de la señal en D está recuadrado con línea discontinua verde en la figura 5.30.

Problema 5.35 (Junio de 2004)

Calculamos el ancho de banda de Carson de la señal modulada en FM:

$$B_c = 2(\Delta f + W) = 2(75 + 15)(\text{k}) = 180 \text{ kHz}$$

Calculamos la relación de desviación:

$$D = \frac{\Delta}{W} = \frac{75}{15} = 5$$

Calculamos la atenuación del canal. Se toma como frecuencia la portadora:

$$A_t = 56 + 20 \log(100 \cdot 100) = 136 \text{ dB}$$

Calculamos la densidad espectral unilateral (total, equivalente) a la entrada del demodulador. Se incluyen todas las fuentes de ruido (también el ruido interno del demodulador, aunque no esté presente a su entrada). Hay dos contribuciones: el ruido a la entrada (T_{in}) y el ruido interno del demodulador (T_e).

$$T_{in} = 300 \text{ K}$$

$$T_e = T_0 (f_R - 1) \approx 900 \text{ K}$$

$$N_0 = k(T_{in} + T_e) = k \cdot 1200$$

La potencia transmitida es:

$$p_{TX} = \frac{A^2}{2 \cdot R} = \frac{40^2}{2 \cdot 50} = 16 \text{ W} \rightarrow 42 \text{ dBm}$$

Luego se recibe una potencia:

$$P_{RX} = P_{TX} - A_t = 42 - 136 = -94 \text{ dBm}$$

Sustituyendo los resultados, obtenemos la calidad equivalente a la entrada, z , donde el ancho de banda de la información es $W = 15 \text{ kHz}$.

$$z = \frac{p_{RX}}{N_0 \cdot W} \approx 1600 \text{ veces de pot.}$$

Siempre debemos comparar la z con su valor umbral. Para calcular dicho umbral aplicamos una de las dos siguientes fórmulas:

$$z_u(\text{v.p.}) = 40(D + 1) = 40(5 + 1) = 240 < z$$

Luego no hay captura por ruido. Calculamos el factor de mejora por pre-deénfasis. Como la frecuencia de corte de los filtros es mucho menor que al ancho de banda de la información ($f_{cc} \ll W$):

$$M \approx \frac{1}{3(f_{cc}/W)^2} \approx 17 \text{ v.p.}$$

Y, por último, aplicamos la fórmula de la calidad:

$$(s/n)_s = 3 \cdot D^2 \cdot \langle x_n^2 \rangle \cdot z \cdot M = 653000 \rightarrow 58,2 \text{ dB}$$

Problema 5.36 (Noviembre de 2004)

1. Atenuación del canal:

$$A_{tt} = 56 + 20 \log[200 \cdot 50] = 136 \text{ dB}$$

Potencia transmitida de DBL:

$$p_T = \frac{A_t^2}{2R} \langle x_n^2 \rangle = \frac{100^2}{2 \cdot 50} 0,32 = 32 \text{ W}$$

Potencia media recibida:

$$p_R = \frac{p_T}{a_{tt}} \approx \frac{32}{4 \cdot 10^{13}} = 8 \cdot 10^{-13} \text{ W}$$

Densidad de ruido equivalente a la entrada:

$$T_e = 300(8 - 1) = 2100 \text{ K}$$

$$N_0 = k(T_{in} + T_e) = 1,3806 \cdot 10^{-23} (300 + 2100) = 3,31344 \cdot 10^{-20} \text{ W/Hz}$$

Parámetro z :

$$z = \frac{p_R}{N_0 W} = \frac{8 \cdot 10^{-13}}{3,31344 \cdot 10^{-20} \cdot 15000} \approx 1609,6 \text{ v.p.}$$

Calidad a la salida:

$$(s/n)_s = z \approx 1609,6 \text{ v.p.} \rightarrow 32,1 \text{ dB}$$

2. Potencia transmitida de AM:

$$p_T = \frac{100^2}{2 \cdot 50} [1 + 0,8^2 \cdot 0,32] = 120,48 \text{ W}$$

Potencia media recibida:

$$p_R \approx \frac{120,48}{4 \cdot 10^{13}} = 3,012 \cdot 10^{-12} \text{ W}$$

Parámetro z :

$$z \approx 6060,2 \text{ v.p.}$$

Eficiencia frente a portadora:

$$\eta = \frac{0,8^2 \cdot 0,32}{1 + 0,8^2 \cdot 0,32} = 0,169987$$

Calidad a la salida:

$$(s/n)_s = \eta \cdot z \approx 1030,15 \text{ veces de potencia}$$

$$(S/N)_s = 30,1 \text{ dB}$$

Comentario: para obtener calidades similares, AM debe transmitir una potencia media mucho mayor.

Problema 5.37 (Noviembre de 2004)

Densidad espectral total equivalente de ruido en el punto 3:

$$T_e = \frac{T_0 (a - 1)}{a} + T_0 (f - 1)$$

$$T_e \approx \frac{300 \cdot 10^6}{10^6} + 300 (10 - 1) = 3000 \text{ K}$$

$$N_0 = k T_e = 4,1418 \cdot 10^{-20} \text{ W/Hz}$$

Imponemos el requisito de calidad, y despejamos la potencia transmitida:

$$\left(\frac{s}{n}\right)_s = z = \frac{p_T/a}{N_0 W}$$

$$10^{3,6} = \frac{p_T/10^6}{4,1418 \cdot 10^{-20} \cdot 4000}$$

$$p_T \approx 6,5955 \cdot 10^{-7} \text{ W}$$

$$P_T \approx -31,8 \text{ dBm}$$

Problema 5.38 (Junio de 2005)

1. El diagrama de bloques de un receptor adecuado se observa en la figura 5.31. La conversión a 20 MHz (sintonía del demodulador) se realiza mezclando la señal con un oscilador local a f_{OL} (aún por determinar). Al final de la cadena tenemos un filtro de deénfasis.

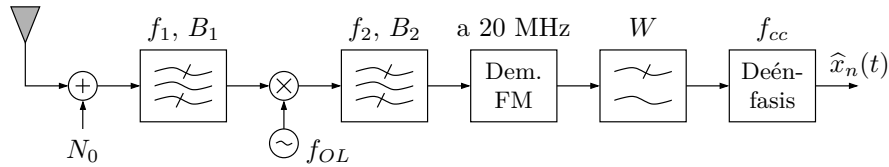


Figura 5.31: Diagrama de bloques del receptor propuesto.

2. Señal a la entrada del amplificador:

$$y_T = A \cos \left[2\pi f'_c t + 2\pi \Delta f' \int_0^t x_n(\tau) d\tau \right]$$

Calculamos la amplitud:

$$p = \frac{A^2}{2R} = 1 \text{ W} \Rightarrow A = \sqrt{2 \cdot 50} = 10 \text{ V}$$

La frecuencia de portadora y la desviación de frecuencia se modifican en el multiplicador de frecuencia:

$$f'_c = 10 \cdot f_c = 200 \text{ MHz}$$

$$\Delta f' = 10 \cdot \Delta f = 50 \text{ kHz}$$

3. El filtro paso banda del transmisor deja pasar el ancho de banda de Carson:

$$B = 2(\Delta f' + W) = 2(50 + 15)(\text{k}) = 130 \text{ kHz}$$

Y está centrado a la frecuencia de portadora:

$$f_0 = f'_c = 200 \text{ MHz}$$

Atenuación del medio:

$$A_t = 25 + 17,38 \log_{10}(200) + 21,85 \log_{10}(40) = 100 \text{ dB}$$

Filtros del receptor:

$$f_1 = f_0 = 200 \text{ MHz}$$

$$f_2 = 20 \text{ MHz (sintonía del demodulador)}$$

$$B_1 = B_2 = B = 130 \text{ kHz}$$

$$W = 15 \text{ kHz}$$

Oscilador local:

$$\pm 200(\text{M}) \pm f_{OL} = 20(\text{M}) \Rightarrow f_{OL} = 180 \text{ MHz}$$

(También sirve 220 MHz.) Mejora por preénfasis-deénfasis:

$$W \gg f_{cc}$$

$$M \approx \frac{1}{3 \left(\frac{f_{cc}}{W} \right)^2} = 300 \text{ v.p.}$$

Relación de desviación:

$$D = \frac{\Delta f'}{W} = \frac{50}{15}$$

Parámetro z :

$$p_e = \frac{p \cdot g_T}{a_t} \quad (\text{a la entrada del demodulador})$$

$$z = \frac{p_e}{N_0 W} = \frac{p_e}{10^{-13} \cdot 15 \cdot 10^3}$$

Umbral de Z :

$$Z_u = 10 \log [40 (D + 1)] = 22,4 \text{ dB}$$

Para calcular la ganancia del amplificador del receptor tenemos que imponer el requisito de calidad:

$$(s/n) = 3 D^2 \langle x_n^2 \rangle z M$$

$$10^6 = 3 \left(\frac{50}{15} \right)^2 0,1 \frac{p_e}{10^{-13} \cdot 15 \cdot 10^3} 300$$

$$p_e = 1,5 \cdot 10^{-6} (\text{W}) = \frac{1 \cdot g_T}{10^{10}}$$

$$g_T = 15000 \text{ v.p.} \Rightarrow G_T \approx 41,76 \text{ dB}$$

Comprobamos respecto al umbral:

$$z = \frac{1,0 \cdot 10^{-6}}{10^{-13} \cdot 15 \cdot 10^3} = 1000 \text{ v.p.}$$

$$Z = 30 \text{ dB} > Z_u$$

Problema 5.39 (Febrero de 2006)

1. Calculamos la z :

$$z = \frac{p_R}{N_0 W} = \frac{400/10^{14}}{4 \cdot 10^{-21} \cdot 10^6} = 1000 \text{ v.p.}$$

Comparamos con el umbral:

$$B = 2(\Delta f + W) = 2(\Delta f + 1) = 10$$

$$\Delta f = 4 \text{ MHz}$$

$$D = \frac{\Delta f}{W} = 4$$

$$z_u = 40(D + 1) = 20(4 + 1) = 200 \text{ v.p.}$$

$$z > z_u \text{ (el demodulador trabaja adecuadamente)}$$

Calculamos la calidad a la salida:

$$(s/n)_s = 3 D^2 \langle x_n^2 \rangle z = 3 \cdot 4^2 \cdot 0,5 \cdot 1000 = 24000 \text{ v.p.}$$

$$(S/N)_s \approx 43,8 \text{ dB}$$

2. Como en nuestro sistema la ganancia G_A no influye en la calidad (S/N) , no hay limitaciones en ese sentido. Por otro lado, si G_A es muy alto cabe esperar problemas de distorsión, o incluso saturación.

Respecto al factor de ruido, hay que comprobar que no compromete la calidad umbral:

$$N_0 = k T_{in}$$

$$4 \cdot 10^{-21} = 1,3806 \cdot 10^{-23} \cdot T_{in}$$

$$T_{in} = 289,73 \text{ K}$$

$$z_u = \frac{p_T/a_t}{k(T_{in} + T_{eA})W}$$

$$200 = \frac{400/10^{14}}{1,3806 \cdot 10^{-23} (289,73 + T_{eA}) 10^6}$$

$$T_{eA} = 1158,92 \text{ K}$$

$$f_A = 1 + \frac{T_{eA}}{T_0} = 4,863 \rightarrow F_A = 6,87 \text{ dB}$$

Luego la figura de ruido puede variar entre 0 y 6,87 dB (por supuesto, 0 dB no se puede alcanzar en un dispositivo real).

3. El espectro está centrado en $f_c = 10$ GHz, y tiene deltas separadas $f_m = 1$ MHz. Dentro del ancho de banda de Carson caben 11 deltas. Como el espectro es simétrico respecto a f_c basta con calcular las potencias para los valores de n positivos.

Las líneas espectrales tienen una potencia:

$$\frac{A^2}{2R} J_n^2(\beta)$$

$$p_R = 4 \cdot 10^{-12} = \frac{A^2}{2R}$$

$$\beta = D = 4$$

$$n = 0; \pm 1; \pm 2; \pm 3; \pm 4; \pm 5;$$

En el cuadro 5.1 se observan los valores de n (positivos), las frecuencias, los valores de $J_n(\beta)$ y la potencia, de cada línea espectral. El dibujo se deja a cargo del alumno.

n	f	$J_n(4)$	Pot (W)
0	f_c	$-3.9715e-1$	$6.31e-13$
1	$f_c + f_m$	$-6.6043e-2$	$1.74e-14$
2	$f_c + 2f_m$	$3.6413e-1$	$5.30e-13$
3	$f_c + 3f_m$	$4.3017e-1$	$7.40e-13$
4	$f_c + 4f_m$	$2.8113e-1$	$3.16e-13$
5	$f_c + 5f_m$	$1.3209e-1$	$6.98e-14$

Cuadro 5.1: Funciones de Bessel de primera especie, orden n y argumento β : $J_n(\beta)$.

Problema 5.40 (Febrero de 2006)

1. La señal que entra al bloque no lineal es la suma de la moduladora y la portadora:

$$v_e = x + A_c \cos(\omega_c t)$$

Después se efectúa la operación del polinomio:

$$v_s = a_1 x + a_1 A_c \cos(\omega_c t) + a_2 x^2 + \frac{a_2 A_c^2}{2} [1 + \cos(2\omega_c t)] + 2 a_2 x A_c \cos(\omega_c t)$$

El filtro elimina la continua, las frecuencias bajas (banda base) y el tono a frecuencia doble de la portadora:

$$y(t) = a_1 A_c \cos(\omega_c t) + 2 a_2 x A_c \cos(\omega_c t)$$

$$y(t) = a_1 A_c \left[1 + \frac{2 a_2}{a_1} x(t) \right] \cos(\omega_c t)$$

Y, por último, sustituimos la moduladora por su expresión:

$$y(t) = a_1 A_c \left[1 + \frac{2 a_2}{a_1} A_m \cos(\omega_m t) \right] \cos(\omega_c t)$$

Este modulador AM se conoce como modulador cuadrático, y aprovecha la no linealidad para mezclar la moduladora y la portadora.

2. Índice de modulación:

$$m = \frac{2a_2}{a_1} A_m = \frac{2 \cdot 0,125}{1} 0,4 = 0,1 \text{ (10 \%)}$$

En el modulador cuadrático se trabaja con índices de modulación bajos para no deformar mucho la moduladora con una distorsión alta (a_2 grande). Calculamos la potencia media:

$$A = a_1 A_c = 1 \cdot 20 = 20 \text{ V}$$

$$p_y = \frac{20^2}{2 \cdot 50} [1 + 0,1^2 \cdot 0,5] = 4,02 \text{ W}$$

$$P_y = 36,04 \text{ dBm}$$

Problema 5.41 (Junio de 2006)

1. En la pantalla (a) el nivel de ruido es -100 dBm, por 1 kHz de RBW. Ese nivel es el resultado de sumar la contribución de la entrada T_0 (que se puede despreciar) y la contribución del ruido interno del analizador T_e .

$$-100 = 10 \log [N_0(\text{mW}/\text{kHz})]$$

$$N_0 = 10^{-10}(\text{mW}/\text{kHz}) = 10^{-16} \text{ W/Hz}$$

$$10^{-16} = k(T_0 + T_e) = 1,3806 \cdot 10^{-23} (300 + T_e)$$

$$T_e \approx 7,2429 \cdot 10^6 \text{ K}$$

Convertimos en factor y en figura de ruido:

$$f = 1 + \frac{T_e}{T_0} \approx 24144 \text{ v.p.}$$

$$F = 10 \log(f) \approx 43,8 \text{ dB}$$

2. Parámetros de la señal AM:

$$P_c = -10 \text{ dBm} \rightarrow 0,1 \text{ mW}$$

$$P_{1bl} = -30 \text{ dBm} \rightarrow 0,001 \text{ mW}$$

$$p_{2bl} = 2 \cdot p_{1bl} = 0,002 \text{ mW}$$

$$p_{AM} = p_c + p_{2bl} = 0,102 \text{ mW}$$

$$P_{AM} \approx -9,9 \text{ dBm}$$

$$\Delta P = P_c - P_{1bl} = 20 \text{ dB}$$

$$m = 2 \cdot 10^{-(\Delta P/20)} = 0,2 \rightarrow 20 \%$$

$$PEP = \frac{(1+m)^2}{1+m^2 \langle x_n^2 \rangle} p_{AM}$$

$$PEP = \frac{(1+0,2)^2}{1+0,2^2 \cdot 0,5} 0,102 = 0,144 \text{ mW}$$

$$PEP \approx -8,4 \text{ dBm}$$

$$f_c = 130 \text{ MHz}$$

$$f_m = 4 \text{ kHz}$$

$$B = 2 \cdot f_m = 8 \text{ kHz}$$

3. La potencia de señal es p_{AM} ; la potencia de ruido la obtenemos multiplicando el nivel N'_0 (W/Hz) (con el modulador conectado) por el ancho de banda de AM (Hz):

$$S = -9,9 \text{ dBm}$$

$$N'_0(\text{dBm/Hz}) = N(\text{dBm}) - 10 \log [B(\text{Hz})]$$

$$N'_0 = -70 - 10 \log(1000) = -100 \text{ dBm/Hz}$$

$$N = -100 + 10 \log(8000) \approx -61 \text{ dBm}$$

$$\left(\frac{S}{N} \right) = -9,9 - (-61) = 51,1 \text{ dB}$$

Problema 5.42 (Septiembre de 2006)

1. Si llamamos:

$$f_i = 7 \text{ kHz}$$

Entonces las frecuencias de los tonos interferentes son:

$$f_{i1} = f_c - f_i = 993 \text{ kHz}$$

$$f_{i2} = f_c + f_i = 1007 \text{ kHz}$$

Y la señal interferente se puede poner como:

$$y_i(t) = 2 \cdot 20 \cdot 10^{-6} \cdot \cos(2\pi f_c t) \cdot \cos(2\pi f_i t)$$

A partir de la potencia de portadora transmitida, y teniendo en cuenta la atenuación del medio, sacamos la amplitud de la AM recibida:

$$p_c = \frac{100}{10^{10}} = 10^{-8} \text{ W}$$

$$10^{-8} = \frac{A^2}{2 \cdot 50}$$

$$A = 10^{-3} \text{ V}$$

De manera que la AM recibida es:

$$y_{AM}(t) = 10^{-3} [1 + 0,6 x_n(t)] \cos(2\pi f_c t)$$

Al demodulador llega la suma de la AM y la interferencia:

$$y_T(t) = y_{AM}(t) + y_i(t)$$

$$y_T(t) = 10^{-3} [1 + 0,6 x_n(t) + 0,04 \cos(2\pi f_i t)] \cos(2\pi f_c t)$$

El detector de envolvente se queda con la envolvente (lo que acompaña al tono de portadora), y el cancelador de continua filtra la continua. Por lo tanto, a la salida del demodulador se obtiene:

$$d(t) = 10^{-3} [0,6 x_n(t) + 0,04 \cos(2\pi f_i t)]$$

Queda claro que el demodulador interpreta el tono interferente como parte de la información moduladora (aunque le ha cambiado la amplitud).

2. Potencia de señal deseada demodulada:

$$s = \frac{(10^{-3} \cdot 0,6)^2 \langle x_n^2 \rangle}{50}$$

Potencia de interferencia demodulada (es una senoide):

$$i = \frac{(10^{-3} \cdot 0,04)^2}{2 \cdot 50}$$

La relación de potencias es:

$$\frac{s}{i} = \frac{0,6^2 \cdot 0,35 \cdot 2}{0,04^2} = 157,5 \text{ v.p.}$$

$$\frac{S}{I} \approx 22,0 \text{ dB}$$

Problema 5.43 (Enero de 2007)

- 1.** La señal interferente es, claramente, la suma de dos sinusoides. Calculamos los parámetros a la entrada del receptor:

$$P_i = -79 - 2 \cdot 4 = -87 \text{ dBm} \rightarrow 2 \cdot 10^{-12} \text{ W}$$

$$2 \cdot 10^{-12} = \frac{A^2}{2 \cdot 50}$$

$$A = \sqrt{2} \cdot 10^{-5} \text{ V}$$

$$\text{Con: } f_c = 1350 \text{ kHz; } f_i = 6 \text{ kHz}$$

$$f_1 = f_c - f_i$$

$$f_2 = f_c + f_i$$

$$y_i(t) = \sqrt{2} \cdot 10^{-5} [\cos(2\pi f_1 t) + \cos(2\pi f_2 t)]$$

Que se puede poner como:

$$y_i(t) = \sqrt{2} \cdot 10^{-5} \cdot \cos(2\pi f_c t) \cdot \cos(2\pi f_i t)$$

2. A partir de la PEP calculamos el valor medio de la envolvente de AM en recepción:

$$\frac{PEP}{a_t} = \frac{A^2}{2R} (1+m)^2$$

$$\frac{3600}{4 \cdot 10^8} = \frac{A^2}{2 \cdot 50} 1,65^2$$

$$A = 18,18 \cdot 10^{-3} \text{ V}$$

La señal AM recibida es:

$$y_{AM}(t) = 18,18 \cdot 10^{-3} [1 + 0,64 x_n(t)] \cos(2\pi f_c t)$$

La señal total (AM + interferente) es:

$$y(t) = y_{AM}(t) + y_i(t)$$

$$y(t) = 18,18 \cdot 10^{-3} [1 + 0,65 x_n(t) + 1,556 \cdot 10^{-3} \cos(2\pi f_i t)] \cos(2\pi f_c t)$$

3. El detector de envolvente se queda con la envolvente, y el cancelador de continua elimina la continua (obvio, claro). La información demodulada, $d(t)$, incluye la moduladora AM (x_n) y el tono interferente:

$$d(t) = 18,18 \cdot 10^{-3} [0,65 x_n(t) + 1,556 \cdot 10^{-3} \cos(2\pi f_i t)]$$

4. Potencia de interferencia demodulada:

$$s_i = \frac{(1,556 \cdot 10^{-3})^2}{2 \cdot 50}$$

Potencia de información deseada demodulada:

$$s_d = \frac{0,65^2 \cdot 0,325}{50}$$

Relación de señal deseada a interferencia a la salida del demodulador:

$$\left(\frac{s_d}{s_i} \right)_s = 113481 \text{ v.p.} \rightarrow 50,5 \text{ dB}$$

5. Ruido total medido en el analizador:

$$N = -79 - 7 \cdot 4 = -107 \text{ dBm} \rightarrow 2 \cdot 10^{-14} \text{ W}$$

Calculamos la temperatura de ruido a la entrada:

$$T_e = 300 (100 - 1) = 29700 \text{ K}$$

$$N_0 = \frac{N}{RBW} = 2 \cdot 10^{-16} (\text{W/Hz}) = 1,38 \cdot 10^{-23} (T_{in} + 29700)$$

$$T_{in} = 14,46 \cdot 10^6 \text{ K}$$

6. El ruido a la entrada es el del apartado anterior, mientras que el ruido interno cambia (ahora tenemos un receptor en lugar de un analizador). La nueva densidad espectral de ruido es:

$$T_e = 300(20 - 1) = 5700 \text{ K}$$

$$N_0 = k(T_{in} + T_e) \approx kT_{in} \approx 2 \cdot 10^{-16} \text{ W/Hz}$$

Como no consideramos la interferencia, es una AM normal. Calculamos la calidad a la salida:

$$\eta = \frac{m^2 \langle x_n^2 \rangle}{1 + m^2 \langle x_n^2 \rangle} \approx 0,120734$$

$$p_R = \frac{A^2}{2R} [1 + m^2 \langle x_n^2 \rangle] = \frac{(18,18 \cdot 10^{-3})^2}{2 \cdot 50} [1 + 0,65^2 \cdot 0,325] = 3,7597 \cdot 10^{-6} \text{ W}$$

$$z = \frac{p_R}{N_0 W} = 1253 \cdot 10^3 \text{ v.p.}$$

$$\left(\frac{s}{n}\right)_s = 151,3 \cdot 10^3 \text{ v.p.} \rightarrow 51,8 \text{ dB}$$

Problema 5.44 (Junio de 2007)

1. Ancho de banda de predetección:

$$B_{AM} = 2 \cdot W = 2 \cdot 15(\text{k}) = 30 \text{ kHz}$$

Señal en el punto B (modulando con un tono coseno):

$$y_B(t) = A[1 + m \cdot \cos(2\pi f_m t)] \cos(2\pi f_c t)$$

Parámetros:

$$f_c = 300 \text{ MHz} \quad (\text{delta central})$$

$$f_m = 10 \text{ kHz} \quad (\text{distancia entre deltas contiguas})$$

$$m = 2 \cdot 10^{(-\Delta P/20)} = 2 \cdot 10^{(-20/20)} = 0,2 \quad (20 \%)$$

$$P_{cA} = 50 \text{ dBm} \Rightarrow p_{cA} = 100 \text{ W}$$

$$p_{cB} = \frac{p_{cA}}{a_t} = \frac{100}{10^{10}} = 10 \cdot 10^{-9} \text{ W}$$

$$p_{cB} = 10 \cdot 10^{-9} (\text{W}) = \frac{A^2}{2R} = \frac{A^2}{2 \cdot 50} \Rightarrow A = 10^{-3} \text{ V}$$

Potencia recibida:

$$P_{2blA} = 30(\text{dBm}) + 3(\text{dB}) = 33 \text{ dBm} \Rightarrow p_{2blA} \approx 2 \text{ W}$$

$$p_{2blB} = \frac{p_{2blA}}{a_t} = \frac{2}{10^{10}} = 0,2 \cdot 10^{-9} \text{ W}$$

$$p_B = p_{cB} + p_{2blB} = (10 + 0,2) \cdot 10^{-9} = 10,2 \cdot 10^{-9} \text{ W} \Rightarrow -49,9 \text{ dBm}$$

2. Las deltas se atenúan 100 dB. Ponemos RL en el nivel de la delta de portadora. Calculamos el nivel de ruido en el ancho de banda de resolución (RBW):

$$T_e = T_0(f_{anal} - 1) = 300(10^{3,38} - 1) \approx 300 \cdot 2,4 \cdot 10^3 = 720 \cdot 10^3 \text{ K}$$

$$N_0 = k(T_{in} + T_e) \approx k \cdot T_e = 9,936 \cdot 10^{-18} \text{ W/Hz}$$

$$N = 10 \log(N_0 \cdot RBW \cdot 1000) = 10 \log(9,936 \cdot 10^{-18} \cdot 1000 \cdot 1000) \approx -110 \text{ dBm}$$

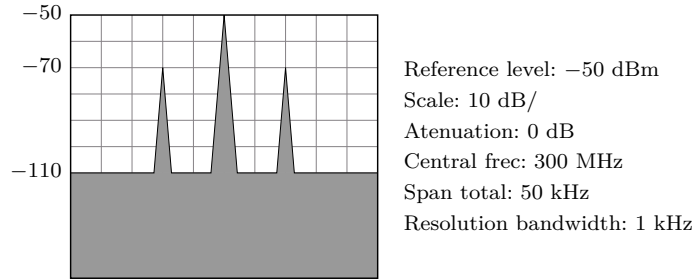


Figura 5.32: Medida en el punto B.

3. Calidad a la salida del demodulador:

$$z = \frac{p_{rx}}{N_0 W} = \frac{10,2 \cdot 10^{-9}}{9,936 \cdot 10^{-18} \cdot 15 \cdot 10^3} = 68,432 \cdot 10^3$$

$$\eta = \frac{m^2 \langle x_n^2 \rangle}{1 + m^2 \langle x_n^2 \rangle} = \frac{0,2^2 \cdot 0,5}{1 + 0,2^2 \cdot 0,5} \approx 0,0196$$

$$(s/n)_s = z \cdot \eta \approx 1,342 \cdot 10^3$$

$$\left(\frac{S}{N}\right)_s \approx 31,3 \text{ dB}$$

Problema 5.45 (Septiembre de 2007)

1. Con dos bandas laterales y sin portadora sola, la modulación ha de ser DBL. La portadora, equidistante entre las bandas laterales, vale 350 MHz. Y la moduladora es, obviamente, una senoide de 6 kHz.
2. El ancho de banda de la modulación es 12 kHz. La potencia total es la suma (en vatios) de las dos bandas laterales:

$$P_{DBL} = -30(\text{dBm}) + 3(\text{dB}) = -27 \text{ dBm} \rightarrow s = 2 \cdot 10^{-6} \text{ W}$$

A partir del nivel de ruido (potencia de ruido en el ancho de banda de resolución), sacamos la densidad espectral:

$$N = -90 \text{ dBm} \rightarrow n' = 10^{-12} \text{ W}$$

$$N_0 = \frac{n'}{RBW} = \frac{10^{-12}}{10^3} = 10^{-15} \text{ W/Hz}$$

Ahora calculamos la potencia de ruido con el ancho de banda equivalente de ruido:

$$n = N_0 \cdot B_{eq} = 10^{-15} \cdot 12 \cdot 10^3 = 12 \cdot 10^{-12} \text{ W}$$

La relación señal a ruido es:

$$\frac{s}{n} = \frac{2 \cdot 10^{-6}}{12 \cdot 10^{-12}} \approx 166,7 \cdot 10^3 \rightarrow 52,2 \text{ dB}$$

Problema 5.46 (Septiembre de 2007)

1. Calculamos la potencia recibida sumando las contribuciones importantes que se observan en el analizador. Luego, teniendo en cuenta la atenuación, pasamos a potencia transmitida:

Para $n = 0$: despreciable

Para $n = +1$: $P_1 \approx -78,5 \text{ dBm}$

Para $n = +2$: $P_2 \approx -79,5 \text{ dBm}$

Para $n = +3$: $P_3 \approx -87,5 \text{ dBm}$

Para $n = +4$: $P_4 \approx -96,5 \text{ dBm}$

$$p_R(\text{mW}) = 2 \left(10^{-7,85} + 10^{-7,95} + 10^{-8,75} + 10^{-9,65} \right) = 5,5 \cdot 10^{-8}$$

$$P_T = P_R + A_t = -72,6 + 120 = 47,4 \text{ dBm}$$

$$PEP = p_T = 55 \text{ W}$$

Leyendo en la pantalla obtenemos f_c y f_m :

$$f_c = 99,74 - 0,04 = 99,7 \text{ MHz}$$

$$f_m = \frac{40}{2} = 20 \text{ kHz}$$

Para calcular Δf podemos partir del ancho de banda de Carson, aproximándolo por una caída de 20 dB:

$$B_c \sim B_{20dB} = 4(\text{cuadros}) \cdot 40(\text{kHz/cuadro}) = 160 \text{ kHz}$$

$$B_c = 2(\Delta f + f_m)$$

$$160 \approx 2[\Delta f(\text{kHz}) + 20]$$

$$\Delta f \sim 60 \text{ kHz}$$

Pero este resultado es muy poco exacto. Es mejor tener en cuenta que la línea espectral a f_c es despreciable, lo que indica que $J_0(\beta)$ alcanza un nulo. Para el primer nulo:

$$\beta = 2,405$$

$$\Delta f = \beta \cdot f_m = 48,1 \text{ kHz}$$

$$B_c = 136,2 \text{ kHz}$$

Si probamos con el segundo nulo:

$$\beta = 5,520$$

$$\Delta f = \beta \cdot f_m = 110,4 \text{ kHz}$$

$$B_c = 260,8 \text{ kHz}$$

Lo que no se corresponde con la señal que hay en la pantalla del analizador. Por lo tanto: $\Delta f = 48,1 \text{ kHz}$.

2. Temperatura de ruido de la antena:

$$N = -122 \text{ dBm (marcador)}$$

$$n = 6,3096 \cdot 10^{-16} \text{ W}$$

$$T_e = 300 (10^{2,18} - 1) = 45107 \text{ K}$$

$$n = 6,3096 \cdot 10^{-16} = k (T_{in} + T_e) RBW = 1,3806 \cdot 10^{-23} (T_{in} + 45107) 1000$$

$$T_{in} = 595 \text{ K}$$

3. Ruido total equivalente a la entrada del receptor:

$$W = f_m = 20 \text{ kHz}$$

$$B_c = 136,2 \text{ kHz}$$

$$T_e = 300 (4 - 1) = 900 \text{ K}$$

$$n = k (T_{in} + T_e) B_c = 2,807 \cdot 10^{-15} \text{ W}$$

$$N = -115,5 \text{ dBm}$$

4. Valor umbral:

$$D = \frac{\Delta f}{W} = \frac{48,1}{20} = 2,405$$

$$z_u = 40 (D + 1) = 136,2 \text{ v.p.}$$

Parámetro z en el sistema:

$$N_0 = \frac{n}{B_c} = 2,064 \cdot 10^{-20} \text{ W/Hz}$$

$$z = \frac{p_R}{N_0 W} = \frac{55/10^{-11}}{2,064 \cdot 10^{-20} \cdot 20 \cdot 10^3} = 133236 \text{ v.p. (mayor que } z_u)$$

Calidad:

$$\left(\frac{s}{n} \right)_s = 3 \cdot D^2 \cdot \langle x_n^2 \rangle \cdot z \cdot M$$

$$\left(\frac{s}{n} \right)_s = 3 \cdot 2,405^2 \cdot 0,4 \cdot 133236 \cdot 8 = 7398172 \text{ v.p.}$$

$$\left(\frac{S}{N} \right)_s = 68,7 \text{ dB}$$

Problema 5.47 (Febrero de 2008)

De la diferencia en dB entre la potencia de la portadora sola y la potencia de una banda lateral sacamos el índice de modulación:

$$m = 2 \cdot 10^{-\Delta P(\text{dB})/20} = 2 \cdot 10^{-6/20} \approx 1 \text{ (100 \%)}$$

La señal que aparece en la pantalla (sin ruido) es:

$$y(t) = A [1 + m x_n(t)] \cos(\omega_c t) + A_i \cos(\omega_i t)$$

Donde:

$$m = 1 \text{ tanto por uno}$$

$$\omega_c = 2\pi f_c \text{ radianes}$$

$$f_c = 1003 \text{ kHz}$$

$$\omega_i = 2\pi f_i \text{ radianes}$$

$$f_i = 1009 \text{ kHz}$$

$$P_c = -60 \text{ dBm} \rightarrow 10^{-9} \text{ W}$$

$$A = \sqrt{2 R \cdot p_c} = \sqrt{2 \cdot 50 \cdot 10^{-9}} \approx 3,1623 \cdot 10^{-4} \text{ V}$$

$$P_i = -69 \text{ dBm} \rightarrow 1,2589 \cdot 10^{-10} \text{ W}$$

$$A_i = \sqrt{2 R \cdot p_i} \approx 1,1220 \cdot 10^{-4} \text{ V}$$

En la figura 5.33 se detallan las lecturas sobre la pantalla del analizador.

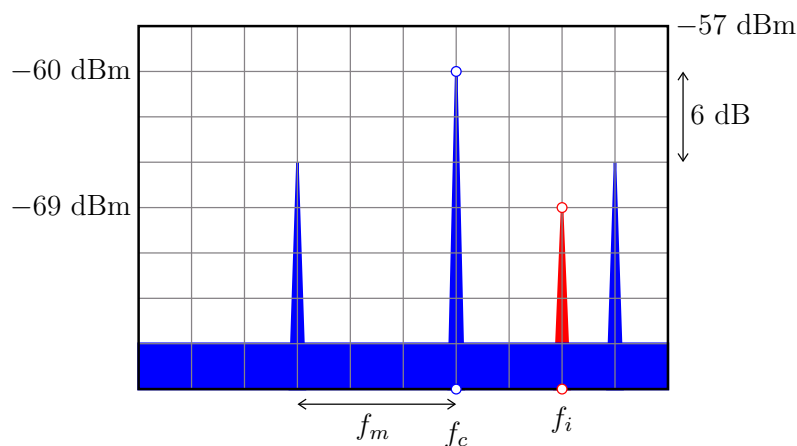


Figura 5.33: Lecturas sobre la pantalla del analizador.

Problema 5.48 (Febrero de 2008)

Densidad espectral de ruido:

$$T_e = T_0 (f - 1) = 300 (8 - 1) = 2100 \text{ K}$$

$$N_0 = k (T_{in} + T_e) = 1,38 \cdot 10^{-23} (6000 + 2100) = 1,1178 \cdot 10^{-19} \text{ W/Hz}$$

Potencia de ruido:

$$B_c = 2 (\Delta f + W) = 2 (75 + 15) (\text{k}) = 180 \text{ kHz}$$

$$n = N_0 B_c = 2,01 \cdot 10^{-14} \text{ W}$$

Sensibilidad:

$$p_u = 20 \cdot n = 4,024 \cdot 10^{-13} \text{ W} \rightarrow -94 \text{ dBm}$$

Problema 5.49 (Junio de 2008)

1. En el analizador vemos las dos bandas laterales y la portadora. Luego es AM. De la pantalla sacamos los datos para las potencias, el índice de modulación, las frecuencias portadora y moduladora, y el ancho de banda:

$$m = 2 \cdot 10^{-\frac{\Delta P(\text{dB})}{20}} = 2 \cdot 10^{-\frac{12}{20}} \approx 50 \%$$

$$P_c = 0 \text{ (dBm)} = 10 \log \left(\frac{A^2}{2R} 1000 \right) \rightarrow A^2 = 0,1 \text{ V} \rightarrow A \approx 0,316 \text{ V}$$

$$P_{1bl} = -12 \text{ dBm}$$

$$P_{2bl} = -12 + 3 = -9 \text{ dBm}$$

$$p_T = \frac{A^2}{2R} [1 + m^2 \langle x_n^2 \rangle] = \frac{0,1}{2 \cdot 50} [1 + 0,5^2 \cdot 0,5] = 1,125 \cdot 10^{-3} \text{ W}$$

$$P_T = 0,51 \text{ dBm}$$

$$PEP = \frac{A^2}{2R} [1 + m]^2 = \frac{0,1}{2 \cdot 50} [1 + 0,5]^2 \rightarrow PEP = 3,52 \text{ dBm}$$

$$\eta = \frac{m^2 \langle x_n^2 \rangle}{1 + m^2 \langle x_n^2 \rangle} = \frac{1}{9}$$

$$f_c = 200 \text{ MHz}$$

$$f_m = 5 \text{ kHz}$$

$$B = 2 \cdot W = 2 \cdot 10(\text{k}) = 20 \text{ kHz}$$

$$\text{Modulando con el tono: } B = 2 \cdot f_m = 2 \cdot 5(\text{k}) = 10 \text{ kHz}$$

2. Los filtros tienen que dejar pasar el ancho de banda de la modulación. El primer filtro (bloque 2) estará centrado a la frecuencia de portadora, y la frecuencia del oscilador local ha de ser tal que la señal modulada quede en 20 MHz.

$$B_2 = B_4 = B = 20 \text{ kHz}$$

$$f_2 = f_c = 200 \text{ MHz}$$

$$\pm f_{OL} \mp f_c = 20 \text{ MHz} \rightarrow f_{OL} = 220 \text{ MHz (o 180 MHz)}$$

3. Calculamos las temperaturas equivalentes de ruido de cada bloque:

$$T_{e1} = T_0 (f_1 - 1) = 300 (10 - 1) = 2700 \text{ K}$$

$$T_{e2} \approx 0 \text{ K}$$

$$T_{e3} = T_0 (f_3 - 1) = 300 (2 - 1) = 300 \text{ K}$$

$$T_{e4} = T_4 (a_4 - 1) = 350 (4 - 1) = 1050 \text{ K}$$

$$T_{e5} = T_0 (f_5 - 1) = 300 (20 - 1) = 5700 \text{ K}$$

La temperatura equivalente de ruido (interno) es:

$$T_e = T_{e1} + T_{e2} \frac{1}{g_1} + T_{e3} \frac{a_2}{g_1} + T_{e4} \frac{a_2 a_3}{g_1} + T_{e5} \frac{a_2 a_3 a_4}{g_1}$$

$$T_e = 2700 + 0 + 300 \frac{1}{100} + 1050 \frac{2}{100} + 5700 \frac{2 \cdot 4}{100} = 3180 \text{ K}$$

La temperatura de ruido total:

$$T_T = T_a + T_e = 1000 + 3180 = 4180 \text{ K}$$

La densidad espectral de ruido (total, equivalente) a la entrada del receptor vale:

$$N_0 = k \cdot T_T = 1,38 \cdot 10^{-23} \cdot 4180 = 5,77 \cdot 10^{-20} \text{ W/Hz}$$

4. Atenuación del medio:

$$A_t = 78 + 40 \log(2) = 90 \text{ dB}$$

Potencia recibida a la entrada del receptor:

$$p_R = \frac{p}{a_t} = \frac{1,125 \cdot 10^{-3}}{10^9} = 1,125 \cdot 10^{-12} \text{ W}$$

Parámetro z :

$$z = \frac{p_R}{N_0 \cdot W} = \frac{1,125 \cdot 10^{-12}}{5,77 \cdot 10^{-20} \cdot 10 \cdot 10^3} = 1950,3$$

Calidad final:

$$\left(\frac{s}{n} \right)_s = z \cdot \eta = 216,7 \rightarrow 23,4 \text{ dB}$$

Problema 5.50 (Septiembre de 2008)

1. Atenuación del medio en el extremo de la zona de cobertura:

$$A_t = 60 + 20 \log(100 \cdot 100) = 140 \text{ dB}$$

Parámetros de la FM:

$$M \approx \frac{1}{3 \left(\frac{f_{cc}}{W}\right)^2} = \frac{1}{3 \left(\frac{2,1}{15}\right)^2} \approx 17 \text{ v.p.}$$

$$D = \frac{\Delta f}{W} = \frac{75}{15} = 5$$

$$B_c = 2(\Delta f + W) = 180 \text{ kHz}$$

Densidad de ruido:

$$T_e = T_0(f - 1) = 300(4 - 1) = 900 \text{ K}$$

$$N_0 = k(T_{in} + T_e) = 1,38 \cdot 10^{-23} (300 + 900) = 1,656 \cdot 10^{-20} \text{ W/Hz}$$

Imponemos la calidad y sacamos la z necesaria:

$$\left(\frac{s}{n}\right)_s = 3 D^2 \langle x_n^2 \rangle z M$$

$$10^6 = 3 \cdot 5^2 \cdot 0,4 \cdot z \cdot 17$$

$$z = 1960,8 \text{ v.p.}$$

Verificamos que se trabaja por encima del umbral:

$$z_u = 40(D + 1) = 240 \text{ v.p. (OK)}$$

Por último, de z despejamos la potencia transmitida:

$$z = \frac{p_T/a_t}{N_0 W}$$

$$1960,8 = \frac{p_T/10^{14}}{1,656 \cdot 10^{-20} \cdot 15 \cdot 10^3}$$

$$p_T = PEP = 48,7 \text{ W} \rightarrow 46,9 \text{ dBm}$$

2. Vamos a resolver el apartado por dos caminos diferentes.

Primer camino: de la relación señal a interferencia sacamos la potencia interferente.

Por conveniencia, la modelamos como una temperatura.

$$p_R = \frac{p_T}{a_t} = 4,87 \cdot 10^{-13} \text{ W}$$

$$\left(\frac{S}{I}\right) = 23 \text{ dB} \rightarrow 200 = \frac{p_R}{i} = \frac{4,87 \cdot 10^{-13}}{i}$$

$$i = 2,435 \cdot 10^{-15} (\text{W}) = B_c N_{0i}$$

$$N_{0i} = 1,353 \cdot 10^{-20} (\text{W/Hz}) = k T_i$$

$$T_i = 980,3 \text{ K}$$

Ahora los contaminantes (ruido+interferencia) dan una densidad total:

$$N'_0 = k (T_a + T_i + T_e) = 3 \cdot 10^{-20} \text{ W/Hz}$$

Y el cambio de N_0 a N'_0 debe ser compensado con un cambio igual en la potencia de señal deseada:

$$\Delta P = 10 \log \left(\frac{N'_0}{N_0} \right) = 10 \log \left(\frac{3}{1,656} \right) = 2,58 \text{ dB}$$

Segundo camino: estudiamos el cambio en z . Se requiere una $z_{min} = 1960,8$ para la calidad de 60 dB. Pero ahora hay ruido (n) e interferencia (i).

$$\frac{1}{z_{min}} = \frac{1}{z_n} + \frac{1}{z_i}$$

$$\frac{(N_0 + N_{0i}) W}{p'_R} = \frac{1}{1960,8} = \frac{N_0 W}{p'_R} + \frac{N_{0i} W}{p'_R}$$

$$p'_R = \frac{(1,353 + 1,656) 10^{-20} \cdot 15 \cdot 10^3}{1/1960,8} = 8,82 \cdot 10^{-13} \text{ W}$$

$$\Delta P = 10 \log \left(\frac{8,82}{4,87} \right) = 2,58 \text{ dB}$$

Problema 5.51 (Septiembre de 2008)

Atenuación del medio:

$$A_t = 80 + 20 \log(24) \approx 107,6 \text{ dB}$$

Densidad de ruido:

$$T_e = 300 (8 - 1) = 2100 \text{ K}$$

$$N_0 = k (T_{in} + T_e) = 1,3806 \cdot 10^{-23} (900 + 2100) = 4,1418 \cdot 10^{-20} \text{ W/Hz}$$

Calidad a la salida (demodulador coherente):

$$\left(\frac{s}{n} \right)_s = z = \frac{p_T / a_t}{N_0 W} = \frac{10 / 10^{10,76}}{4,1418 \cdot 10^{-20} \cdot 20 \cdot 10^3} = 209800 \text{ v.p.}$$

$$\left(\frac{S}{N} \right)_s \approx 53,2 \text{ dB}$$

Problema 5.52 (Enero de 2009)

1. Mejora por pre-deénfasis:

$$M \approx \frac{1}{3 \left(\frac{f_{cc}}{W} \right)^2} = \frac{1}{3 \left(\frac{2,1}{15} \right)^2} \approx 17 \text{ v.p.}$$

Valor umbral de z :

$$D = \frac{\Delta f}{W} = \frac{75}{15} = 5$$

$$z_u = 40 (D + 1) = 240 \text{ v.p.}$$

Valor de z en el sistema:

$$T_e = 300 (4 - 1) = 900 \text{ K}$$

$$N_0 = k (T_{in} + T_e) \approx 4 \cdot 10^{-20} \text{ W/Hz}$$

$$z = \frac{p_T/a_t}{N_0 W} = \frac{80/(8 \cdot 10^{12})}{4 \cdot 10^{-20} \cdot 15 \cdot 10^3} = 16666.\hat{6} \text{ v.p. (mayor que } z_u)$$

Calidad a la salida:

$$\left(\frac{s}{n} \right)_s = 3 D^2 \langle x_n^2 \rangle z M$$

$$\left(\frac{s}{n} \right)_s = 3 \cdot 5^2 \cdot 0,325 \cdot 16666.\hat{6} \cdot 17 = 6906250 \text{ v.p.} \rightarrow 68,4 \text{ dB}$$

2. Nivel de ruido:

$$T_e = 300 (10^{0,81} - 1) \approx 1637 \text{ K}$$

$$N_0 = 1,3806 \cdot 10^{-23} (2000 + 1637) = 5,02 \cdot 10^{-20} \text{ W/Hz}$$

$$n = N_0 RBW \approx 10^{14} \text{ W} \rightarrow -110 \text{ dBm}$$

Señal recibida:

$$p_R = \frac{p_T}{a_t} = 10^{-11} \text{ W} \rightarrow -80 \text{ dBm}$$

Como la señal ocupa menos que el ancho de banda de resolución ($B_c = 180 \text{ kHz}$), toda la FM se visualiza como una gaussiana estrecha. En la figura 5.34 se observa la pantalla del analizador.

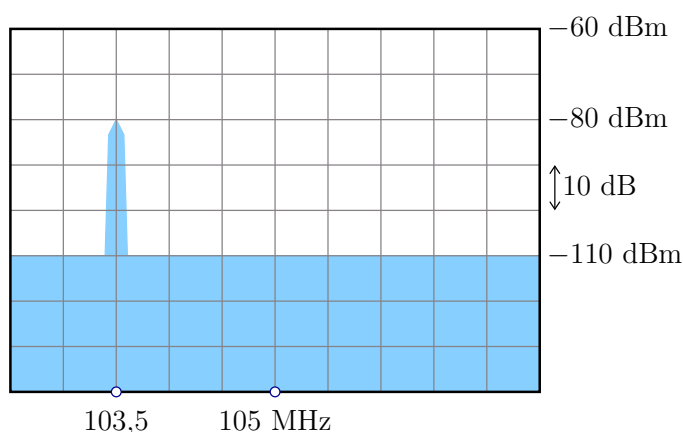


Figura 5.34: Señal FM y ruido en la pantalla del analizador.

Problema 5.53 (Junio de 2009)

Calculamos la Temperatura equivalente del receptor, a su entrada:

$$T_e = T_{e1} + \frac{T_{e3}}{g_1} + \frac{T_{e5} \cdot a_3}{g_1} + \frac{T_{e6} \cdot a_3}{g_1 \cdot g_5}$$

$$T_e = 300 (10^{0,2} - 1) + \frac{300 (4 - 1)}{100} + \frac{300 (2 - 1) \cdot 4}{100} + \frac{300 (10^{1,7} - 1) \cdot 4}{100 \cdot 100}$$

$$T_e = 202,36 \text{ K}$$

Calculamos la potencia de ruido. Nótese que usamos el ancho de banda de una emisora de FM, y no el ancho de banda del conjunto de emisoras, ya que la sensibilidad está ligada al buen funcionamiento final del sistema, que es un parámetro que depende de la demodulación de una única emisora.

$$N_0 = k (T_{in} + T_e) = 1,3806 \cdot 10^{-23} (6000 + 202,36) = 8,5630 \cdot 10^{-20} \text{ W/Hz}$$

$$B_c = 2 (\Delta f + W) = 2 (75 + 15) (\text{k}) = 180 \text{ kHz}$$

$$n = N_0 B_c = 1,5413 \cdot 10^{-14} \text{ W} \rightarrow -108,1 \text{ dBm}$$

Y la sensibilidad es:

$$S = N + 13 = -95,1 \text{ dBm} \rightarrow 3,1 \cdot 10^{-13} \text{ W}$$

Problema 5.54 (Junio de 2009)

1. Para el filtro de predetección, la frecuencia central es la de portadora, y el ancho de banda el de la modulación lineal. Para el filtro de postdetección, el ancho de banda es el de la moduladora.

$$f_2 = 150 \text{ MHz}$$

$$B_2 = 2 \cdot W = 2 \cdot 2,5 = 5 \text{ kHz}$$

$$W = 2,5 \text{ kHz}$$

2. Como la ganancia del amplificador es alta, podemos despreciar el resto de las contribuciones de ruido. Por lo tanto, la temperatura equivalente del receptor es:

$$T_e = T_{e1} + T_{e2}/g_1 + T_{e3} \cdot a_2/g_1 \approx T_{e1}$$

$$T_e \approx T_{e1} = T_0 (f_1 - 1) = 300 (8 - 1) = 2100 \text{ K}$$

La densidad espectral total de ruido tiene 2 contribuciones: ruido a la entrada, T_{in} , y ruido interno, T_e :

$$N_0 = k (T_{in} + T_e) = 1,3806 \cdot 10^{-23} (2900 + 2100) = 6,903 \cdot 10^{-20} \text{ W/Hz}$$

A partir de la temperatura equivalente de ruido del filtro de predetección, T_{e2} , y su expresión para un atenuador, despejamos la temperatura física, T_2 :

$$T_{e2} = T_2 (a_2 - 1)$$

$$900 = T_2 (4 - 1)$$

$$T_2 = 300 \text{ K}$$

3. La eficiencia respecto a la portadora es:

$$\eta = \frac{m^2 \langle x_n^2 \rangle}{1 + m^2 \langle x_n^2 \rangle} = \frac{0,5^2 \cdot 0,5}{1 + 0,5^2 \cdot 0,5} = 0,1$$

Calculamos el parámetro z (a la entrada del receptor):

$$z = \frac{p_{RX}}{N_0 \cdot W} = \frac{100/10^{10}}{6,903 \cdot 10^{-20} \cdot 2,5 \cdot 10^3} \approx 57,946 \cdot 10^6 \text{ v.p.}$$

La calidad final es:

$$(s/n)_o = z \cdot \eta \approx 6,4384 \cdot 10^6 \text{ v.p.}$$

$$(S/N)_o \approx 68,1 \text{ dB}$$

4. Calculamos las potencias:

$$p_{RX} = \frac{p_{TX}}{a_t} = \frac{A^2}{2R} [1 + m^2 \langle x_n^2 \rangle]$$

$$\frac{100}{10^{10}} = 10^{-8} = \frac{A^2}{2 \cdot 50} [1 + 0,5^2 \cdot 0,5]$$

$$A \approx 9,43 \cdot 10^{-4} \text{ V}$$

$$p_c = \frac{A^2}{2R} \approx 8,89 \cdot 10^{-9} \text{ W} \Rightarrow -50,5 \text{ dBm}$$

$$p_{1BL} = \frac{1}{2} \cdot \frac{A^2}{2R} m^2 \langle x_n^2 \rangle \approx 5,56 \cdot 10^{-10} \text{ W} \Rightarrow -62,5 \text{ dBm}$$

Calculamos el nivel de ruido, sobre el ancho de banda de resolución:

$$n = k (T_{in} + T_e) RBW \approx k \cdot T_e \cdot RBW$$

$$n = 1,3806 \cdot 10^{-23} \cdot 2 \cdot 10^7 \cdot 1000 = 2,76 \cdot 10^{-13} \text{ W} \Rightarrow -95,6 \text{ dBm}$$

5. Para dibujar la pantalla del analizador de la figura 5.35 se ha tenido en cuenta que una delta se representa ocupando el ancho de banda de resolución; es decir: en una caída de 3 dB, ocupa 1 kHz.

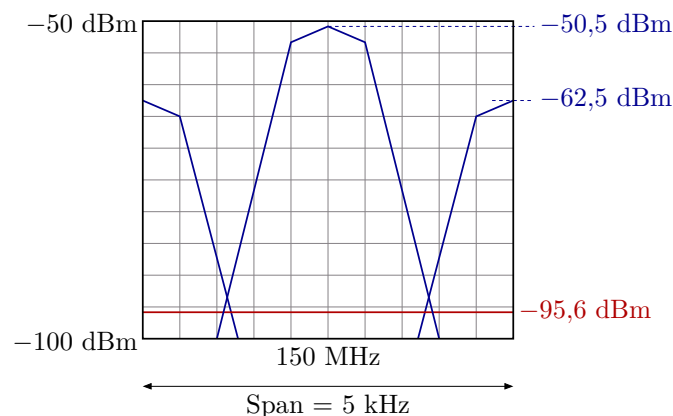


Figura 5.35: Señal AM en la pantalla del analizador.

Problema 5.55 (Septiembre de 2009)

1. Calculamos el ruido:

$$T_e = T_0 (f - 1) = 300 (2 - 1) = 300 \text{ K}$$

$$N_0 = k (T_{in} + T_e) = 1,3806 \cdot 10^{-23} (300 + 300) = 8,2836 \cdot 10^{-21} \text{ W/Hz}$$

Estudiamos la DBL:

$$\left(\frac{s}{n} \right)_s = z = \frac{p_T/a_t}{N_0 W}$$

$$10^5 = \frac{p_T / (4 \cdot 10^{10})}{8,2836 \cdot 10^{-21} \cdot 5 \cdot 10^6}$$

$$p_T = 165,672 \text{ W} \rightarrow 52,2 \text{ dBm}$$

$$PEP = \frac{p_T}{\langle x_n^2 \rangle} = 276,12 \text{ W} \rightarrow 54,4 \text{ dBm}$$

Estudiamos la AM:

$$\eta = \frac{m^2 \langle x_n^2 \rangle}{1 + m^2 \langle x_n^2 \rangle} = \frac{0,8^2 \cdot 0,6}{1 + 0,8^2 \cdot 0,6} = 0,277457$$

$$\left(\frac{s}{n} \right)_s = \eta z = \eta \frac{p_T / a_t}{N_0 W}$$

$$p_T = 597,1095 \text{ W} \rightarrow 57,8 \text{ dBm}$$

$$PEP = \frac{(1 + m)^2}{1 + m^2 \langle x_n^2 \rangle} p_T = \frac{(1 + 0,8)^2}{1 + 0,8^2 \cdot 0,6} p_T$$

$$PEP = 1397,857 \text{ W} \rightarrow 61,5 \text{ dBm}$$

Estudiamos la FM:

$$M \approx \frac{1}{3 \left(\frac{0,9}{5} \right)^2} = 10,28807 \text{ v.p.}$$

$$D = \frac{\Delta f}{W} = \frac{8,5}{5} = 1,7$$

$$\left(\frac{s}{n} \right)_s = 3 D^2 \langle x_n^2 \rangle z M$$

$$10^5 = 3 \cdot 1,7^2 \cdot 0,6 \frac{p_T / (4 \cdot 10^{10})}{8,2836 \cdot 10^{-21} \cdot 5 \cdot 10^6} 10,28807$$

$$p_T = PEP = 3,0956 \text{ W} \rightarrow 34,9 \text{ dBm}$$

$$z_u = 40 (D + 1) = 108 \text{ v.p.}$$

$$z = 1868,5 \text{ v.p.} > z_u \text{ (OK)}$$

2. Anchos de banda:

$$B_{DBL} = B_{AM} = 2W = 10 \text{ MHz}$$

$$B_{FM} = B_c = 2(\Delta f + W) = 27 \text{ MHz}$$

3. Características de cada modulación (con igual calidad, etc.):

- FM: menor potencia, mayor ancho de banda. No es necesaria la detección coherente.
- AM: mayor potencia, menor ancho de banda. Se puede demodular con detector de envolvente (no coherente).
- DBL: potencia intermedia, igual ancho de banda que AM. Necesita demodulación coherente.

Por lo tanto, en resumen: si la limitación es de potencia, mejor FM; si la limitación es de ancho de banda AM o DBL; si no quiero demodulador coherente no sirve DBL.

Problema 5.56 (Junio de 2010)

1. Cálculos de apoyo:

$$f_c = 1500 \text{ kHz (CF + 2 div.)}$$

$$f_c - f_m = 1490 \text{ kHz (CF)}$$

$$f_c + f_m = 1510 \text{ kHz (CF + 4 div.)}$$

$$p_c = \frac{A^2}{2R} = \frac{10^{-4}}{2 \cdot 50} = 10^{-6} \text{ W} \rightarrow -30 \text{ dBm}$$

$$p_{1bl} = \frac{1}{2} p_c m^2 \langle x_n^2 \rangle = 0,5 \cdot 10^{-6} \cdot 0,8^2 \cdot 0,5 = 1,6 \cdot 10^{-7} \text{ W} \rightarrow -38 \text{ dBm}$$

En la figura 5.36 se observa la pantalla de analizador resultante.

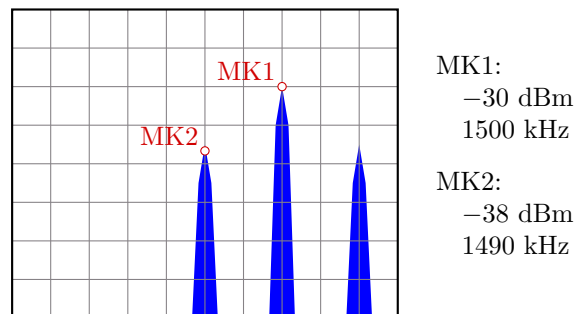


Figura 5.36: Señal AM en la pantalla del analizador.

2. Diferencias entre los marcadores (es lo que se conoce como *marker delta*):

$$\Delta f = |MK1(f) - MK2(f)| = 0,01 \text{ MHz}$$

$$\Delta P = |MK1(P) - MK2(P)| = 8 \text{ dB}$$

3. A partir de la señal en el analizador, $y(t)$, sacamos los valores de la señal transmitida, $y_T(t)$:

$$P_{cT} = -30 + 86 = 56 \text{ dBm} \rightarrow 400 \text{ W}$$

$$P_{2blT} = -38 + 3 + 86 = 51 \text{ dBm} \rightarrow 126 \text{ W}$$

$$p_T = 400 + 126 = 526 \text{ W}$$

Potencia recibida en el demodulador:

$$p_R = \frac{p_T}{a_t} = \frac{526}{10^{10}} = 5,26 \cdot 10^{-8} \text{ W}$$

Ruido a la entrada del demodulador:

$$T_e = T_0 (f - 1) = 300 (100 - 1) = 29700 \text{ K}$$

$$N_0 = k (T_{in} + T_e) \approx 8,24 \cdot 10^{-19} \text{ W/Hz}$$

Calidad a la entrada del demodulador:

$$\left(\frac{s}{n}\right)_e = \frac{z}{2} = \frac{p_R}{N_0 2W} = \frac{5,26 \cdot 10^{-8}}{8,24 \cdot 10^{-19} \cdot 2 \cdot 20 \cdot 10^3} = 1,6 \cdot 10^6 \text{ v.p.} \rightarrow 62 \text{ dB}$$

4. Calidad a la salida del demodulador:

$$\eta = \frac{m^2 \langle x_n^2 \rangle}{1 + m^2 \langle x_n^2 \rangle} = \frac{0,8^2 \cdot 0,5}{1 + 0,8^2 \cdot 0,5} = 0,24 \text{ (tanto por 1)}$$

$$\left(\frac{s}{n}\right)_s = \eta \cdot z = 0,24 \cdot 2 \cdot 1,6 \cdot 10^6 = 776 \cdot 10^3 \text{ v.p.} \rightarrow 58,9 \text{ dB}$$

5. Respuestas a las cuestiones:

- Índice de modulación: $m = 0,8$ (80 %).
- Potencia equivalente de pico:

$$PEP = p_T (1 + m)^2 = 400 \cdot 1,8^2 = 1296 \text{ W} \rightarrow 61,1 \text{ dBm}$$

- Eficiencia en potencia: $\eta = 24,24$ %.

Problema 5.57 (Julio de 2010)

1. La forma canónica de una señal DBL modulada por un tono es:

$$y(t) = A_t \cdot \cos(\omega_m t) \cdot \cos(\omega_c t)$$

Donde:

$$\omega_m = 2\pi f_m ; f_m = 4 \cdot 10^3 \text{ Hz}$$

$$\omega_c = 2\pi f_c ; f_c = 500 \cdot 10^6 \text{ Hz}$$

La potencia transmitida es de -53 dBm, aproximadamente 200 W. Calculamos la amplitud total:

$$p_{TX} = \frac{A_t^2}{2R} \langle x_n^2 \rangle$$

$$200 = \frac{A_t^2}{2 \cdot 50} \cdot \frac{1}{2} \Rightarrow A_t = 200 \text{ V}$$

2. Por ser una modulación lineal, con moduladora sinusoidal:

$$B = 2W = 2f_m = 2 \cdot 4(\text{k}) = 8 \text{ kHz}$$

3. La potencia transmitida es la potencia de las 2 bandas laterales. Cada banda tendrá la mitad de potencia.

$$P_{2bl} = P_{TX} = 53 \text{ dBm}$$

$$P_{1bl} = P_{2bl} - 3(\text{dB}) = 50 \text{ dBm}$$

La PEP vale:

$$PEP = A_t^2 / (2R)$$

Luego tiene 3 dB más que la potencia transmitida (por ausencia del término $\langle x_n^2 \rangle$):

$$PEP = P_{TX} + 3(\text{dB}) = 56 \text{ dBm}$$

4. Potencia recibida:

$$P_{RX} = P_{TX} - A = 53 - 100 = -47 \text{ dBm} \Rightarrow p_{RX} \approx 2 \cdot 10^{-8} \text{ W}$$

Calidad equivalente a la entrada del demodulador:

$$(s/n)_e = z/2$$

$$z = \frac{p_{RX}}{N_0 \cdot W} = \frac{2 \cdot 10^{-8}}{2 \cdot 10^{-15} \cdot 4 \cdot 10^3} = 2500 \rightarrow 34 \text{ dB}$$

$$(S/N)_e = 34 - 3 = 31 \text{ dB}$$

5. Calidad final:

$$(S/N)_s = Z = 34 \text{ dB}$$

6. La contribución de temperatura a la entrada es despreciable. Primero calculamos la densidad espectral de ruido, y luego el nivel de potencia de ruido (filtrando a través del ancho de banda de resolución):

$$N_0 = k(T_{IN} + T_e) \approx k \cdot T_e = 1,38 \cdot 10^{-23} \cdot 14,5 \cdot 10^6 = 2 \cdot 10^{-16} \text{ W/Hz}$$

$$n = N_0 \cdot RBW = 2 \cdot 10^{-16} \cdot 500 = 10^{-13} \text{ W} \Rightarrow N = -100 \text{ dBm}$$

La potencia media recibida es de -47 dBm . Luego cada banda lateral tendrá la mitad de potencia; es decir: habrá 2 deltas de -50 dBm , en las frecuencias $f_c + f_m$ y $f_c - f_m$.

En la figura 5.37 se observa la pantalla del analizador con la señal DBL y el ruido. Las deltas de la modulación deberían ocupar el ancho de banda de resolución (500 Hz) cuando caen 3 dB respecto a su valor máximo.

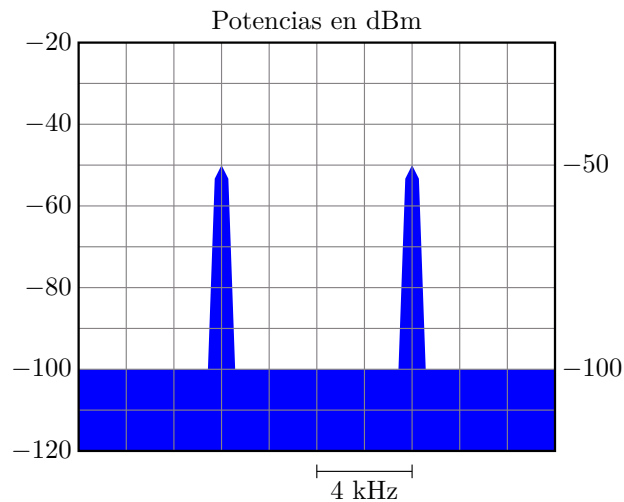


Figura 5.37: Señal DBL en la pantalla del analizador.

7. En la detección se mezclan la señal recibida y la portadora recuperada:

$$y_R(t) = A_R \cdot x_n(t) \cdot \cos(2\pi f_c t)$$

$$c(t) = \cos[2\pi(f_c + \delta f)t]$$

$$y_R(t) \cdot c(t) = \frac{A_R}{2} \cdot x_n(t) \cdot \left\{ \cos[2\pi(2f_c + \delta f)t] + \cos[2\pi(\delta f)t] \right\}$$

El coseno a $2f_c + \delta f$ se elimina con el filtro paso bajo de posdetección. Ahora sustituimos la moduladora por un tono a f_m :

$$\frac{A_R}{2} \cdot \cos(2\pi f_m t) \cdot \cos[2\pi(\delta f)t]$$

$$\frac{A_R}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \left\{ \cos[2\pi(f_m + \delta f)t] + \cos[2\pi(f_m - \delta f)t] \right\}$$

Y se aprecia claramente que la señal demodulada está formada por 2 tonos a $f_m + \delta f$ y $f_m - \delta f$, afectados por una constante $(1/2)$.

Si f_m es la frecuencia de corte del filtro de posdetección, quedará un único tono a frecuencia $f_m - \delta f$, con amplitud mitad (de la que debiera).

Problema 5.58 (Diciembre de 2010)

1. Las frecuencias de portadora y moduladora se leen en la pantalla del analizador:

$$f_c = 99,74(\text{M}) - 40(\text{k}) = 99,7 \text{ MHz}$$

$$f_m = \frac{40(\text{k})}{2} = 20 \text{ kHz}$$

Desviación máxima de frecuencia:

$$\Delta f = \beta \cdot f_m = 48,1 \text{ kHz}$$

Ancho de banda de Carson:

$$B_c = 2(48100 + 20000) = 136,2 \text{ kHz}$$

Ancho de banda a -20 dB :

$$B_{20} = 160 \text{ kHz (9 deltas)}$$

Vemos que los anchos de banda de Carson y a 20 dB son parecidos, pero no iguales.

Para calcular la potencia media tomaremos las 8 componentes más significativas (las componentes dentro de B_c). El resultado lo pasamos por el atenuador hacia atrás:

$$-78,5 \text{ dBm} \rightarrow p_1 = 14,14 \text{ pW}$$

$$-79,5 \text{ dBm} \rightarrow p_2 = 11,22 \text{ pW}$$

$$-87,0 \text{ dBm} \rightarrow p_3 = 2,0 \text{ pW}$$

$$-97,0 \text{ dBm} \rightarrow p_4 = 0,2 \text{ pW}$$

$$p_{TX} = 2(p_1 + p_2 + p_3 + p_4) a_t = 2(14,14 + 11,22 + 2,0 + 0,2) 10^9$$

$$p_{TX} = 55,1 \text{ mW} \rightarrow 17,4 \text{ dBm}$$

2. Parámetro z :

$$T_e = 300 (10^{0,7} - 1)$$

$$N_0 = k (T_{in} + T_e) = 2 \cdot 10^{-20} \text{ W/Hz}$$

$$z = \frac{p_{TX}/a_t}{N_0 W}$$

$$z = \frac{55,3 \cdot 10^{-3} / 10^{10,6}}{2 \cdot 10^{-20} \cdot 20 \cdot 10^3} = 3334 \text{ v.p.}$$

Valor umbral:

$$D = \frac{\Delta f}{W} = \frac{48,1}{20} = 2,405 = \beta$$

$$z_u = 40 (2,405 + 1) = 136,2 \text{ v.p. (OK)}$$

Calidad a la salida:

$$M \approx \frac{1}{3 \left(\frac{f_{cc}}{W}\right)^2} = \frac{1}{3 \left(\frac{3,5}{20}\right)^2} = 10,88$$

$$\left(\frac{s}{n}\right)_s = 3 \cdot D^2 \cdot \langle x_n^2 \rangle \cdot z \cdot M$$

$$\left(\frac{s}{n}\right)_s = 3 \cdot 2,405^2 \cdot 0,4 \cdot 3334 \cdot 10,88 = 252 \cdot 10^3 \text{ v.p.}$$

$$\left(\frac{S}{N}\right)_s = 54,0 \text{ dB}$$

Problema 5.59 (Diciembre de 2010)

1. Parámetros de la señal AM:

$$P_c = -20(\text{dBm}) = 10 \log [p_c(\text{mW})]$$

$$p_c = 10^{-5}(\text{W}) = \frac{A^2}{2R}$$

$$P_{1bl} = -40(\text{dBm}) = 10 \log [p_{1bl}(\text{mW})]$$

$$p_{2bl} = 2 \cdot p_{1bl} = 2 \cdot 10^{-7} \text{ W}$$

$$p_{AM} = p_c + p_{2bl} = 10,2 \cdot 10^{-6} \text{ W} \rightarrow P_{AM} \approx -19,91 \text{ dBm}$$

$$m = 2 \cdot 10^{-(\Delta P/20)} = 0,2 \rightarrow 20 \%$$

$$PEP = \frac{A^2}{2R} (1 + m)^2 = 10^{-5} (1 + 0,2)^2 = 1,44 \cdot 10^{-5} \text{ W} \rightarrow PEP \approx -18,41 \text{ dBm}$$

$$f_c = 150 \text{ MHz}$$

$$f_m = 16 \text{ kHz}$$

$$B = 2 \cdot f_m = 32 \text{ kHz}$$

2. La potencia de señal es p_{AM} ; la potencia de ruido la obtenemos multiplicando el nivel N_0 (W/Hz) por el ancho de banda de AM (Hz):

$$-90 \approx 10 \log [N_0(\text{mW}/3\text{kHz})]$$

$$N_0 = 10^{-9}(\text{mW}/3\text{kHz}) = \frac{1}{3} 10^{-15} \text{ W/Hz}$$

$$\left(\frac{S}{N}\right) = 10 \log \left[\frac{p_{AM}}{N_0 \cdot B} \right] = 10 \log \left[\frac{10,2 \cdot 10^{-6}}{\frac{1}{3} \cdot 10^{-15} \cdot 32 \cdot 10^3} \right] \approx 59,8 \text{ dB}$$

Problema 5.60 (Mayo de 2011)

De la PEP sacamos la potencia media transmitida. Pasamos a potencia media recibida, y sacamos las potencias de las dos bandas laterales de la DBL:

$$PEP = \frac{A^2}{2R} = 10 \text{ W}$$

$$p_T = \frac{A^2}{2R} \langle x_n^2 \rangle = PEP \cdot 0,5 = 5 \text{ W}$$

$$p_R = \frac{p_T}{a_t} = \frac{5}{4 \cdot 10^7} = 1,25 \cdot 10^{-7} \text{ W}$$

$$p_{1bl} = \frac{p_R}{2} = 6,25 \cdot 10^{-7} \text{ W} \rightarrow -42,0 \text{ dBm}$$

Las bandas laterales se encuentran en:

$$f_i = f_c - f_m = 700(\text{M}) - 15(\text{k}) = 699,985 \text{ MHz}$$

$$f_s = f_c + f_m = 700(\text{M}) + 15(\text{k}) = 700,015 \text{ MHz}$$

En la figura 5.38 se observa la pantalla del analizador, con las 2 bandas laterales de la DBL.

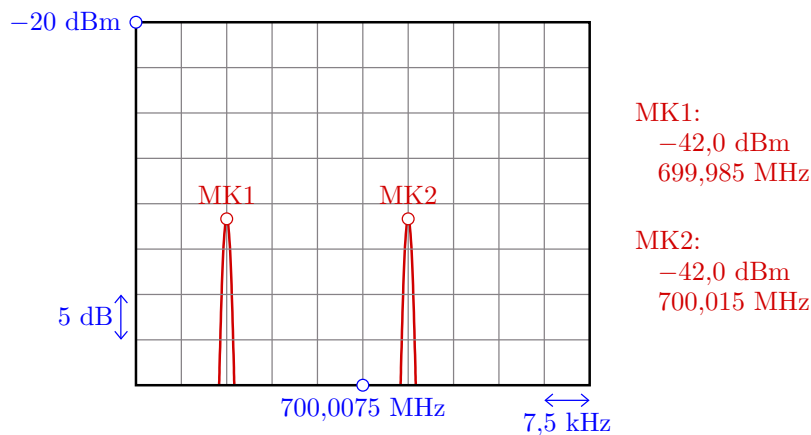


Figura 5.38: Señal DBL en la pantalla del analizador.

Problema 5.61 (Mayo de 2011)

1. Potencia media transmitida para FM:

$$p_y = PEP = 100 \text{ W}$$

Potencia media transmitida para AM:

$$PEP = \frac{A^2}{2R} (1 + m)^2$$

$$p_y = \frac{A^2}{2R} [1 + m^2 \langle x_n^2 \rangle]^2$$

$$p_y = PEP \frac{1 + m^2 \langle x_n^2 \rangle}{(1 + m)^2}$$

$$p_y = 100 \frac{1 + 1^2 \cdot 0,5}{(1 + 1)^2} = 37,5 \text{ W}$$

2. Las PEPs no cambian, pues no dependen de la información moduladora. Luego:

$$\Delta PEP(\text{FM}) = 0 \%$$

$$\Delta PEP(\text{AM}) = 0 \%$$

La potencia media de FM tampoco depende de la moduladora:

$$\Delta p_y(\text{FM}) = 0 \%$$

Calculamos la variación para potencia media de AM:

$$\langle x_n^2 \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} x^2 f_x(x) dx = 2 \int_0^1 x^2 (-x + 1) dx = 2 \left[-\frac{x^4}{4} + \frac{x^3}{3} \right]_0^1 = \frac{1}{6}$$

$$p'_y = 100 \frac{1 + 1/6}{(1 + 1)^2} = 29,1\hat{6} \text{ W}$$

$$\Delta p_y = \frac{p_y - p'_y}{p_y} = 0,2 \rightarrow 22,2 \% \text{ (disminuyendo)}$$

3. Atenuación del medio:

$$A_t = 27 + 20 \log [20] + 20 \log [10] = 73,0 \text{ dB} \rightarrow 20 \cdot 10^6 \text{ v.p.}$$

Calidad en FM:

$$D = \frac{32}{8} = 4$$

$$z_u = 40 (D + 1) = 200 \text{ v.p.}$$

$$z = \frac{p_R}{N_0 W} = \frac{20/(20 \cdot 10^6)}{10^{-13} \cdot 8 \cdot 10^3} = 1250 \text{ v.p.} > z_u$$

$$\left(\frac{s}{n}\right)_s = 3 D^2 \langle x_n^2 \rangle z = 3 \cdot 4^2 \cdot 0,5 \cdot 1250 = 30000 \text{ v.p.} \rightarrow 44,8 \text{ dB}$$

Calidad en AM:

$$\eta = \frac{m^2 \langle x_n^2 \rangle}{1 + m^2 \langle x_n^2 \rangle} = \frac{1^2 \cdot 0,5}{1 + 1^2 \cdot 0,5} = 0,3$$

$$\left(\frac{s}{n}\right)_s = \eta z = 416,6 \text{ v.p.} \rightarrow 26,2 \text{ dB}$$

Problema 5.62 (Junio de 2011)

1. La frecuencia portadora es $f_c = 250 \text{ MHz}$.

Como en FM la potencia no depende de la moduladora, usamos la señal recibida con el tono para calcular la potencia recibida. Luego llevamos la potencia al transmisor, sumando la atenuación del medio en dB.

$$p_R = \frac{A_R^2}{2R} = \frac{(10^{-3})^2}{2 \cdot 50} = 10^{-8} \text{ W} \rightarrow -50 \text{ dBm}$$

$$PEP = P_T = P_R + A = -50 + 100 = 50 \text{ dBm}$$

De la señal modulada con un tono sacamos la β . A partir de ahí, calculamos la desviación máxima de frecuencia, la relación de desviación y el ancho de banda.

$$\beta = 20 = \frac{\Delta f}{f_m} = \frac{\Delta f}{5 \cdot 10^3} \Rightarrow \Delta f = 100 \text{ kHz}$$

$$D = \frac{\Delta f}{W} = \frac{100}{20} = 5$$

$$B_c = 2(\Delta f + W) = 240 \text{ kHz}$$

2. Primero comprobamos que el sistema FM funciona. Calculamos el valor de $zeta$ umbral, y comparamos con la $zeta$ del sistema.

$$z_u = 40(D + 1) = 40(5 + 1) = 240 \text{ veces de pot.} \rightarrow 23,8 \text{ dB}$$

$$z = \frac{p_R}{N_0 W} = \frac{10^{-8}}{10^{-15} \cdot 20 \cdot 10^3} = 500 \text{ veces de pot.} > z_u$$

Ahora aplicamos la fórmula de la calidad en FM.

$$(s/n)_s = 3 \cdot D^2 \cdot \langle x_n^2 \rangle \cdot z = 3 \cdot 5^2 \cdot 0,1 \cdot 500 = 3750 \rightarrow 35,74 \text{ dB}$$

Y añadimos la mejora por preénfasis-deénfasis.

$$(S/N)_T = (S/N)_s + M = 35,74 + 15 = 50,74 \text{ dB}$$

3. La pantalla está centrada en la portadora. Como la moduladora es de 5 kHz, con un span total de 25 kHz caben 5 deltas, para los valores $n = 0, \pm 1, \pm 2$, y las deltas contiguas están separadas 2 cuadros.

En la gráfica de las funciones de Bessel leemos los valores $J_n(\beta)$, para $\beta = 20$ y $n = 0, +1, +2$ (los valores negativos tienen igual módulo):

$$J_0(20) \approx 0,1670$$

$$J_1(20) \approx 0,0668$$

$$J_2(20) \approx -0,1603$$

Ahora calculamos las potencias. Como el analizador muestra valores unilaterales, hallamos la contribución total de cada valor n .

$$y_{FM}(t) = A \sum_{n=-\infty}^{+\infty} J_n(\beta) \cos[(\omega_c + n\omega_n)t]$$

$$p_n = \frac{A^2 \cdot J_n^2(\beta)}{2R}$$

$$n = 0 \Rightarrow p_0 = \frac{(10^{-3})^2 \cdot 0,1670^2}{2 \cdot 50} \rightarrow -65,5 \text{ dBm}$$

$$n = 1 \Rightarrow p_1 = p_{-1} = \frac{(10^{-3})^2 \cdot 0,0668^2}{2 \cdot 50} \rightarrow -73,5 \text{ dBm}$$

$$n = 2 \Rightarrow p_2 = p_{-2} = \frac{(10^{-3})^2 \cdot 0,1603^2}{2 \cdot 50} \rightarrow -65,9 \text{ dBm}$$

Por último, en la figura 5.39, pintamos las 5 deltas:

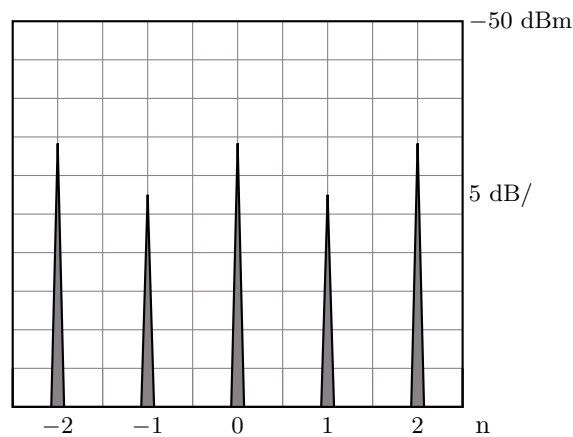


Figura 5.39: Pantalla del analizador.

Problema 5.63 (Julio de 2011)

1. Una señal BLU superior es:

$$s(t) = A \cos [2\pi(f_c + f_m)t]$$

En BLU modulando con un tono la PEP es la potencia media. Calculamos la amplitud:

$$PEP = p = \frac{A^2}{2R} = \frac{A^2}{2 \cdot 50} = 10^{-6} \text{ W} \Rightarrow A = 0,01 \text{ V}$$

De manera que la señal $s(t)$ en voltios, para t en segundos, es:

$$s(t) = 0,01 \cos [2\pi \cdot 140,01 \cdot 10^6 \cdot t]$$

2. La señal es un tono centrado en 140,01 MHz, con 1 μW , o -30 dBm . A partir de la relación señal a ruido sacamos la potencia de ruido:

$$(S/N) = 50 \text{ dB} \Rightarrow (s/n) = 10^5 = \frac{10^{-6}}{n(\text{W})} \Rightarrow n = 10^{-11} \text{ W}$$

Ahora calculamos la densidad espectral de ruido, teniendo en cuenta el ancho de banda de la modulación BLU:

$$n = N_0 \cdot B_{BLU} \Rightarrow 10^{-11} = N_0 \cdot 10 \cdot 10^3 \Rightarrow N_0 = 10^{-15} \text{ W/Hz}$$

El analizador mostrará el ruido de N_0 a través de RBW :

$$n' = N_0 \cdot RBW = 10^{-15} \cdot 4 \cdot 10^3 = 4 \cdot 10^{-12} \Rightarrow N' \approx -84 \text{ dBm}$$

Para dibujar la pantalla hay que tener en cuenta dos detalles: a) La resolución afecta al modo en que se visualiza la delta del tono, como RBW es de 4 kHz, la delta del tono será una gaussiana con caída a 3 dB de 4 kHz. b) La delta está centrada en 140,01 MHz. El resultado se observa en la figura 5.40.

Problema 5.64 (Julio de 2011)

1. Potencia media en A:

$$x(t) = x_p \cdot x_n(t)$$

$$\langle x^2 \rangle = x_p^2 \cdot \langle x_n^2 \rangle = 0,6^2 \cdot 0,2 = 0,072$$

$$p_x = \frac{\langle x^2 \rangle}{R} = \frac{0,072}{50} = 1,44 \text{ mW}$$

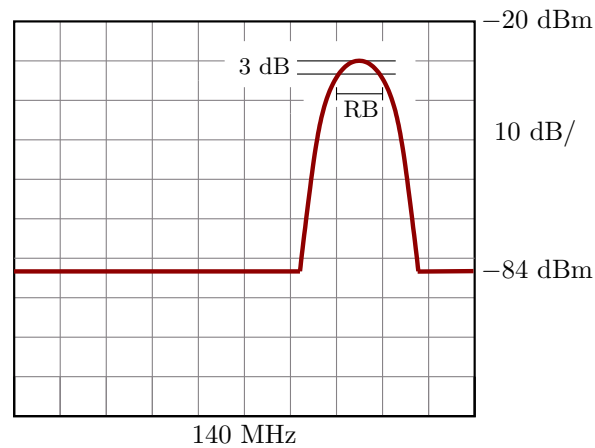


Figura 5.40: Pantalla del analizador.

2. Señal temporal en B:

$$y_B(t) = x_p \cdot x_n(t) \cdot g_c \cdot c(t) + g_c \cdot c(t)$$

$$y_B(t) = x_p \cdot x_n(t) \cdot 10 \cdot \cos(\omega_c t) + 10 \cdot \cos(\omega_c t)$$

$$y_B(t) = 10 \cdot [1 + 0,6 \cdot x_n(t)] \cdot \cos(\omega_c t)$$

Es una modulación AM. Parámetros:

$$\text{Moduladora: } x(t) = x_p \cdot x(t)$$

$$A = 10 \text{ V}$$

$$m = 0,6 \text{ (60 \%)}$$

$$B_B = 2 \cdot W_A = 2 \cdot 3 = 6 \text{ kHz}$$

$$p_B = \frac{A^2}{2R} \cdot [1 + m^2 \langle x_n^2 \rangle] = \frac{10^2}{2 \cdot 50} \cdot [1 + 0,6^2 \cdot 0,2] = 1,072 \text{ W}$$

$$PEP_B = \frac{A^2}{2R} \cdot (1 + m)^2 = \frac{10^2}{2 \cdot 50} \cdot (1 + 0,6)^2 = 2,56 \text{ W}$$

3. Temperatura equivalente del receptor (en D):

Como $G_R \uparrow \uparrow$ sólo influye el amplificador

$$T_{eD} \approx T_{eR} = T_0 \cdot (f_R - 1) \approx 300 \cdot (4 - 1) = 900 \text{ K}$$

Valores en el receptor:

$$f_{0f1} = f_c = 200 \text{ MHz}$$

$$f_{0f2} = \pm f_c \pm f_{OL}$$

$$10 = \pm 200 \pm f_{OL}$$

$$\text{Por ejemplo: } f_{OL} = 210 \text{ MHz}$$

$$B_{f1} = B_{f2} = B_{TX} = 2 \cdot B_A = 2 \cdot 3 = 6 \text{ kHz}$$

$$W_d = W_A = B_C = 3 \text{ kHz}$$

4. Calidad en I:

$$p_B = 1,072 \text{ W}$$

$$p_H = p_B \cdot \frac{g_T \cdot g_R}{a_t} = 1,072 \cdot \frac{g_T \cdot 10^4}{10^{15}} = 1,072 \cdot 10^{-11} \cdot g_T \text{ W}$$

$$N_{0H} = k \cdot (T_{IN} + T_{eD}) \cdot g_R = 1,3806 \cdot 10^{-23} \cdot (1000 + 900) \cdot 10^4 = 2,623 \cdot 10^{-16} \text{ W/Hz}$$

$$z = \frac{p_H}{N_{0H} \cdot W_A} = \frac{1,072 \cdot 10^{-11} \cdot g_T}{2,623 \cdot 10^{-16} \cdot 3 \cdot 10^3} = 13,62 \cdot g_T$$

$$\left(\frac{s}{n}\right)_{SI} = \frac{m^2 \langle x_n^2 \rangle}{1 + m^2 \langle x_n^2 \rangle} \cdot z \approx 0,915 \cdot g_T$$

$$\left(\frac{S}{N}\right)_{SJ} \approx -0,4 + G_T$$

Ganancia del amplificador del transmisor:

$$\left(\frac{S}{N}\right)_{SI} \geq 30 \text{ dB}$$

$$-0,4 + G_T \geq 30$$

$$G_T \leq 30,4 \text{ dB}$$

Problema 5.65 (Julio de 2011)

1. Potencia media de FM:

$$p = PEP = 1 \text{ kW} \rightarrow 60 \text{ dBm}$$

Potencia media de AM:

$$\langle x_n^2 \rangle = \int x^2 f_x(x) dx = 2 \int_{0,5}^1 x^2 (4x - 2) dx = 0,708\hat{3}$$

$$p = \frac{A^2}{2R} [1 + m^2 \langle x_n^2 \rangle]$$

$$PEP = \frac{A^2}{2R} (1 + m)^2$$

$$p = \frac{1 + m^2 \langle x_n^2 \rangle}{(1 + m)^2} PEP$$

$$p = \frac{1 + 0,9^2 \cdot 0,708\hat{3}}{(1 + 0,9)^2} 1000 \approx 435,94 \text{ W} \rightarrow 56,4 \text{ dBm}$$

Potencia de portadora sola (AM):

$$p_c = \frac{PEP}{(1 + m)^2} \approx 277,01 \text{ W} \rightarrow 54,4 \text{ dBm}$$

Potencia de una banda lateral (AM):

$$p_{1bl} = p_c \frac{1}{2} m^2 \langle x_n^2 \rangle \approx 79,47 \text{ W} \rightarrow 49,0 \text{ dBm}$$

Por supuesto, se cumple que (AM):

$$p = p_c + 2 p_{1bl}$$

2. Atenuación del medio:

$$A_t = 17 + 20 \log(500) + 20 \log(25) \approx 98,94 \text{ dB}$$

Calidad a la salida en FM:

$$D = \frac{\Delta f}{W} = \frac{8}{5}$$

$$\langle x_n^2 \rangle = 0,5$$

$$M = \frac{1}{3 \left(\frac{f_{cc}}{W} \right)^2} = \frac{1}{3 \left(\frac{0,75}{5} \right)^2} \approx 14,815 \text{ v.p.}$$

$$z = \frac{p_R}{N_0 W} = \frac{1000/10^{9,894}}{5 \cdot 10^{-18} \cdot 5 \cdot 10^6} \approx 5107,87 \text{ v.p.}$$

$$z_u = 40(D + 1) \approx 146,67 \text{ v.p. (OK)}$$

$$\left(\frac{s}{n} \right)_s = 3 D^2 \langle x_n^2 \rangle z M \approx 290581 \text{ v.p.} \rightarrow 54,6 \text{ dB}$$

Calidad a la salida en AM:

$$\eta = \frac{m^2 \langle x_n^2 \rangle}{1 + m^2 \langle x_n^2 \rangle} = \frac{0,9^2 \cdot 0,5}{1 + 0,9^2 \cdot 0,5} \approx 0,288256$$

$$p_T = \frac{1 + m^2 \langle x_n^2 \rangle}{(1 + m)^2} PEP = \frac{1 + 0,9^2 \cdot 0,5}{1,9^2} 1000 = 389,197 \text{ W}$$

$$z = \frac{p_R}{N_0 W} = \frac{389,197/10^{9,894}}{5 \cdot 10^{-18} \cdot 5 \cdot 10^6} = 1987,14 \text{ v.p.}$$

$$\left(\frac{s}{n} \right)_s = \eta \cdot z = 572,806 \text{ v.p.} \rightarrow 27,6 \text{ dB}$$

3. Para FM:

$$y(t) = A \cos[2\pi f_c t + \beta \sin(2\pi f_m t)]$$

$$A = \sqrt{2R \cdot p} = \sqrt{2 \cdot 50 \cdot 1000} \approx 316,228 \text{ V}$$

$$f_c = 500 \cdot 10^6 \text{ Hz}$$

$$f_m = 3 \cdot 10^6 \text{ Hz}$$

$$\beta = \frac{\Delta f}{f_m} = \frac{8}{3}$$

Para AM:

$$y(t) = A[1 + m \cos(2\pi f_m t)] \cos(2\pi f_c t)$$

$$m = 0,9$$

$$PEP = \frac{A^2}{2R} (1 + m)^2$$

$$1000 = \frac{A^2}{2 \cdot 50} 1,9^2$$

$$A \approx 166,436 \text{ V}$$

Problema 5.66 (Enero de 2012)

1. Parámetros del filtro paso banda:

$$\text{Para DBL y FM: } f_{02} = f_c = 200 \text{ MHz}$$

$$\text{Para DBL: } B_2 = 2W = 30 \text{ kHz}$$

$$\text{Para FM: } B_2 = 2(\Delta f + W) = 240 \text{ kHz}$$

2. Densidad espectral de ruido:

$$T_e = T_0 (f_1 - 1) = 300 (10 - 1) = 2700 \text{ K}$$

$$T_T = T_a + T_e = 2300 + 2700 = 5000 \text{ K}$$

$$N_0 = k T_T = 6,903 \cdot 10^{-20} \text{ W/Hz}$$

3. DBL:

$$\left(\frac{s}{n}\right)_s = z = \frac{p_R}{N_0 W}$$

$$10^5 = \frac{p_R}{6,903 \cdot 10^{-20} \cdot 15 \cdot 10^3}$$

$$p_R = 1,035 \text{ W} \rightarrow -69,8 \text{ dBm}$$

FM:

$$z_u = 40 (D + 1) = 40 (7 + 1) = 320 \text{ v.p.}$$

$$M \approx \frac{1}{3 \left(\frac{f_{cc}}{W}\right)^2} = \frac{1}{3 \left(\frac{5}{15}\right)^2} = 3$$

$$\left(\frac{s}{n}\right)_s = 10^5 = 3 \cdot D^2 \cdot \langle x_n^2 \rangle \cdot z \cdot M = 3 \cdot 7^2 \cdot 0,25 \cdot z \cdot 3$$

$$z = 907,03 \text{ v.p.} > z_u$$

$$p_R = 9,3918 \cdot 10^{-13} \text{ W} \rightarrow -90,3 \text{ dBm}$$

4. DBL:

$$a_t = 10^{14} \text{ v.p.}$$

$$p_T = p_R \cdot a_t = 10355 \text{ W} \rightarrow 70,2 \text{ dBm}$$

$$p_T = \frac{A^2}{2R} \langle x_n^2 \rangle = PEP \langle x_n^2 \rangle$$

$$PEP = \frac{p_T}{\langle x_n^2 \rangle} = 41418 \text{ W} \rightarrow 76,2 \text{ dBm}$$

FM:

$$p_T = PEP = p_R \cdot a_t = 93,92 \text{ W} \rightarrow 49,7 \text{ dBm}$$

5. A favor de la modulación angular: DBL requiere una mayor potencia transmitida; la diferencia es aún mayor para la PEP. A favor de la modulación lineal: FM ocupa un ancho de banda mucho mayor que DBL.

6. La señal DBL tiene la forma:

$$y(t) = A_t \langle x_n^2 \rangle \cos(\omega_c t)$$

Donde:

$$\omega_c = 2\pi f_c$$

$$f_c = 200 \cdot 10^6 \text{ Hz}$$

$$10355 = \frac{A_t'^2}{2 \cdot 50} 0,25$$

$$A_t' = 2035,13$$

$$A_t = \frac{A_t'}{10^{30/20}} = 64,36 \text{ V}$$

Problema 5.67 (Junio de 2012)

1. Ancho de banda del MDF:

$$W = 2000 \cdot 4(\text{k}) = 8 \text{ MHz}$$

Frecuencias de las portadoras DBL (y luego BLUs):

$$f_i(\text{kHz}) = (i - 1) 4; \quad i = 1, 2, \dots, 2000$$

2. Ancho de banda de la señal FM:

$$B_c = 2(\Delta f + W) = 2(10 + 8)(\text{M}) = 36 \text{ MHz}$$

3. Frecuencias centrales y anchos de banda de los filtros:

$$f_{01} = f_c = 1 \text{ GHz}$$

$$B_1 = B_c = 36 \text{ MHz}$$

$$f_{04} = FI = 140 \text{ MHz}$$

$$B_4 = B_c$$

Frecuencia del oscilador local:

$$f_{OL} = f_d + FI = 1140 \text{ MHz}$$

$$f_{OL} = f_d - FI = 860 \text{ MHz}$$

4. Potencia recibida:

$$P_R = P_T - A_t = 10 - 90 = -80 \text{ dBW} \rightarrow 10^{-8} \text{ W}$$

Potencia a la entrada del demodulador:

$$P_D = P_R - A_1 + G_2 - A_4 = -63,5 \text{ dBW}$$

5. Parámetro z :

$$T_{in} = 300 \text{ K}$$

$$T_{e1} = 300 (10^{0,15} - 1) \approx 123,76 \text{ K}$$

$$T_{e2} = 300 (10^{0,8} - 1) \approx 1597,87 \text{ K}$$

$$T_{e3} \approx 300 (2 - 1) = 300 \text{ K}$$

$$T_{e4} = 300 (10^{0,2} - 1) \approx 175,47 \text{ K}$$

$$T_e = T_{e1} + T_{e2} a_1 + T_{e3} \frac{a_1}{g_2} + T_{e4} \frac{a_1}{g_2} \approx 2387,5 \text{ K}$$

$$N_0 = k (T_{in} + T_e) = 3,7104 \cdot 10^{-20} \text{ W/Hz}$$

$$z = \frac{p_R}{N_0 W} = \frac{10^{-8}}{3,7104 \cdot 10^{-20} \cdot 8 \cdot 10^6} = 33689 \text{ v.p.}$$

$$z > z_u \quad (\text{no hay captura})$$

Calidad antes del demodulador:

$$D = \frac{\Delta f}{W} = \frac{10}{8}$$

$$\left(\frac{s}{n}\right)_e = \frac{z}{2(D+1)} = \frac{33689}{2[(10/8)+1]} = 7486,5 \text{ v.p.} \rightarrow 38,7 \text{ dB}$$

Calidad después del demodulador:

$$\langle x_n^2 \rangle (\text{MDF}) = 2000 \cdot 100 \cdot 10^{-6} = 0,2$$

$$\left(\frac{s}{n}\right)_s = 3 D^2 \langle x_n^2 \rangle z = 3 \cdot \left(\frac{10}{8}\right)^2 \cdot 0,2 \cdot 33689 = 31583,4 \text{ v.p.} \rightarrow 45,0 \text{ dB}$$

6. Después de demodular FM la calidad no es igual para todos los canales por culpa del ruido parabólico.
7. Frecuencia de corte de pre-deénfasis:

$$M = \frac{1}{3 \left(\frac{f_{cc}}{W} \right)^2}$$

$$10 = \frac{1}{3 \left(\frac{f_{cc}}{8} \right)^2}$$

$$f_{cc} \approx 1,46 \text{ MHz}$$

Problema 5.68 (Junio de 2012)

La señal en F, s_F , está compuesta por una parte en banda base, s_{BB} , un tono piloto, s_T , y una modulación DBL, s_{DBL} :

$$s_F = s_{BB} + s_T + s_{DBL}$$

La componente banda base es la suma de los canales izquierdo y derecho, a través de dos etapas de amplificación:

$$s_{BB} = \frac{1}{2} \cdot 0,9 \cdot [x_I + x_D]$$

El tono piloto es la senoide del oscilador local a través de una etapa de amplificación:

$$s_T = 0,1 \cdot \cos(2\pi \cdot 19 \cdot 10^3 \cdot t)$$

La señal DBL, con frecuencia doble del oscilador local, está modulada por la diferencia de los canales banda base amplificados, y pasa por otro amplificador más:

$$s_{DBL} = \frac{1}{2} \cdot 0,9 \cdot [x_I - x_D] \cdot \cos(2\pi \cdot 38 \cdot 10^3 \cdot t)$$

La potencia total en F será la suma de las contribuciones de los tres componentes. Hay que tener en cuenta la resistencia de carga, y si la señal es una senoide o está caracterizada por su valor cuadrático medio:

$$p_F = \frac{0,81}{4} \cdot \frac{0,35 + 0,35}{600} + \frac{0,01}{2 \cdot 600} + \frac{0,81}{4} \cdot (0,35 + 0,35) \cdot \frac{1}{2 \cdot 600}$$

$$p_F \approx 3,6271 \cdot 10^{-4} \text{ W} \quad \rightarrow \quad -4,4 \text{ dBm}$$

En la figura 5.41 se observa la densidad espectral unilateral de potencia en el punto F. Se han indicado los valores relevantes en f .

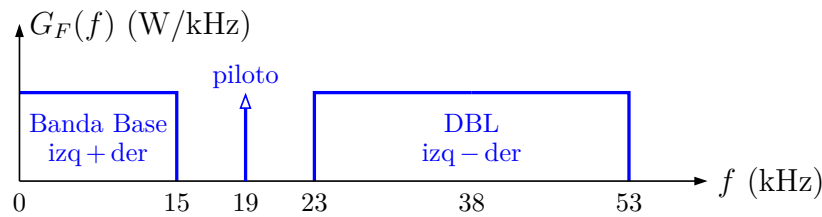


Figura 5.41: Densidad espectral de potencia en F.

Problema 5.69 (Junio de 2012)

1. Temperatura equivalente de ruido interno a la entrada del receptor:

$$T_{e1} = T_1 (a_1 - 1) = 300 (2 - 1) = 300 \text{ K}$$

$$T_{e2} = T_0 (f_2 - 1) = 300 (8 - 1) = 2100 \text{ K}$$

$$T_{e3} = 400 \text{ K}$$

$$T_{e4} = T_4 (a_4 - 1) = 300 (4 - 1) = 900 \text{ K}$$

$$T_{e5} = T_0 (f_5 - 1) = 300 (16 - 1) = 4500 \text{ K}$$

$$T_e = T_{e1} + a_1 T_{e2} + \frac{a_1}{g_2} T_{e3} + \frac{a_1}{g_2} T_{e4} + \frac{a_1 a_4}{g_2} T_{e5}$$

$$T_e = 300 + 2 \cdot 2100 + \frac{2}{1000} 400 + \frac{2}{1000} 900 + \frac{2 \cdot 4}{1000} 4500 = 4538,6 \text{ K}$$

2. Frecuencia centrales y anchos de banda:

$$f_1 = \frac{88 + 108}{2} = 98 \text{ MHz}$$

$$B_1 = 108 - 88 = 20 \text{ MHz}$$

$$f_4 = FI = 10,7 \text{ MHz}$$

$$B_4 = B_c = 2 (\Delta f + W) = 180 \text{ kHz}$$

Margen del oscilador local, para un superheterodino:

$$f_{OL(min)} = 88 + FI = 98,7 \text{ MHz}$$

$$f_{OL(max)} = 108 + FI = 118,7 \text{ MHz}$$

3. Densidad espectral de ruido:

$$N_0 = k (T_{in} + T_e) = 7,5085 \cdot 10^{-20} \text{ W/Hz}$$

Potencia media de FM recibida:

$$p_{mod} = \frac{A^2}{2R} = \frac{2^2}{2 \cdot 50} = 0,04 \text{ W}$$

$$p_{TX} = p_{mod} g_{TX} = 0,04 \cdot 100 = 4 \text{ W}$$

$$p_{RX} = \frac{p_{TX}}{a_t} = \frac{4}{10^{12,6}} = 10^{12} \text{ W}$$

Parámetro z :

$$z = \frac{p_{RX}}{N_0 W} = 887,88 \text{ v.p.}$$

Valor umbral:

$$D = \Delta f / W = 5$$

$$z_u = 40 (D + 1) = 240 \text{ v.p. (OK)}$$

Calidad a la entrada:

$$\left(\frac{s}{n}\right)_e = \frac{z}{2(D+1)} = 73,99 \text{ v.p.} \rightarrow 18,7 \text{ dB}$$

Calidad a la salida:

$$M = \frac{1}{3 \left(\frac{2,1}{15}\right)^2} = 17 \text{ v.p.}$$

$$\left(\frac{s}{n}\right)_s = 3 D^2 \langle x_n^2 \rangle z M = 3 \cdot 5^2 \cdot 0,5 \cdot 887,88 \cdot 17 = 566020 \text{ v.p.} \rightarrow 57,5 \text{ dB}$$

Problema 5.70 (Julio de 2012)

1. Temperatura equivalente de ruido interno:

$$T_{e1} = T_0 (f_1 - 1) = 300 (10^{0,15} - 1) \approx 123,8 \text{ K}$$

$$A_2 = \alpha_2 L_2 = 0,6 \cdot 25 = 15 \text{ dB}$$

$$T_{e2} = T_2 (a_2 - 1) = 300 (10^{1,5} - 1) \approx 9186,8 \text{ K}$$

$$T_{e3} = T_0 (f_3 - 1) \approx 300 (2 - 1) = 300 \text{ K}$$

$$T_e = T_{e1} + \frac{T_{e2}}{g_1} + \frac{T_{e3} a_2}{g_1}$$

$$T_e \approx 123,8 + \frac{9186,8}{100} + \frac{300 \cdot 31,623}{100} = 310,5 \text{ K}$$

Temperatura total equivalente de ruido:

$$T_T = T_a + T_e = 490 + 310,5 = 800,5 \text{ K}$$

2. Valores para el filtro:

$$f_{c3} = f_c = 500 \text{ MHz}$$

$$B_3 = 2 W = 50 \text{ kHz}$$

3. Potencia recibida en DBL:

$$\left(\frac{s}{n}\right)_s = 10^6 = z = \frac{p_R}{N_0 W} = \frac{p_R}{1,3806 \cdot 10^{-23} \cdot 800,5 \cdot 25 \cdot 10^3}$$

$$p_R = 2,7629 \cdot 10^{-10} \text{ W} \rightarrow -65,6 \text{ dBm}$$

Potencia recibida en AM:

$$\eta = \frac{m^2 \langle x_n^2 \rangle}{1 + m^2 \langle x_n^2 \rangle} = \frac{0,8^2 0,3}{1 + 0,8^2 0,3} \approx 0,16107$$

$$\left(\frac{s}{n}\right)_s = \eta z = \eta \frac{p_R}{N_0 W}$$

$$p_R(AM) = \frac{p_R(DBL)}{\eta} = 1,7153 \cdot 10^{-9} \text{ W} \rightarrow -57,7 \text{ dBm}$$

4. Ganancia del amplificador en DBL:

$$p_{mod} = 5 \text{ W} \rightarrow 37,0 \text{ dBm}$$

$$P_R = P_{mod} + G_T - A_t$$

$$-65,6 = 37 + G_T - 120$$

$$G_T = 17,4 \text{ dB}$$

Ganancia del amplificador en AM:

$$-57,7 = 37 + G_T - 120$$

$$G_T = 25,3 \text{ dB}$$

5. PEP a la salida en DBL:

$$P_T = P_{mod} + G_T = 37 + 17,4 = 54,4 \text{ dBm}$$

$$PEP = \frac{A^2}{2R}$$

$$p = \frac{A^2}{2R} \langle x_n^2 \rangle = PEP \langle x_n^2 \rangle$$

$$PEP = 54,4 - 10 \log(0,3) = 59,6 \text{ dBm}$$

PEP a la salida en AM:

$$P_T = 37 + 25,3 = 62,3 \text{ dBm}$$

$$PEP = \frac{A^2}{2R} (1 + m)^2$$

$$p = \frac{A^2}{2R} [1 + m^2 \langle x_n^2 \rangle]$$

$$PEP = p \frac{(1 + m)^2}{1 + m^2 \langle x_n^2 \rangle}$$

$$PEP 62,3 + 10 \log \left[\frac{(1 + 0,8)^2}{1 + 0,8^2 0,3} \right] = 66,6 \text{ dBm}$$

6. Mantener A implica mantener $A^2/(2R)$:

$$p_R = \frac{A^2}{2R} [1 + m^2 \langle x_n^2 \rangle]$$

$$-57,7 = \frac{A^2}{2R} (\text{dBm}) + 10 \log(1 + 0,8^2 0,3)$$

(Estamos en el caso anterior, con $\langle x_n^2 \rangle = 0,3$)

$$\frac{A^2}{2R} = -58,5 \text{ dBm}$$

Ahora es inmediato calcular la potencia de portadora sola y la de una banda lateral:

$$P_c = -58,5 \text{ dBm}$$

$$p_{1bl} = \frac{1}{2} p_c m^2 \langle x_n^2 \rangle$$

$$P_{1bl} = -58,5 + 10 \log\left(\frac{0,8^2 0,5}{2}\right) = -66,4 \text{ dBm}$$

(Con un tono normalizado $\langle x_n^2 \rangle = 0,5$)

En la figura 5.42 se observa cómo queda la pantalla del analizador.

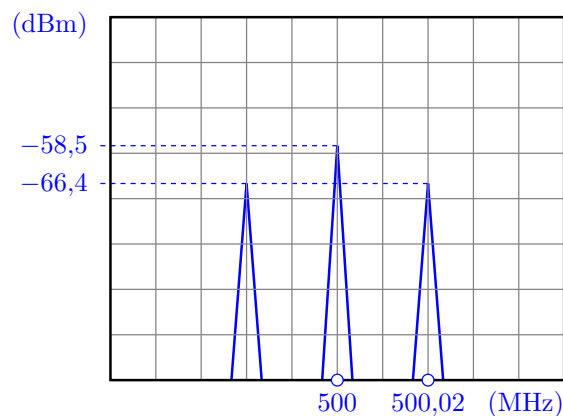


Figura 5.42: Medida del analizador.

Problema 5.71 (Julio de 2012)

1. Pasamos las potencias a W y sumamos:

$$\text{A } 20 \text{ MHz: } 26,9 \text{ dBm} \rightarrow 0,489779 \text{ W}$$

$$\text{A } 20,1 \text{ MHz: } 7,0 \text{ dBm} \rightarrow 0,005012 \text{ W}$$

$$\text{A } 20,2 \text{ MHz: } -19,0 \text{ dBm} \rightarrow 0,000013 \text{ W}$$

$$p = 0,489779 + 2 \cdot 0,005012 + 2 \cdot 0,000013 = 0,499829 \text{ W}$$

$$P \approx 27,0 \text{ dBm}$$

2. Señal modulada:

$$y(t) = A \cos [2\pi f_c t + \beta \sin(2\pi f_m t)]$$

$$A = \sqrt{2 R p} = \sqrt{2 \cdot 1 \cdot 0,499829} \approx 0,999829 \approx 1 \text{ V}$$

$$f_c = 20 \text{ MHz}$$

$$f_m = 100 \text{ kHz}$$

$$\beta = \frac{\Delta f}{f_m} = 0,2$$

3. Potencia de la delta centrada en 20,3 MHz:

$$p_i = \frac{A^2}{2R} J_3^2(\beta) \approx \frac{1^2}{2 \cdot 1} J_3^2(0,2) \approx 1,3820 \cdot 10^{-8} \text{ W}$$

$$P_i \approx -48,6 \text{ dBm}$$

Problema 5.72 (Enero de 2013)

1. En el espectro se observa que la J_1 se anula. Teniendo en cuenta el ancho de banda ocupado, ha de ser el primer nulo. Por lo tanto, el índice de modulación es:

$$J_1(\beta) = 0 \rightarrow \beta \approx 3,831706$$

(El valor se ha obtenido con MATLAB; consultando en las gráficas es imposible afinar tanto.)

Y ahora calculamos la desviación máxima de frecuencia:

$$\Delta f = \beta \cdot f_m \approx 76,63412 \text{ kHz}$$

2. Ancho de banda ocupado con una señal de 40 kHz:

$$B_c = 2(\Delta f + W) \approx 233,2682 \text{ kHz}$$

3. Aunque se puede resolver sumando los vatios de las deltas principales, es más cómodo y rápido trabajar con la potencia a la frecuencia de portadora, que es exactamente -30 dBm :

$$p_T = \frac{A^2}{2R}$$

$$p(f_c) = \frac{A^2}{2R} J_0^2(\beta)$$

$$P_T = P(f_c) - 10 \log[J_0^2(\beta)]$$

$$P_T = -30 - 10 \log[(-0,4027594)^2] \approx -22,1 \text{ dBm}$$

Problema 5.73 (Enero de 2013)

1. A la salida del modulador la señal es:

$$y(t) = A_c x(t) \cos(\omega_c t) = A_c A_m x_n(t) \cos(\omega_c t)$$

Que se corresponde con una señal modulada en DBL.

2. La señal DBL tiene un ancho de banda $2W = 16$ kHz, centrado en 40 MHz. El filtro paso banda del transmisor tiene un ancho de banda de 20 kHz y se encuentra centrado en 40 MHz. Queda, por tanto, un margen de guarda de 2 kHz, tanto por arriba como por abajo, lo que permite un error en la frecuencia del oscilador de ± 2 kHz, sin afectar al espectro de la señal transmitida.
3. Ganancia del amplificador del transmisor:

$$p_T = p_y \cdot g_T = \frac{A_c^2}{2} \cdot p_x \cdot g_T$$

$$G_T = P_T - P_x + 10 \log \left(\frac{2}{A_c^2} \right)$$

$$G_T = 30 - 0 + 10 \log \left(\frac{2}{0,1^2} \right) = 53 \text{ dBm}$$

4. La calidad a la salida en DBL es:

$$\left(\frac{s}{n} \right)_s = z = \frac{p_R}{N_0 W}$$

Calculamos la potencia recibida p_R :

$$G_R(f) = G_T(f) |H(f)|^2$$

$$p_R = \int_{-\infty}^{\infty} G_T(f) |H(f)|^2 df$$

Como la modulación es en banda estrecha, la respuesta del medio es aproximadamente constante en la banda de paso de la señal modulada. Siendo así, el módulo de $H(f)$ al cuadrado es aproximadamente constante e igual a su valor en $f = f_c$. En ese caso:

$$p_R = \int_{-\infty}^{\infty} G_T(f) |H(f)|^2 df \approx p_T |H(f_c)|^2$$

$$P_R = P_T + 10 \log [|H(f_c)|^2]$$

$$H(f_c) = \frac{10^{-5}}{1 + j}$$

$$|H(f_c)|^2 = \frac{10^{-10}}{2}$$

$$P_R = 30 - 103 = -73 \text{ dBm} \rightarrow 5 \cdot 10^{-11} \text{ W}$$

Ahora calculamos la densidad espectral unilateral de ruido, equivalente total, a la entrada del receptor. De nuevo, consideramos que la respuesta del medio es aproximadamente constante en toda la banda de paso e igual a su valor en f_c . A esa frecuencia la atenuación del cable es $A_m = 103$ dB, que en unidades naturales corresponde a $a_m = 2 \cdot 10^{10}$.

$$T_{eT} = T_0 (f_T - 1) \frac{g_T}{a_m} \ll 1 \text{ (despreciable)}$$

$$T_{em} = T_m (a_m - 1) \frac{1}{a_m} \approx T_m = 290 \text{ K}$$

$$T_{eR} = T_0 (f_R - 1) = 2082 \text{ K}$$

$$N_0 = k (T_{eT} + T_{em} + T_{eR}) = 3,275 \cdot 10^{-20} \text{ W/Hz} \rightarrow -194,8 \text{ dBW/Hz}$$

Y la calidad queda:

$$\left(\frac{S}{N}\right)_s = P_R - N_0 - 10 \log(W) = -103 + 194,8 - 10 \log(8 \cdot 10^3) = 52,8 \text{ dB}$$

5. De forma general, la señal recibida es:

$$y_R(t) = A_R x(t) \cos(\omega_c t)$$

Calculamos la amplitud de la señal recibida:

$$p_R = \frac{A_R^2}{2} p_x$$

$$A_R = 3,165 \cdot 10^{-4} \text{ V}$$

Y la señal recibida queda:

$$y_R(t) = 3,165 \cdot 10^{-4} x(t) \cos(2\pi \cdot 40 \cdot 10^6 t)$$

Problema 5.74 (Abril de 2013)

Cálculos de ruido:

$$T_{in} = T_0$$

$$N_0 = k T_0 f = 1,3806 \cdot 10^{-23} \cdot 300 \cdot 16 = 6,62688 \cdot 10^{-20} \text{ W/Hz}$$

Modulación DBL:

$$\left(\frac{s}{n}\right)_s = z = \frac{p_{RX}}{N_0 W}$$

$$4000 = \frac{p_{RX}}{6,62688 \cdot 10^{-20} \cdot 15 \cdot 10^3}$$

$$p_{RX} = 3,975 \cdot 10^{-12} \text{ W} \rightarrow -84 \text{ dBm}$$

$$P_{TX} = P_{RX} + A_t = -84 + 122 = 38 \text{ dBm} \rightarrow 6,31 \text{ W}$$

$$p_{TX} = \frac{A^2}{2R} \langle x_n^2 \rangle$$

$$6,31 = \frac{A^2}{2 \cdot 50} 0,22 \quad \rightarrow \quad A = 53,6 \text{ V}$$

Modulación AM:

$$\left(\frac{s}{n} \right)_s = \eta z$$

$$\eta = \frac{m^2 \langle x_n^2 \rangle}{1 + m^2 \langle x_n^2 \rangle} = \frac{0,9^2 \cdot 0,22}{1 + 0,9^2 \cdot 0,22} = 0,151248$$

$$4000 = 0,151248 \frac{p_{RX}}{6,62688 \cdot 10^{-20} \cdot 15 \cdot 10^3}$$

$$p_{RX} = 2,6289 \cdot 10^{-11} \text{ W} \quad \rightarrow \quad -75,8 \text{ dBm}$$

$$P_{TX} = P_{RX} + A_t = -75,8 + 122 = 46,2 \text{ dBm} \quad \rightarrow \quad 41687 \text{ W}$$

$$p_{TX} = \frac{A^2}{2R} [1 + m^2 \langle x_n^2 \rangle]$$

$$41,687 = \frac{A^2}{2 \cdot 50} [1 + 0,9^2 \cdot 0,22] \quad \rightarrow \quad A = 59,5 \text{ V}$$

Modulación FM:

$$B_c = 2(\Delta f + W)$$

$$180 = 2(\Delta f + 15) \quad \rightarrow \quad \Delta f = 75 \text{ kHz}$$

$$D = \frac{\Delta f}{W} = 5$$

$$z_u = 40(D + 1) = 240 \text{ v.p.}$$

$$M = \frac{1}{3 \left(\frac{f_{cc}}{W} \right)^2} = 17 \text{ v.p.}$$

$$\left(\frac{s}{n} \right)_s = 3 \cdot D^2 \cdot \langle x_n^2 \rangle \cdot z \cdot M$$

$$4000 = 3 \cdot 5^2 \cdot 0,22 \cdot z \cdot 17 \quad \rightarrow \quad z = 14,3 \text{ v.p.}$$

El umbral impone su valor: $z = z_u = 240 \text{ v.p.}$

$$240 = \frac{p_{RX}}{6,62688 \cdot 10^{-20} \cdot 15 \cdot 10^3}$$

$$p_{RX} = 2,3857 \cdot 10^{-13} \text{ W} \quad \rightarrow \quad -96,2 \text{ dBm}$$

$$P_{TX} = P_{RX} + A_t = -96,2 + 122 = 25,8 \text{ dBm} \quad \rightarrow \quad 0,3781 \text{ W}$$

$$0,3781 = \frac{A^2}{2 \cdot 50} \quad \rightarrow \quad A = 6,15 \text{ V}$$

Problema 5.75 (Julio de 2013)

1. Pasamos la señal analítica a la forma canónica de AM:

$$y(t) = [5 + 3,75 x_n(t)] \cos(2,1 \cdot 10^8 \cdot \pi t + 1,57)$$

$$y(t) = A [1 + m \langle x_n(t) \rangle] \cos(2\pi f_c t + \theta)$$

$$A = 5 \text{ V}$$

$$m = 3,75/5 = 0,75$$

$$f_c = (2 \cdot 10^8)/2 = 1,05 \cdot 10^8 = 105 \text{ MHz}$$

$$\theta = 1,57 \text{ rad}$$

Valor cuadrático medio de la señal moduladora:

$$\langle x_n^2(t) \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} x^2 f_x(x) dx = 2 \int_0^1 x^2 \frac{1}{2} dx = \frac{1}{3}$$

Potencia de la señal modulada en el punto A:

$$p_A = \frac{A^2}{2R} [1 + m^2 \langle x_n^2(t) \rangle] = \frac{5^2}{2 \cdot 50} [1 + 0,75^2 (1/3)] = 0,296875 \text{ W}$$

2. Pasamos la señal AM a una senoide equivalente de igual potencia (media), con amplitud A_s :

$$p_A = 0,296875 = \frac{A_s^2}{2 \cdot 50} \rightarrow A_s^2 = 29,6875$$

Calculamos la ganancia en el P1dB:

$$G_0 = 20 \log(a_1) = 20 \text{ dB}$$

$$G_{1dB} = 20 - 1 = 19 \text{ dB}$$

Y de la condición del P1dB sacamos a_3 :

$$10^{G_{1dB}/20} = a_1 + \frac{3}{4} A_s^2$$

$$10^{19/20} = 10 + \frac{3}{4} a_3 29,6875$$

$$a_3 \approx -0,048842 \text{ v.s.}$$

3. Filtro de entrada (antes del mezclador):

$$B_1 = 120 - 100 = 20 \text{ MHz}$$

$$f_{01} = \frac{100 + 120}{2} = 110 \text{ MHz}$$

Filtro de predetección (después del mezclador):

$$B_2 = B_{AM} = 2W = 11 \text{ kHz}$$

$$f_{02} = FI = 10,7 \text{ MHz}$$

Frecuencia del oscilador local:

$$FI = \pm f_d \pm f_{OL}$$

$$f_{OL} = \begin{cases} 105 + 10,7 = 115,7 \text{ MHz (superheterodino)} \\ 105 - 10,7 = 94,3 \text{ MHz (infraheterodino)} \end{cases}$$

4. Para calcular la potencia recibida a la entrada del receptor hay que pasar p_A por el amplificador que distorsiona y por el medio:

$$G_T = G - ATN = 19 - 120 = 101 \text{ dB}$$

$$p_{RX} = p_A \cdot 10^{-10,1} = 2,3582 \cdot 10^{-11} \text{ W}$$

Densidad espectral de ruido a la entrada del receptor:

$$T_{in} = 300 \text{ K}$$

$$T_{e1} = T_0 (a_1 - 1) = 300(10^{0,15} - 1) \approx 124,3 \text{ K}$$

$$T_{e2} = 300(2 - 1) = 300 \text{ K}$$

$$T_T = T_{in} + T_{e1} + T_{e2} a_1 \approx 848,6 \text{ K}$$

$$N_0 = k T_T = 1,1715 \cdot 10^{-20} \text{ W/Hz}$$

Parámetro z :

$$z = \frac{p_{RX}}{N_0 W} = 365980 \text{ v.p.} \rightarrow 55,6 \text{ dB}$$

Calidad a la entrada del demodulador:

$$\left(\frac{s}{n}\right)_e = \frac{z}{2} = 182990 \text{ v.p.} \rightarrow 52,6 \text{ dB}$$

Calidad a la salida del demodulador:

$$\eta = \frac{m^2 \langle x_n^2 \rangle}{1 + m^2 \langle x_n^2 \rangle} = 0,15789 \text{ v.p.}$$

$$\left(\frac{s}{n}\right)_s = \eta z = 57786 \text{ v.p.} \rightarrow 47,6 \text{ dB}$$

5. Un error de 1,37 rad en la fase de la portadora recuperada implica que la señal (¡voltios!) se verá multiplicada por el factor $\cos(1,37)$, que da lugar a una reducción en la potencia (¡vatios!) de señal ΔP . Las relaciones señal a ruido se verán disminuidas por esa reducción:

$$\Delta P = 20 \log [\cos(1,37)] \approx 14 \text{ dB}$$

$$\left(\frac{S}{N}\right)_e = 52,6 - 14 = 38,6 \text{ dB}$$

$$\left(\frac{S}{N}\right)_s = 47,6 - 14 = 33,6 \text{ dB}$$

6. Calculamos la potencia de AM en el punto B. Esa potencia se compone de una delta de portadora sola y de una densidad espectral de potencia plana de las bandas laterales. (Recuerde que en un analizador los espectros son siempre unilaterales.)

$$p_B = p_{RX} \frac{1000}{2\sqrt{2}} = 8,3374 \cdot 10^{-15} \text{ W}$$

$$p_{bl} = \eta p_B = 1,3164 \cdot 10^{-9} \text{ W}$$

$$N_{0bl} = \frac{p_{bl}}{2W} = 1,1968 \cdot 10^{-13} \text{ W/Hz} \rightarrow -99,2 \text{ dBm/Hz}$$

$$N_{bl} = N_{0bl} + 10 \log [RBW(\text{Hz})] = -79,2 \text{ dBm}$$

$$p_c = \frac{1-\eta}{\eta} p_{bl} = 7,0210 \cdot 10^{-9} \text{ W} \rightarrow -51,5 \text{ dBm}$$

El nivel de ruido es la potencia que pasa por el filtro de resolución (Res BW):

$$N_{0B} = N_0 \frac{1000}{2\sqrt{2}} = 4,1419 \cdot 10^{-18} \text{ W/Hz}$$

$$N_B = N_{0B} + 10 \log [RBW(\text{Hz})] = -123,8 \text{ dBm}$$

En la figura 5.43 se observa el resultado. El nivel de ruido cae por debajo del mínimo mostrado.

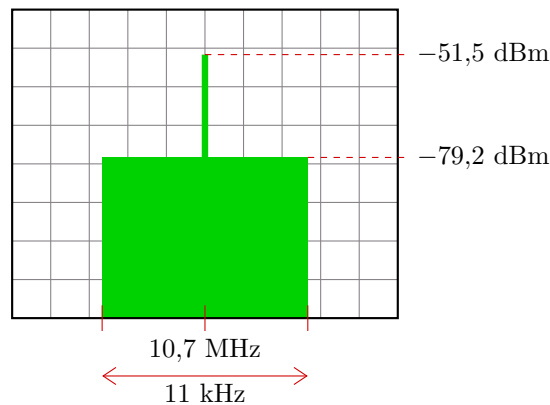


Figura 5.43: Medida del analizador.

Problema 5.76 (Julio de 2013)

1. Señal FM en el punto (B):

$$y_B(t) = A_B \cos \left[\omega_B t + 2\pi \Delta f_B \int_0^t x_n(t) dt \right]$$

$$p_B = \frac{A_B^2}{2 \cdot R} \rightarrow 10^{-4} = \frac{A_B^2}{2 \cdot 50} \rightarrow A = 0,1 \text{ V}$$

$$\omega_B = 2\pi f_B ; f_B = f_c \cdot 10 = 100 \text{ MHz}$$

$$\Delta f_B = \Delta f \cdot 10 = 100 \text{ kHz}$$

2. Ancho de banda de Carson de la señal FM transmitida:

$$B_c = 2(\Delta f_B + W) = 2(100 + 20)(\text{k}) = 240 \text{ kHz}$$

Anchos de banda de los filtros:

$$B_4 = B_8 = B_c$$

$$B_{10} = W$$

Relación de desviación:

$$D = \frac{\Delta f_B}{W} = \frac{100}{20} = 5$$

3. Temperatura equivalente total de ruido en el punto (D):

$$T_{IN} = 3 \cdot T_0 = 900 \text{ K}$$

$$T_{e7} = T_0 (f_7 - 1) = 300 (4 - 1) = 900 \text{ K}$$

$$T_{e8} = T_0 (a_8 - 1) = 300 (2 - 1) = 300 \text{ K}$$

$$T_{e9} = T_0 (f_9 - 1) = 300 (2,512 - 1) = 453,6 \text{ K}$$

$$T_{eTD} = T_{IN} + T_{e7} + \frac{T_{e8}}{g_7} + \frac{T_{e9} \cdot a_8}{g_7} \approx T_{IN} + T_{e7} = 900 + 900 = 1800 \text{ K}$$

Densidad espectral de ruido:

$$N_0 = k \cdot T_{eTD} = 2,484 \cdot 10^{-20} \text{ W/Hz}$$

4. Mejora por pre-deénfasis:

$$M = \frac{1}{3 \cdot (f_{cc}/W)^2} = 33,3 \text{ v.pot.} \rightarrow 15,2 \text{ dB}$$

Parámetro z umbral:

$$z_u = 40 (D + 1) = 40 (5 + 1) = 240 \text{ v.pot.} \rightarrow 23,8 \text{ dB}$$

5. De la calidad requerida sacamos la z :

$$(S/N)_s = 50 \text{ dB}$$

$$10^5 = 3 \cdot D^2 \cdot \langle x_n^2 \rangle \cdot z \cdot M = 3 \cdot 5^2 \cdot 0,1 \cdot z \cdot 33,3 \rightarrow z = 400 \text{ v.pot.}$$

El requisito de calidad nos exige estar por encima del umbral.

$$z = 400 \text{ v.pot.} \rightarrow 26 \text{ dB}$$

$$400 = \frac{p_D}{N_0 \cdot W} = \frac{p_D}{2,484 \cdot 10^{-20} \cdot 20 \cdot 10^3} \rightarrow p_D = 1,987 \cdot 10^{-13} \text{ W}$$

$$\text{PEP} = p_C = p_D \cdot \text{ATN} = 1,987 \cdot 10^{-13} \cdot 10^{12} = 0,1987 \text{ W} \rightarrow 23 \text{ dBm}$$

6. Ganancia del amplificador del transmisor:

$$g_3 = \frac{p_C}{p_B} = \frac{0,1987}{0,1 \cdot 10^{-3}} = 1987 \text{ v.pot.} \rightarrow 33 \text{ dB}$$

Problema 5.77 (Julio de 2013)

Tenemos una señal BLUs. Podemos hacer el desarrollo trigonométrico para comprobar que es así:

$$\begin{aligned}
 y_{BLUs} &= A \left[\cos(2\pi \cdot 1000 \cdot 10^3 \cdot t) \cos(2\pi \cdot 3 \cdot 10^3 \cdot t) \right. \\
 &\quad \left. - \sin(2\pi \cdot 1000 \cdot 10^3 \cdot t) \sin(2\pi \cdot 3 \cdot 10^3 \cdot t) \right] \\
 y_{BLUs} &= \frac{A}{2} \left[\cos(2\pi \cdot 1003 \cdot 10^3 \cdot t) + \cos(2\pi \cdot 997 \cdot 10^3 \cdot t) \right. \\
 &\quad \left. + \cos(2\pi \cdot 1003 \cdot 10^3 \cdot t) - \cos(2\pi \cdot 997 \cdot 10^3 \cdot t) \right] \\
 &= A \cos(2\pi \cdot 1003 \cdot 10^3 \cdot t)
 \end{aligned}$$

Calculamos las temperaturas de ruido totales que realmente existen y se miden en los puntos A y B, T_{TA} y T_{TB} respectivamente:

$$\begin{aligned}
 T_{e1} &= T_0 (f_1 - 1) = 300 (20 - 1) = 5700 \text{ K} \\
 T_{ea} &= T_0 (f_a - 1) = 300 (10 - 1) = 2700 \text{ K} \\
 T_{em} &= T_0 (f_m - 1) = 300 (10^{1,5} - 1) \approx 9186,8 \text{ K} \\
 T_{e2} &= T_0 (f_2 - 1) = 300 (100 - 1) = 29700 \text{ K} \\
 T_e &= T_{e1} + T_{ea} \cdot l_{f1} + T_{em} \frac{l_{f1}}{g_a} + T_{e2} \frac{l_{f1}}{g_a} \\
 T_e &= 5700 + 2700 \cdot 20 + 9186,8 \frac{20}{20000} + 29700 \frac{20}{20000} = 59738,9 \text{ K} \\
 T_{TA} &= T_{in} = 10000 \text{ K} \\
 T_{TB} &= (T_{in} + T_e) \frac{g_a}{l_{f1} \cdot l_{f2}} = 697389 \text{ K}
 \end{aligned}$$

Calculamos los niveles de ruido (potencia de ruido que pasa por el RBW):

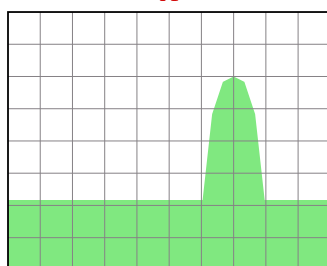
$$\begin{aligned}
 N_{0A} &= 10 \log(k \cdot T_{TA}) + 30[\text{dBW} \rightarrow \text{dBm}] + 10 \log(\text{RBW}) \approx -128,6 \text{ dBm} \\
 N_{0B} &= 10 \log(k \cdot T_{TB}) + 30 + 10 \log(\text{RBW}) \approx -110,2 \text{ dBm}
 \end{aligned}$$

La señal deseada es un tono a 1003 kHz. En la pantalla aparece como una delta (unilateral). En el punto A tenemos el valor por enunciado; en el punto B hay que pasar la señal de A por la ganancia de la cascada, que es de 10 dB:

$$\begin{aligned}
 S_A &= -90 \text{ dBm} \\
 S_B &= S_A + 10 = -80 \text{ dBm}
 \end{aligned}$$

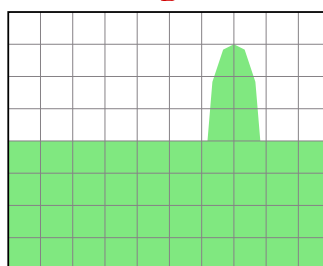
Por último, las pantallas del analizador se pueden centrar al valor de la portadora (1000 kHz), o se pueden centrar en la frecuencia de la BLUs (1003 kHz). Tomamos la primera opción:

A



$RL = -70 \text{ dBm}$
 $S_A = -90 \text{ dBm}$
 $N_A = -128,6 \text{ dBm}$
 $SPAN = 15 \text{ kHz}$
 $f_0 = 1000 \text{ kHz}$

B



$RL = -70 \text{ dBm}$
 $S_B = -80 \text{ dBm}$
 $N_B = -110,2 \text{ dBm}$
 $SPAN = 15 \text{ kHz}$
 $f_0 = 455 \text{ kHz}$

Tema 6

CONVERSIÓN A/D, MIC

Problema 6.1

1. Tiempo de muestreo:

$$f_{Nyq} = 2 \cdot W = 2 \cdot 2500 = 5000 \text{ Hz}$$

$$f_m = 1,5 \cdot f_{Nyq} = 7500 \text{ Hz}$$

$$T = 1/f_m = 1,3 \cdot 10^{-4} \text{ s}$$

La muestra segunda se toma en $t_2 = T$, y la quinta en $t_5 = 4T$. Sustituímos los dos instantes de muestreo, y obtenemos las muestras:

$$x_2 = x(T) \approx 0,838261 \text{ V}$$

$$x_5 = x(4T) \approx -2,456295 \text{ V}$$

Tamaño del escalón de cuantificación:

$$\Delta = \frac{2x_{sc}}{L} = \frac{2 \cdot 3}{16} = \frac{3}{8} = 0,375 \text{ V}$$

Escalones en que se cuantifican las dos muestras:

$$K_2 = E\left[\frac{|x_2|}{\Delta}\right] = E[2,24] = 2 \text{ (escalón } +2)$$

$$K_5 = E\left[\frac{|x_5|}{\Delta}\right] = E[6,55] = 6 \text{ (escalón } -6)$$

Palabras código (de 4 bits):

$$x_2 \rightarrow 1-010$$

$$x_5 \rightarrow 0-110$$

(El bit de mayor peso contiene el signo, “+ = 1”, “− = 0”, los bits restantes el módulo del escalón en binario.)

2. Valores de reconstrucción:

$$\hat{x}_2 = +\Delta (K_2 + 0,5) = 0,9375 \text{ V}$$

$$\hat{x}_5 = -\Delta (K_5 + 0,5) = -2,4375 \text{ V}$$

Errores de cuantificación:

$$|q_2| = |x_2 - \hat{x}_2| = 0,099239$$

$$|q_5| = |x_5 - \hat{x}_5| = 0,018795$$

Como la escalera es uniforme, conviene comprobar que los módulos de los errores no superan la mitad del escalón de cuantificación:

$$|q_{max}| = \frac{\Delta}{2} = 0,1875 \text{ (OK)}$$

3. Vamos a resolver el apartado mediante dos métodos diferentes.

Primer método: calculando por separado la potencia de señal y la de ruido.

$$s = \frac{2^2}{2} + \frac{1^2}{2} = \frac{5}{2} \text{ W}$$

$$n = \frac{\Delta^2}{12} = 0,01171875 \text{ W}$$

$$\left(\frac{s}{n}\right)_q = 213,3 \text{ v.p.}$$

$$\left(\frac{S}{N}\right)_q \approx 23,3 \text{ dB (valor más exacto: 23,291)}$$

Segundo método: con la fórmula de las transparencias.

$$K_c = \frac{x_p}{x_{ef}} = \frac{x_p}{\sqrt{\langle x^2 \rangle}} = \frac{3}{\sqrt{5/2}} = 3\sqrt{2/5}$$

$$\left(\frac{S}{N}\right)_q \approx 6n - 10 \log\left(\frac{K_c^2}{3}\right) - 20 \log\left(\frac{x_{sc}}{x_p}\right)$$

$$\left(\frac{S}{N}\right)_q \approx 6 \cdot 4 - 10 \log\left(\frac{3^2(2/5)}{3}\right) - 0$$

$$\left(\frac{S}{N}\right)_q \approx 23,2 \text{ dB (valor más exacto: 23,208)}$$

La diferencia entre ambos métodos (que es totalmente despreciable a efectos de ingeniería) se debe a que el término $6n$ (“resolución del cuantificador”) es aproximado; su valor exacto es:

$$20 \log(2) \cdot n$$

4. Régimen binario:

$$R_b = n \cdot f_m = 4 \cdot 7500 = 30 \text{ kbps}$$

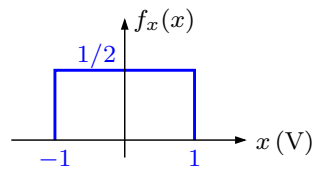


Figura 6.1: Caracterización estadística de la nueva señal $x(t)$.

5. En la figura 6.1 se observa la función densidad de probabilidad de la nueva señal $x(t)$. Como está uniformemente distribuida entre -1 y 1 , su amplitud ha de ser $1/2$ para que el área encerrada (suceso seguro) sea la unidad.

Nueva relación señal a ruido de cuantificación:

$$x_p = 1 \text{ V}$$

$$x_{ef}^2 = 2 \int_0^{x_p} \frac{1}{2} x^2 dx = \frac{x_p^2}{3}$$

$$K_c^2 = \frac{x_p^2}{x_{ef}^2} = 3$$

$$\left(\frac{S}{N}\right)_q \approx 6 \cdot 4 - 10 \log\left(\frac{3}{3}\right) - 20 \log\left(\frac{3}{1}\right)$$

$$\left(\frac{S}{N}\right)_q \approx 14,5 \text{ dB}$$

Un modo sencillo de mejorar la calidad es trabajando a fondo de escala. Podemos, por ejemplo, amplificar la entrada $g = 3$ veces de señal. Entonces el término de fondo de escala se anula, y queda:

$$\left(\frac{S}{N}\right)_q \approx 6 \cdot 4 - 0 - 0 = 24,0 \text{ dB}$$

6. El tiempo de trama es siempre el tiempo de muestreo:

$$T_T = T = \frac{1}{f_m} = 133,3 \cdot \mu\text{s}$$

Como hay 8 slots temporales iguales, cada uno ocupa:

$$T_s = \frac{T_T}{8} = 16,6 \cdot \mu\text{s}$$

Régimen binario de salida:

$$N_T = 8 \cdot 4 = 32 \text{ bits/trama}$$

$$R_b = N_T \cdot f_m = 240 \text{ kb/s}$$

Se recomienda al alumno que realice un dibujo de la trama temporal.

Problema 6.2 (Septiembre de 1996)

1. Respecto a la calidad: trabajamos a fondo de escala y con una entrada uniformemente distribuida. Por lo tanto, si se requieren 60 dB de relación señal a ruido de cuantificación:

$$\left(\frac{S}{N}\right)_q \approx 6 \cdot n - 0 - 0$$

$$60 \approx 6 \cdot n$$

$$n = 10 \text{ bits/muestra}$$

Respecto al rango dinámico: el error de cuantificación máximo ha de ser 50 mV. Por lo tanto, los valores de sobrecarga son:

$$|q_{max}| = \frac{\Delta}{2}$$

$$\Delta = 2 \cdot 0,050 = 0,1 \text{ V}$$

$$L = 2^n = 2^{10} = 1024 \text{ niveles (o escalones)}$$

$$\Delta = \frac{2 x_{sc}}{L}$$

$$0,1 = \frac{2 x_{sc}}{1024}$$

$$x_{sc} = \pm 51,2 \text{ V}$$

$$x_{sc} = \pm 51,2 \text{ litros (conversión 1 V/l)}$$

2. Para un mismo valor de pico, una señal sinusoidal tiene más potencia que una señal con distribución uniforme. Como el ruido de cuantificación es el mismo en ambos casos, (S/N) crece con la senoide. En concreto aumenta:

$$K_c^2 = \frac{x_p^2}{x_{ef}^2} = 2 \text{ (senoide)}$$

$$-10 \log\left(\frac{K_c^2}{3}\right) = -10 \log\left(\frac{2}{3}\right) \approx +1,76 \text{ dB}$$

3. La calidad disminuye por no trabajar a fondo de escala. La disminución la da el término:

$$-20 \log\left(\frac{x_{sc}}{x_p}\right) = -20 \log\left(\frac{51,2}{25}\right) \approx -6,23 \text{ dB}$$

El error máximo de cuantificación no varía, ya que el tamaño del escalón, Δ , no se ha modificado.

4. Los valores de litros se convierten directamente en muestras en voltios:

$$x_a = +40 \text{ V}$$

$$x_b = -30 \text{ V}$$

Calculamos el escalón del nuevo sistema:

$$\Delta = \frac{2 \cdot 50}{2^8} = 0,390625 \text{ V}$$

Cuantificamos las muestras:

$$K_a = +E \left(\frac{|x_a|}{\Delta} \right) = +E \left(\frac{40}{0,390625} \right) = +E(102,4) = +102$$

$$K_b = -E \left(\frac{|x_b|}{\Delta} \right) = -76$$

Codificamos en binario simétrico con 8 bits:

$$K_a \rightarrow 1-1100110$$

$$K_b \rightarrow 0-1001100$$

Valores de reconstrucción:

$$\hat{x}_a = +\Delta (K_a + 0,5) = +0,390625 (102 + 0,5) = +40,0390625 \text{ V}$$

$$\hat{x}_b = -\Delta (K_b + 0,5) = -29,8828125 \text{ V}$$

Errores de cuantificación:

$$|q_a| = |x_a - \hat{x}_a| = 0,0390625 \text{ V}$$

$$|q_b| = |x_b - \hat{x}_b| = 0,1171875 \text{ V}$$

5. La frecuencia de muestreo debe ser al menos el doble de la variación más rápida de la información (teorema del muestreo). Nuestra variación es de voltios (o litros) por segundo. Por lo tanto:

$$f_m \geq f_{Nyq} = 2W$$

$$10 = 2W$$

$$W = \frac{10}{2} = 5 \text{ V/s (o litros/s)}$$

Problema 6.3 (Junio de 2002)

1. La información de entrada ocupa 10 kHz (en banda base). Al pasar por el filtro se recorta hasta $W = 4$ kHz. Aplicando el teorema del muestreo, para no perder información tenemos que muestrear al menos al doble:

$$f_s \geq 2W = 2 \cdot 4 = 8 \text{ kHz}$$

$$f_{smin} = 8 \text{ kHz}$$

2. Como se observa en la figura 6.2 obtenemos un conjunto de subespectros desplazados a $\pm n \cdot f_m$. Es necesario recordar: a) que el espectro original de $x(t)$ se recortó con el filtro $H(f)$, y b) que la transformada de Fourier añade la constante $2W$.

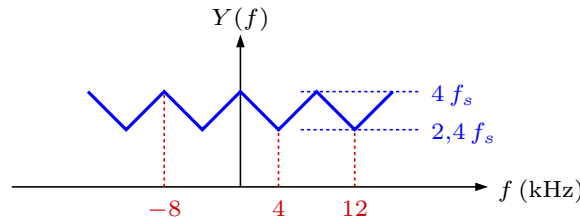


Figura 6.2: Espectro a la salida del muestreador.

Quizá algún alumno piense que tenemos problemas porque la suma de subespectros desplazados no es plana, como requiere el criterio de Nyquist. Pero ahora estamos muestreando en una conversión A/D, es decir: estamos aplicando el teorema del muestreo, y no el criterio de Nyquist.

3. Calculamos la calidad (señal a ruido de cuantificación) para un cuantificador no uniforme (con compansión) de n bits, y para uno uniforme con $n' = n + \delta n$ bits:

$$(S/N)_q^c = 6n - [A] - [B] + G_c$$

$$(S/N)_q^u = 6(n + \delta n) - [A] - [B]$$

G_c es la ganancia de compansión, que vale 24 dB (ley A, $A = 87,6$), y los términos $[A]$ (dispersión de amplitudes) y $[B]$ (fondo de escala) no cambian de un caso a otro. Restamos una igualdad a la otra, y queda:

$$6 \cdot \delta n = 24 \Rightarrow \delta n = 4 \text{ bits}$$

Luego el cuantificador no uniforme, gracias a la compansión, puede “ahorrar” 4 bits al cuantificador.

4. Tomamos cada muestra, y la pasamos por el compresor (hay que determinar si la muestra cae en la zona lineal o en la logarítmica, comparando el valor absoluto de la muestra con $1/A$). Lo más cómodo es operar siempre con el valor absoluto de la muestra, y luego añadir el signo:

$$1/A = 0,011415525$$

$$x_3 = 0,1 \text{ (zona log.)} \rightarrow C(0,1) = +0,57926599$$

$$x_6 = -0,6 \text{ (zona log.)} \rightarrow C(0,6) = -0,9066606$$

Para calcular el tamaño del escalón dividimos el margen dinámico total ($2x_{sc}$) entre el número de escalones ($L = 2^n$):

$$\Delta = \frac{2x_{sc}}{L} = \frac{2 \cdot 1}{2^8} = 7,8125 \cdot 10^{-3}$$

Cuantificamos las muestras comprimidas dividiendo por el tamaño del escalón (nos quedamos con la parte entera):

$$K_3 = E \left[\frac{C(x_3)}{\Delta} \right] = 74 \Rightarrow \text{escalón } +74$$

$$K_6 = E \left[\frac{C(x_6)}{\Delta} \right] = -116 \Rightarrow \text{escalón } -116$$

Codificamos en palabras binarias de 8 bits (codificación binaria simétrica, con el bit de mayor peso indicando el signo):

$$\text{escalón } +74 \rightarrow 11001010$$

$$\text{escalón } -116 \rightarrow 01110100$$

El signo + se ha codificado con “1”, y el signo – con “0”.

5. Calculamos el valor en voltios de los escalones elegidos (valor de reconstrucción del cuantificador uniforme):

$$\text{escalón } +74 \rightarrow C(\hat{x}_3) = \Delta (74 + 0,5) = 0,5820312 \text{ V}$$

$$\text{escalón } -116 \rightarrow C(\hat{x}_6) = -\Delta (116 + 0,5) = -0,9101562 \text{ V}$$

El error (¡a la salida del cuantificador uniforme!) es la diferencia con las muestras originales comprimidas:

$$|q_3| = |C(x_3) - C(\hat{x}_3)| = 0,00276526 \text{ V}$$

$$|q_6| = |C(x_6) - C(\hat{x}_6)| = 0,00349565 \text{ V}$$

Siempre debemos comprobar que los errores de cuantificación son inferiores (o iguales) a $\Delta/2 = 3,90625 \cdot 10^{-3}$.

Estos errores son a la salida del cuantificador uniforme del transmisor. Los errores a la salida del receptor (sin contar con posibles errores del canal) son diferentes, porque los valores de reconstrucción pasarán por un expansor, y los compararemos con las muestras originales que entraron al sistema. Veamos cómo se calcularían estos errores (finales o totales del sistema):

Los valores de reconstrucción tienen que pasar por el expansor. Tenemos las dos funciones del compresor (zona lineal y zona logarítmica), y necesitamos: a) obtener las dos funciones del expansor, y b) obtener el umbral entre las dos funciones. (Como es más cómodo, trabajamos con el valor absoluto de reconstrucción, y luego añadimos el signo.) El expansor realiza la tarea contraria al compresor, es decir: si al compresor

entra x , la salida es $y = C(x)$; mientras que si al expansor llega y , la salida es x . Por lo tanto, las ecuaciones del expansor se obtienen DESPEJANDO x en función de y (pero NO tomando $1/C(x)$). Para la zona lineal (no consideramos x_{sc} porque en este caso vale 1):

$$y = C(x) = \frac{A \cdot x}{1 + \ln A}$$

$$x = C^{-1}(y) = \frac{1 + \ln A}{A} y$$

(No olvide que la notación simbólica $C^{-1}(x)$ indica la función *contraria* a $C(x)$, y por lo tanto, $C^{-1}(x) \neq 1/C(x)$.) El lector debe obtener por su cuenta la ecuación del expansor en la zona logarítmica.

El umbral entre las ecuaciones es:

$$C(1/A) = \frac{1}{1 + \ln A} \approx 0,18272246$$

Luego los dos valores de reconstrucción están en zona logarítmica.

6. Con un cuantificador uniforme, la potencia de ruido para 8 bits es:

$$\langle q^2 \rangle = \frac{x_{sc}}{3 \cdot 2^{2n}} = \frac{\Delta^2}{12} \approx 5,086 \text{ } \mu\text{W}$$

7. Con un bit más ($n = 9$):

$$\langle q^2 \rangle \approx 1,27 \text{ } \mu\text{W}$$

Lo que supone reducir la potencia en 1/4.

Problema 6.4 (Septiembre de 2002)

1. Determinamos en qué zona del compresor está cada muestra:

$$\frac{1}{A} = \frac{1}{87,6} \approx 0,011415525$$

$$x_a = +0,0025 \rightarrow \text{zona lineal}$$

$$x_b = -0,75 \rightarrow \text{zona log.}$$

Pasamos las muestras por el compresor:

$$C(x_a) = + \frac{87,6 \cdot 0,0025}{1 + \ln(87,6)} \approx +0,0400162 \text{ V}$$

$$C(x_b) = - \frac{1 + \ln(87,6 \cdot 0,75)}{1 + \ln(87,6)} \approx -0,9474340 \text{ V}$$

2. Escalón de cuantificación para cada muestra:

$$\Delta = \frac{2 x_{sc}}{L} = \frac{2 \cdot 1}{2^8} = 0,0078125 \text{ V}$$

$$K_a = +E \left\lceil \frac{|C(x_a)|}{\Delta} \right\rceil = +5$$

$$K_b = -E \left\lceil \frac{|C(x_b)|}{\Delta} \right\rceil = -121$$

Palabra código para cada muestra:

$$+5 \rightarrow 1-0000101$$

$$-121 \rightarrow 0-1111001$$

Valores a la salida del cuantificador uniforme (valores de reconstrucción):

$$C(\hat{x}_a) = +\Delta (K_a + 0,5) = +0,04296875 \text{ V}$$

$$C(\hat{x}_b) = -\Delta (K_b + 0,5) = -0,94921875 \text{ V}$$

3. Ecuaciones del expansor en el primer cuadrante:

$$\hat{x} = \frac{1 + \ln A}{A} C(\hat{x}) ; \quad 0 \leq \frac{C(\hat{x})}{x_{sc}} \leq \frac{1}{1 + \ln A}$$

$$\hat{x} = \frac{x_{sc}}{A} \exp \left[(1 + \ln A) \frac{C(\hat{x})}{x_{sc}} - 1 \right] ; \quad \frac{1}{1 + \ln A} \leq \frac{C(\hat{x})}{x_{sc}} \leq 1$$

En la figura 6.3 se observa la gráfica del expansor.

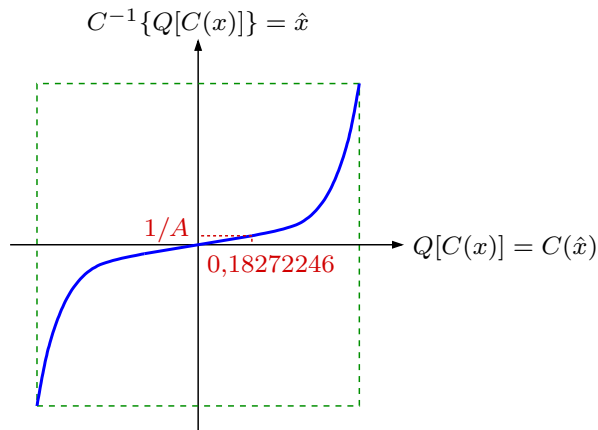


Figura 6.3: Gráfica del expansor.

4. Pasamos los valores reconstruidos a la salida del cuantificador uniforme por el expansor. Cada muestra está siempre en la misma zona de compresión (lineal o logarítmica):

$$\hat{x}_a = + \frac{1 + \ln 87,6}{87,6} 0,04296875 = +0,002684458 \text{ V}$$

$$\hat{x}_b = -\frac{1}{87,6} \exp[(1 + \ln 87,6) 0,94921875 - 1] = -0,7573615 \text{ V}$$

Errores del sistema completo:

$$|q_a| = |x_a - \hat{x}_a| \approx 0,00018 \text{ V}$$

$$|q_b| = |x_b - \hat{x}_b| = 0,00736 \text{ V}$$

Ahora calculamos con el cuantificador uniforme:

$$K_a = +E \left[\frac{0,0025}{\Delta} \right] = +E[0,32] = +0$$

$$K_b = -E \left[\frac{0,75}{\Delta} \right] = -E[96] = -96$$

$$\hat{x}_a = +\Delta (K_a + 0,5) = +0,00390625 \text{ V}$$

$$\hat{x}_b = -\Delta (K_b + 0,5) = -0,7539062 \text{ V}$$

$$|q_a| \approx 0,00141 \text{ V}$$

$$|q_b| \approx 0,00391 \text{ V}$$

Comparamos los errores: como es lógico, sólo la muestra pequeña se beneficia en el cuantificador no uniforme de la compansión, de forma que reduce su error de cuantificación.

Problema 6.5 (Junio de 2004)

Pasamos la muestra por el compresor:

$$\frac{1}{A} = \frac{1}{87,6} \approx 0,011415525$$

$$|x| < 1/A \rightarrow \text{zona lineal}$$

$$C(x) = -\frac{87,6 \cdot 0,0078}{1 + \ln 87,6} \approx -0,12485060 \text{ V}$$

Calculamos el nivel cuantificado:

$$\Delta = \frac{2x_{sc}}{L} = \frac{2 \cdot 1}{2^8} = 0,0078125 \text{ V}$$

$$K = -E \left[\frac{0,12485060}{0,0078125} \right] = -E[15,98] = -15$$

Le corresponde la palabra binaria:

$$K = -15 \rightarrow 0-0001111$$

Valor de reconstrucción:

$$C(\hat{x}) = -\Delta (K + 0,5) = -0,12109375 \text{ V}$$

Pasamos por el expansor (sigue en tramo lineal, claro):

$$\hat{x} = -\frac{1 + \ln 87,6}{87,6} 0,12109375 = -0,00756529194 \text{ V}$$

Error cometido a la salida del expansor (en valor absoluto):

$$|q| = |x - \hat{x}| \approx 2,347 \cdot 10^{-4} \text{ V}$$

Problema 6.6 (Junio de 2006)

1. Escalón de cuantificación:

$$\Delta = \frac{2 x_{sc}}{2^n} = \frac{2 \cdot 3}{2^{16}} = 9,155273438 \cdot 10^{-5} \text{ V}$$

Palabra binaria para la muestra:

$$K = E \left(\frac{|x|}{\Delta} \right) = +10103$$

En binario simétrico: 1-010-0111-0111-0111

2. Como el tercer bit de menor peso tiene un valor decimal $2^2 = 4$, el escalón recibido con error es:

$$10103 - 4 = 10099$$

Tensión de reconstrucción:

$$\hat{x} = +\Delta (K + 0,5) = +0,9246368408 \text{ V}$$

Problema 6.7 (Junio de 2007)

Calculamos el valor de reconstrucción (valor central del escalón):

$$\text{"0-1011001"} \Rightarrow k = -89$$

$$\Delta = \frac{2 \cdot x_{sc}}{2^n} = \frac{2 \cdot 1}{2^8} = 7,8125 \cdot 10^{-3} \text{ V}$$

$$\hat{x} = -(k + 0,5)\Delta = -0,6992187 \text{ V}$$

Respecto a este valor central, el error puede ser de medio escalón:

$$\hat{a} = \hat{x} + \Delta/2 = -0,6953125 \text{ V}$$

$$\hat{b} = \hat{x} - \Delta/2 = -0,7031250 \text{ V}$$

Ahora deshacemos el paso por el compresor. Los dos valores están en el tramo logarítmico. Con sobrecarga unidad, y quitando el signo (añadimos el menos al final del cálculo):

$$y = \frac{1 + \ln(Ax)}{1 + \ln A} \Rightarrow x = \frac{1}{A} \exp [(1 + \ln A)y - 1]$$

$$|a| = \frac{1}{A} \exp [(1 + \ln A)|\hat{a}| - 1] = 0,1887205$$

$$|b| = \frac{1}{A} \exp [(1 + \ln A)|\hat{b}| - 1] = 0,1969644$$

$$a = -0,1887205$$

$$b = -0,1969644$$

La muestra original x puede estar entre los valores a y b .

Problema 6.8 (Enero de 2008)

1. Calculamos el tamaño del escalón:

$$n = 8 \text{ bits/muestra}$$

$$L = 2^n = 2^8 = 256 \text{ escalones}$$

$$\Delta = \frac{2 \cdot x_{sc}}{L} = \frac{2 \cdot 1}{256} = 7,8125 \cdot 10^{-3} \text{ V}$$

Tomamos la muestra x_1 . Como $1/A \approx 0,0114155$, la muestra está en el tramo logarítmico. Primero comprimimos x_1 ; luego calculamos el escalón y la palabra binaria correspondiente; por último reconstruimos, descomprimos y calculamos el error.

$$C(x_1) = \frac{1 + \ln(87,6 \cdot 0,98765)}{1 + \ln 87,6} \approx 0,9977293272 \text{ V}$$

$$k_1 = E \left\lceil \frac{|C(x_1)|}{\Delta} \right\rceil = 127 \Rightarrow \text{escalón: } +127 \Rightarrow \text{"1-1111111"}$$

$$C(\hat{x}_1) = +(127 + 0,5)\Delta = +0,99609375 \text{ V (valor reconstruido)}$$

$$\hat{x}_1 = +\frac{1}{A} \exp\{C(\hat{x}_1) [1 + \ln A] - 1\} \approx +0,9788488401 \text{ V}$$

$$|q_1| = |x_1 - \hat{x}_1| \approx 8,8012 \cdot 10^{-3} \text{ V (mayor que } \Delta/2 \text{ por la compresión)}$$

Realizamos los mismos pasos para x_2 , que está en la zona lineal del compresor.

$$C(x_2) = \frac{87,6 \cdot 0,00123}{1 + \ln 87,6} \approx 0,01968797948 \text{ V}$$

$$k_2 = E \left\lceil \frac{|C(x_2)|}{\Delta} \right\rceil = 2 \Rightarrow \text{escalón: } -2 \Rightarrow \text{"0-0000010"}$$

$$C(\hat{x}_2) = -(2 + 0,5)\Delta = -0,01953125 \text{ V (valor reconstruido)}$$

$$\hat{x}_2 \approx -0,001220208377 \text{ V}$$

$$|q_2| = |x_2 - \hat{x}_2| \approx 9,7916 \cdot 10^{-6} \text{ V}$$

En este caso, a pesar de que la muestra está casi en un extremo del escalón, el error es mucho menor que $\Delta/2$ gracias a la expansión.

2. La ganancia de compansión de un sistema MIC típico es 24 dB, pasando a veces de señal:

$$G_c \approx 24(\text{dB}) = 20 \log g_c \Rightarrow g_c \approx 15,85 \text{ veces de señal}$$

También podemos calcular a partir de la definición y las fórmulas del compresor:

$$g_c = \frac{A}{1 + \ln A} \approx 16 \text{ veces de señal}$$

Problema 6.9 (Junio de 2010)

Pasamos la palabra código a decimal con signo:

$$01011101 \rightarrow K = -93$$

Tensión de reconstrucción:

$$C(\tilde{x}) = \text{sign}(K) \cdot \Delta \cdot (K + 0,5) = -1,4609375 \text{ V}$$

Tensión de reconstrucción normalizada:

$$\frac{C(\tilde{x})}{x_p} = 0,73046875$$

Determinamos en qué zona está el valor:

$$\Delta = \frac{2 x_p}{2^n} = \frac{2 \cdot 2}{2^8} = 0,015625 \text{ V}$$

$$\text{Valor límite } x_0/x_p: \frac{x_0}{x_p} = \frac{1}{A} = 0,01141552511$$

$$\text{Valor límite } C(\tilde{x}_0)/x_p: \frac{C(\tilde{x}_0)}{x_p} = \frac{A \cdot (1/A)}{1 + \ln(A)} = 0,1827224587$$

$$\frac{C(\tilde{x})}{x_p} > \frac{C(\tilde{x}_0)}{x_p} \rightarrow \text{zona logarítmica}$$

Pasamos por el expansor:

$$\tilde{x} = \text{sign}[C(\tilde{x})] \cdot \frac{x_p}{A} \cdot \exp\left[(1 + \ln A) \frac{C(\tilde{x})}{x_p} - 1\right]$$

$$\tilde{x} = -\frac{2}{87,6} \exp[(1 + \ln 87,6) 0,73046875 - 1] = -0,4575183331 \text{ V}$$

Problema 6.10 (Julio de 2010)

1. Ganancia de compansión:

$$G_c = 20 \log \left[\frac{70}{1 + \ln(70)} \right] = 22,5 \text{ dB}$$

Calidad:

$$L = 2^n \Rightarrow 1024 = 2^n \Rightarrow n = 10 \text{ bits por muestra}$$

$$\left(\frac{S}{N} \right)_q = 6 \cdot n + G_c = 6 \cdot 10 + 22,5 = 82,5 \text{ dB}$$

La señal de entrada NO debe tener una distribución uniforme, porque entonces no tendría sentido usar el compresor Ley A.

2. Frecuencia de muestreo:

$$f_m = 1,2 \cdot f_{Nyq} = 1,2 \cdot 2 \cdot W = 14,4 \text{ kHz}$$

Régimen binario:

$$R_b = (40 + 2) \cdot 10 \cdot 14,4(\text{k}) = 6048 \text{ kbps}$$

3. Tamaño del escalón:

$$\Delta = \frac{2 x_{sc}}{L} = \frac{2}{1024} = 1,953125 \cdot 10^{-3} \text{ V}$$

Pasamos la muestra por el compresor. El límite entre zona lineal y zona logarítmica es:

$$\frac{1}{A} = \frac{1}{70} = 0,01428571429$$

Luego estamos en zona lineal. Por lo tanto:

$$|C(x)| = \frac{A \cdot |x|}{1 + \ln(A)} = \frac{70 \cdot 0,01}{1 + \ln(70)} = 0,1333715604 \text{ V}$$

Cuantificamos:

$$k = E \left[\frac{|C(x)|}{\Delta} \right] = 68$$

Codificamos, con 10 bits y en binario simétrico, el escalón 68 negativo:

$$0 - 001000100$$

4. Valor de reconstrucción del escalón:

$$C(\hat{x}) = \text{sign}(x) \cdot \Delta(k + 0,5) = -0,1337890625 \text{ V}$$

Ahora pasamos por el expansor:

$$\hat{x} = \frac{1 + \ln(A)}{A} \cdot C(\hat{x}) = -0,01003130369 \text{ V}$$

Problema 6.11 (Enero de 2012)

1. Tamaño del escalón:

$$\Delta = \frac{2 x_{sc}}{2^n} = \frac{2 \cdot 1,5}{2^{10}} = 2,9296875 \cdot 10^{-3} \text{ V}$$

Ruido de cuantificación:

$$n = \langle q^2 \rangle = \frac{\Delta^2}{12} = 7,1526 \cdot 10^{-7} \text{ W}$$

2. Potencia de señal:

$$s = \langle x^2 \rangle = \frac{0,2^2}{2} + \frac{0,5^2}{2} = 0,145 \text{ W}$$

Relación señal a ruido:

$$\left(\frac{s}{n}\right)_q = 202725 \text{ v.p.} \rightarrow 53,1 \text{ dB}$$

3. Ganancia de compansión:

$$G_c = 20 \log \left(\frac{A}{1 + \ln A} \right) = 12,0 \text{ dB}$$

Ahorro de bits:

$$6(\delta n) = G_c$$

$$\delta n = 2 \text{ bits}$$

4. Valor de la muestra 164:

$$f_m = 1,5 \cdot f_{Nyq} = 1,5 \cdot 2 \cdot 1200 = 3600 \text{ Hz}$$

$$\text{Se toma en: } t = 163 T_m = \frac{163}{f_m} = 0,04527$$

$$x(0,04527) = 0,2360511513 \text{ V}$$

Palabra código:

$$K = E \left\lfloor \frac{|x|}{\Delta} \right\rfloor = 80$$

$$+80 \rightarrow 1-001010000$$

Problema 6.12 (Junio de 2012)

1. Número de bits del cuantificador:

$$\left(\frac{S}{N}\right)_q \approx 6n - 10 \log \left[\frac{K_c^2}{3} \right] - 20 \log \left[\frac{x_{sc}}{x_p} \right]$$

$$60 \approx 6n + 1,76 - 20 \log \left[\frac{6}{2} \right]$$

$$n = 11,3 \rightarrow n = 12 \text{ bits}$$

2. Calidad señal a ruido de cuantificación:

$$\left(\frac{S}{N}\right)_q \approx 6 \cdot 12 + 1,76 - 20 \log \left[\frac{6}{2} \right] = 64,2 \text{ dB}$$

3. Tiempo de trama:

$$T_T = 1/f_m = 10 \text{ } \mu\text{s}$$

Régimen binario:

$$N_T = 8 \cdot 12 + 10 = 106 \text{ bits/trama}$$

$$R_b = N_T \cdot f_m = 10,6 \text{ Mb/s}$$

Problema 6.13 (Julio de 2013)

1. Tamaño del escalón:

$$\Delta = \frac{2 \cdot x_{sc}}{2^n} = \frac{2 \cdot 2,5}{2^{12}} = 1,220703125 \cdot 10^{-3} \text{ V}$$

Potencia de ruido de cuantificación:

$$n = \langle q^2 \rangle = \frac{\Delta^2}{12} = 1,241763433 \cdot 10^{-7} \text{ W}$$

2. Potencia de señal:

$$s = \frac{0,2^2}{2} + \frac{0,5^2}{2} = 0,145 \text{ W}$$

Relación señal a ruido de cuantificación:

$$\left(\frac{s}{n} \right)_q = 1167694,234 \text{ v.p.} \rightarrow 60,7 \text{ dB}$$

También se puede trabajar con la fórmula logarítmica, pero es incómodo calcular el valor de pico de la señal (0,698293692 V).

3. Hay que pasar de 12 a 9 bits, es decir: ganar 3 bits con la ganancia de compansión.

$$6 \cdot \delta n = G_c$$

$$6 \cdot 3 = 20 \log \left(\frac{A}{1 + \log A} \right)$$

$$10^{18/20} = \frac{A}{1 + \log A}$$

Se prueban valores, y tras un par de iteraciones se llega al resultado:

$$A \approx 36,5$$

4. Frecuencia de muestreo:

$$f_m = 2,5 \cdot 2 \cdot 1200 = 6000 \text{ Hz}$$

$$t_0 = 164/f_m$$

$$x(t_0) = -0,4964339508 \text{ V}$$

Escalón de cuantificación:

$$K = E \left[\frac{|x(t_0)|}{\Delta} \right] = 406 \rightarrow \text{escalón} - 406$$

Código binario:

$$0 \ 001 \ 1001 \ 0110$$

Tema 7

TX DIG. BB CON FILTRADO

Problema 7.1

1. Vamos a relacionar el ancho de banda del canal banda base con el régimen binario. El ancho de banda de un coseno alzado es:

$$B = W(1 + \alpha)$$

Donde W debe cumplir el criterio de Nyquist para evitar la IIS:

$$W = \frac{R_s}{2}$$

$$B = \frac{R_s}{2}(1 + \alpha)$$

La relación entre régimen binario y simbólico es:

$$k = \log_2(M) = \frac{R_b}{R_s}$$

$$B = \frac{R_b}{2 \cdot k}(1 + \alpha)$$

Sustituimos valores para nuestro sistema binario (no se debe confundir el número de bits por símbolo del codificador de línea con el número de bits por muestra del cuantificador):

$$k = \log_2(2) = 1 \text{ bits/símbolo}$$

$$100(k) = \frac{R_b}{2 \cdot 1}(1 + 0,6)$$

$$R_b = 125 \text{ kbps}$$

No tenemos ancho de banda para transmitir más deprisa.

2. A partir del régimen binario del MIC sacamos la frecuencia de muestreo:

$$R_b = n \cdot f_m$$

$$32 = 2^n \rightarrow n = 5 \text{ bits/muestra}$$

$$125(k) = 5 \cdot f_m$$

$$f_m = 25 \text{ kHz}$$

Y ahora aplicamos el teorema del muestreo:

$$f_m \geq 2W \quad (\text{esta } W \text{ no tiene nada que ver con la anterior})$$

$$25(k) = 2W$$

$$W = 12,5 \text{ kHz}$$

Es el ancho de banda máximo que puede tener una información analógica de entrada para que quepa como señal MIC en el ancho de banda disponible para la transmisión.

Problema 7.2 (Septiembre de 1993)

1. La señal analógica original ocupa 8 kHz, pero el filtrado paso bajo antialiasing reduce su ancho de banda a $W = 4$ kHz, dejando un espectro con forma de casita. Aplicamos el teorema del muestreo:

$$f_m = 2W = 2 \cdot 4(k) = 8 \text{ kHz}$$

2. La señal muestreada tiene un espectro constituido por subespectros desplazados a $\pm n \cdot f_m$. El resultado se observa en la figura 7.1.

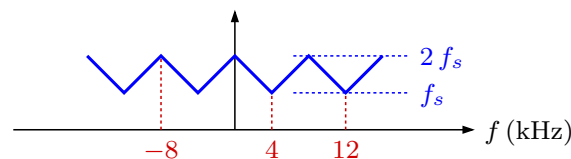


Figura 7.1: Espectro a la salida del muestreador.

El hecho de que la suma de los subespectros no sea plana es irrelevante: aquí no estamos aplicando el criterio de Nyquist, sino que estamos realizando una conversión A/D con el teorema del muestreo.

3. No sería aconsejable el uso del compresor, porque los valores por encima de 0,1 voltios se comprimen en el compresor. Como resultado se obtendría un MIC cuya calidad básica (resolución del cuantificador) se correspondería con menos bits (escalones más grandes, más error de cuantificación).

4. Determinamos la zona que corresponde a la muestra, y la pasamos por el compresor. Como siempre, operamos en el primer cuadrante y acarreamos el signo aparte:

$$|x|(V) = 0,3 > 0,1 \rightarrow \text{zona de pendiente baja}$$

$$C(x) = -\frac{5 \cdot 0,3 + 4}{9} = -0,6\hat{1} \text{ V}$$

Calculamos el escalón de cuantificación:

$$\Delta = \frac{2 \cdot 1}{2^{12}} = 4,8828125 \cdot 10^{-4} \text{ V}$$

$$K = -E \left[\frac{0,6\hat{1}}{4,8828125 \cdot 10^{-4}} \right] \boxed{\text{mensaje}} 1252$$

Codificamos en binario simétrico:

$$K = -1252 \rightarrow 0-10011100011 \boxed{\text{mensaje}}$$

5. Nuestro sistema MIC tiene un régimen binario determinado. Por lo tanto, el régimen simbólico también es un parámetro fijo.

$$R_b = n \cdot f_m = 12 \cdot 8(\text{k}) = 96 \text{ kb/s}$$

$$M = 2 \rightarrow k = 1 \text{ bit/símbolo}$$

$$R_s = R_b = 96 \text{ kbaudios}$$

Para evitar la IIS imponemos el criterio de Nyquist en el dominio del tiempo: si mandamos un símbolo en $t = 0$, el siguiente símbolo podrá situarse en los nulos conjuntos de h_1 y h_2 :

$$T_s = \frac{1}{R_s} = 2T, 4T, 6T, \dots$$

Despejando T :

$$T = \frac{1}{2R_s}, \frac{1}{4R_s}, \frac{1}{6R_s}, \dots$$

Y el valor máximo de T que permite transmitir sin IIS es:

$$T = \frac{1}{2R_s}$$

Problema 7.3 (Junio de 1994)

1. En la figura 7.2 se observa la estructura de trama.

Tiempo de trama, tiempo de bit y tiempo de canal:

$$f_m = f_{Nyq} = 2W = 2 \cdot 10(\text{k}) = 20 \text{ kHz}$$

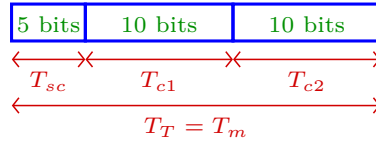


Figura 7.2: Estructura de trama.

$$T_T = T_m = 1/f_m = 50 \text{ } \mu\text{s}$$

$$N_T = 2 \cdot 10 + 5 = 25 \text{ bits/trama}$$

$$T_b = T_T/N_T = 2 \text{ } \mu\text{s}$$

$$T_c = 10 T_b = 20 \text{ } \mu\text{s (información)}$$

$$T_{sc} = 5 T_b = 10 \text{ } \mu\text{s (señalización y control)}$$

2. Muestras:

$$x_a = x(T_m) = 2 \cos(2\pi \cdot 1000 \cdot 50 \cdot 10^{-6}) = 1,902113 \text{ V}$$

$$x_b = x(T_m) = 0,5 \text{ V}$$

Escalón de cuantificación para cada muestra:

$$\Delta = \frac{2 x_{sc}}{L} = \frac{2 \cdot 2}{2^{10}} = \frac{1}{256} \text{ V}$$

$$K_a = +E\left(\frac{|x_a|}{\Delta}\right) = +486$$

$$K_b = +E\left(\frac{|x_b|}{\Delta}\right) = +128$$

Palabra binaria asignada a cada muestra:

$$K_a \rightarrow 1-111100110$$

$$K_b \rightarrow 1-010000000$$

Trama con las segundas muestras:

$$\text{XXXXX } 1-111100110 \text{ } 1-010000000$$

3. Valores de reconstrucción:

$$\hat{x}_a = +\Delta (K_a + 0,5) = +\frac{486,5}{256} = +1,900391 \text{ V}$$

$$\hat{x}_b = +\Delta (K_b + 0,5) = +\frac{128,5}{256} = +0,501953 \text{ V}$$

Errores de cuantificación (en valor absoluto):

$$|q_a| \approx 1,722 \cdot 10^{-3}$$

$$|q_b| \approx 1,953 \cdot 10^{-3} \text{ (vale exactamente } \Delta/2)$$

4. Ancho de banda mínimo:

$$M = 2 \rightarrow k = 1 \text{ bit/símbolo}$$

$$R_s = R_b = 1/T_b = 500 \text{ kbaudios}$$

$$B = \frac{R_s}{2} (1 + \alpha) = \frac{500(k)}{2}, (1 + 0,5) = 375 \text{ kHz}$$

Problema 7.4 (Junio de 1994)

1. Régimen binario del múltiplex:

$$f_m = 32 \text{ kHz}$$

$$T_T = T_m = 1/f_m = 31,25 \text{ } \mu\text{s}$$

$$N_T = 8 + 16 + 16 = 40 \text{ bits/trama}$$

$$R_b = N_T \cdot f_m = 1280 \text{ kb/s}$$

2. Escalones de cuantificación de las dos muestras:

$$\Delta = \frac{2 \cdot 1}{2^{16}} = \frac{1}{2^{15}} \text{ V}$$

$$K_I = +E \left(\frac{0,15}{1/2^{15}} \right) = +4915$$

$$K_D = +E \left(\frac{0,74}{1/2^{15}} \right) = +24248$$

Palabras binarias:

$$K_I = +4915 \rightarrow 1-001001100110011$$

$$K_D = +24248 \rightarrow 1-101111010111000$$

Contenido de la primera trama:

$$10110001 \ 1-001001100110011 \ 1-101111010111000$$

3. Valor de reconstrucción de la muestra del canal derecho:

$$\hat{x}_D = +\Delta (K_I + 0,5) = +\frac{24248,5}{2^{15}} = +0,740005493 \text{ V}$$

Error de cuantificación de la muestra del canal derecho (en valor absoluto):

$$|q_D| = |x_D - \hat{x}_D| \approx 5,5 \cdot 10^{-6} \text{ V}$$

4. Para evitar IIS hay que cumplir el criterio de Nyquist, cuya solución de menor ancho de banda es el canal de Nyquist. Luego queremos que la cascada de filtro conformador, medio y filtro receptor sea un filtro ideal paso bajo con ancho de banda $W = 1/(2T)$. Como el filtro conformador es un pulso cuadrado temporal, su transferencia será una sinc:

$$U(f) = T \text{ sinc}(fT)$$

La cascada de los tres cuadripolos queda:

$$\Pi\left(\frac{f}{1/T}\right) = U(f) \cdot M(f) \cdot H(f)$$

Sustituimos y despejamos la transferencia del filtro receptor:

$$H(f) = \begin{cases} \frac{10^{[\alpha(f)/20]} \exp[+j\phi(f)]}{T \text{ sinc}(fT)} ; & |f| \leq \frac{1}{2T} \\ 0 ; & \text{resto} \end{cases}$$

5. Cuando hay error en el instante de muestreo, interesa que los lóbulos de la sinc se amortigüen deprisa. Esto se consigue con el mayor ancho de banda posible, lo que implica $\alpha = 1$.

Problema 7.5 (Septiembre de 1995)

1. Régimen binario:

$$f_m = 8 \text{ kHz}$$

$$N_T = 8 + 8 + 30 \cdot 12 = 376 \text{ bits/trama}$$

$$R_b = N_T \cdot f_m = 3008 \text{ kbps}$$

2. Tiempo de bit:

$$T_b = \frac{1}{R_b} \approx 0,3324468 \text{ } \mu\text{s}$$

Tiempo de canal vocal:

$$T_c = 12 \cdot T_b \approx 3,98936 \text{ } \mu\text{s}$$

Tiempo de canal de señalización y de canal de alineación (coinciden):

$$T_{sa} = 8 \cdot T_b \approx 2,65957 \text{ } \mu\text{s}$$

3. Un compresor Ley A, con $A = 87,6$, permite ahorrar 4 bits manteniendo la calidad. Por lo tanto, el nuevo cuantificador no uniforme necesita:

$$n = 12 - 4 = 8 \text{ bits/muestra}$$

4. Nuevo régimen binario:

$$N_T = 8 + 8 + 30 \cdot 8 = 256 \text{ bits/trama}$$

$$R_b = N_T \cdot f_m = 2048 \text{ kbps}$$

5. El codificador de línea tiene $M = 4$ símbolos, de manera que:

$$k = 2 \text{ bits/símbolo}$$

$$R_s = \frac{R_b}{k} = \frac{2048(\text{k})}{2} = 1024 \text{ kbaudios}$$

Ancho de banda del canal de Nyquist:

$$W = \frac{R_s}{2} = 512 \text{ kHz}$$

6. Ahora los 512 kHz se corresponden con un coseno alzado. El régimen binario que permite el canal es:

$$B = \frac{R_b}{2 \cdot k} (1 + \alpha)$$

$$512(\text{k}) = \frac{R_b}{2 \cdot 4} (1 + 0,5)$$

$$R_b = 1365,3 \text{ kb/s}$$

Como la trama tiene 256 bits, la frecuencia de muestreo ha de ser:

$$R_b = N_t \cdot f_m$$

$$1365,3(\text{k}) = 256 \cdot f_m$$

$$f_m = 5,3 \text{ kHz}$$

Y por el teorema del muestreo, la señal analógica sólo puede ocupar:

$$f_m = 2W$$

$$5,3(\text{k}) = 2 \cdot W$$

$$W = 2,6 \text{ kHz}$$

Con ese ancho de banda la voz se transmite con poca calidad.

Problema 7.6 (Febrero de 1996)

1. Las señales $c(t)$ y $d(t)$ se modulan (por separado) en DBL, y se multiplexan en cuadratura, dando lugar a $(c + d)(t)$, que es paso banda. El resultado se multiplexa en frecuencia con $b(t)$, formando $(b + c + d)(t)$. Por último, $a(t)$ y la multiplexación $(b + c + d)(t)$ se multiplexan en el tiempo mediante un muestreador que entrega la señal final $s(t)$.
2. Las señales $a(t)$, $b(t)$, $c(t)$ y $d(t)$ tienen todas el mismo ancho de banda, W . Para aprovechar lo mejor posible el espectro, las modulaciones DBL se deben realizar con subportadoras (coseno y seno) de frecuencia $2W$; de esa manera los subespectros modulados paso banda de $c(t)$ y $d(t)$ se sitúan a continuación del subespectro BB de $b(t)$. En la figura 7.3 se pueden ver los espectros de las multiplexaciones que llegan a las entradas 1 y 2 del muestreador.

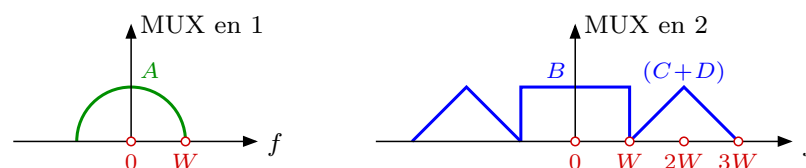


Figura 7.3: Espectros en las entradas 1 y 2 del muestreador.

Al muestrear (idealmente) los espectros originales se repiten como subespectros situados en $n f_m$. En la figura 7.4 tenemos una primera solución al problema. Como la multiplexación que ocupa más (entrada 2) tiene un ancho de banda $3W$, con:

$$f_m = 6W$$

Se evita el aliasing.

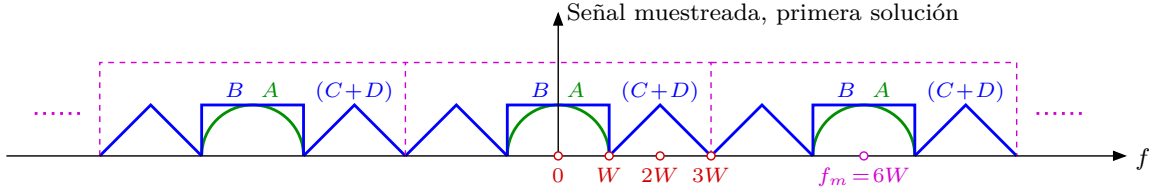


Figura 7.4: Espectro de la señal muestreada. Primera solución.

La frecuencia de muestreo en nuestro sistema es:

$$T_m = 10 + 50 = 60 \mu s$$

$$f_m = 1/T_m = 16.6 \text{ kHz}$$

Por lo que el ancho de banda de las informaciones sería:

$$16.6(k) = 6 \cdot W$$

$$W = 2.7 \text{ kHz}$$

Y el oscilador trabajaría a:

$$f_{OL} = 2W = 5.5 \text{ kHz}$$

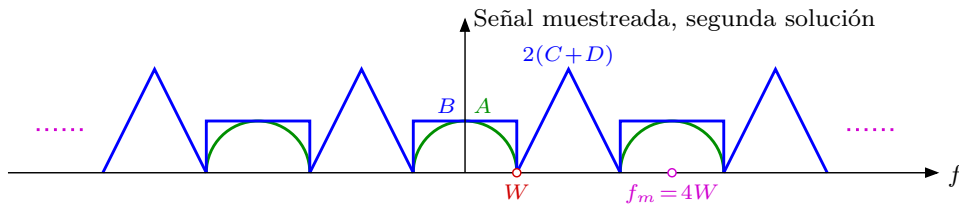


Figura 7.5: Espectro de la señal muestreada. Segunda solución.

Pero si inspeccionamos atentamente los subespectros desplazados, la parte paso banda (DBL) se repite en la parte alta de un subespectro y en la baja del siguiente, ocupando ancho de banda innecesariamente. Así surge una segunda solución, más óptima, en la que se superponen $2W$ los subespectros desplazados (se superponen los triángulos). Como se observa en la figura 7.5, ahora la frecuencia de muestreo se puede bajar hasta:

$$f_m = 4W$$

De manera que las informaciones podrán ocupar:

$$16\hat{6}(k) = 4 \cdot W$$

$$W = 4,16 \text{ kHz}$$

Y el oscilador trabajará a:

$$f_{OL} = 2W = 8,3 \text{ kHz}$$

3. En la figura 7.6 se observa el esquema del receptor. Requiere sincronización temporal en el conmutador, y de frecuencia y fase en el oscilador (demodulación coherente de DBL).

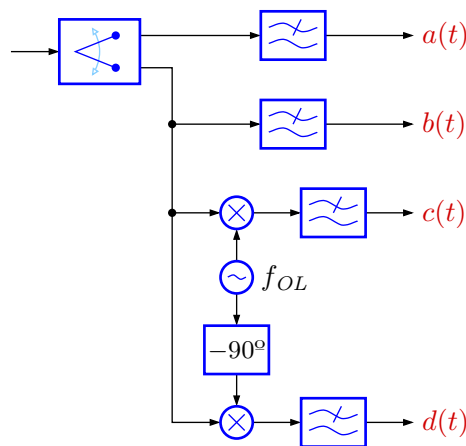


Figura 7.6: Esquema del receptor.

Problema 7.7 (Diciembre de 1996)

1. Densidades espectrales de ruido a la salida, en función de los factores de ruido:

$$G_{ns} = k T_0 g f$$

$$G_{ns}(\text{dBm/Hz}) = -174(\text{dBm/Hz}) + G(\text{dB}) + F(\text{dB})$$

Sustituimos y despejamos:

$$-130 = -174 + 30 + F_A \rightarrow F_A = 14 \text{ dB} \rightarrow f_A \approx 25,1 \text{ v.p.}$$

$$-120 = -174 + 36 + F_B \rightarrow F_B = 18 \text{ dB} \rightarrow f_B \approx 63,1 \text{ v.p.}$$

2. Se debe colocar primero el amplificador con menor figura de ruido (ambos tienen suficiente ganancia), para que el conjunto tenga sólo el ruido del primer amplificador.

$$f_T = f_A + \frac{f_B - 1}{g_A} \approx f_A$$

$$F_T \approx 14 \text{ dB}$$

3. Con una entrada uniformemente distribuida, y suponiendo que se trabaja a fondo de escala, la calidad sólo depende de la resolución del cuantificador:

$$\left(\frac{S}{N}\right)_q \approx 6 \cdot 8 = 48 \text{ dB}$$

4. Régimen binario total que admite el ancho de banda disponible, con una transmisión binaria banda base:

$$B = \frac{R_{bT}}{2} (1 + \alpha)$$

$$20(M) = \frac{R_{bT}}{2} (1 + 0,6)$$

$$R_{bT} = 25 \text{ Mbps}$$

Régimen binario de un canal:

$$R_{bi} = n \cdot f_m = 8 \cdot 10(k) = 80 \text{ kbps}$$

Número máximo de canales:

$$N = \frac{25 \cdot 10^6}{80 \cdot 10^3} = 312,5 \rightarrow 312 \text{ canales}$$

5. Podemos: a) disminuir α ; b) aumentar el ancho de banda, B ; c) disminuir el número de bits por muestra o la frecuencia de muestreo.
6. Densidad de ruido total equivalente a la salida del MIC-MDT:

$$f_T = 25,1 \text{ v.p. (los 2 amplificadores en cascada)}$$

$$g_T = 10^{6,6} \approx 3,98 \cdot 10^6 \text{ v.p.}$$

$$f_c = a = 10^{11,4} \approx 2,51 \cdot 10^{11} \text{ v.p. (cable)}$$

$$f = f_T + \frac{f_c - 1}{g_T} \approx 63100 \text{ v.p.} \rightarrow 48,0 \text{ dB}$$

$$N_0 = k T_0 f$$

$$N_0 = -174 + 48 = -126 \text{ dBm/Hz} \rightarrow -156 \text{ dBW/Hz}$$

Energía por bit, también a la salida del MIC-MDT:

$$E_b = \frac{p}{R_b}$$

$$E_b = -32 - 30 - 10 \log(25 \cdot 10^6) = -136,0 \text{ dBJ (equivalente a dBm/Hz)}$$

Relación E_b/N_0 :

$$\frac{E_b}{N_0} = -136,0 - (-156,0) = 20,0 \text{ dB}$$

(Se puede llevar E_b y N_0 a través de los amplificadores y el cable; el resultado es idéntico.)

Problema 7.8 (Junio de 1999)

1. El bloque 1 realiza un filtrado anti-solapamiento.
2. La frecuencia del bloque 2 sí cumple el teorema del muestreo. Por supuesto, se puede muestrear más deprisa (por lo que respecta al teorema), pero ocupando más ancho de banda.

$$f_m \geq f_{Nyq} = 2W$$

$$f_m = 3W > 2W \quad (\text{OK})$$

3. La característica del expansor es:

$$x = 1 - \cos\left(\frac{\pi y}{2}\right) \quad (\text{en el primer cuadrante})$$

4. La señal original, $x(t_0)$, toma un valor desconocido dentro del intervalo que corresponde al escalón asignado. Primero calculamos el escalón de cuantificación y el nivel de reconstrucción correspondiente:

$$1-000000010101010 \rightarrow K = +170$$

$$\Delta = \frac{2x_{sc}}{L} = \frac{2 \cdot 1}{2^{16}} = \frac{1}{2^{15}} \text{ V}$$

$$y_0 = +\Delta(K + 0,5) = +5,20324707 \cdot 10^{-3} \text{ V}$$

Si pasamos por el compresor hacia atrás (que coincide analíticamente con hacer una expansión):

$$x_0 = 1 - \cos\left(\frac{\pi y_0}{2}\right) = +3,340075144 \cdot 10^{-5} \text{ V}$$

Conseguimos el valor central que da lugar al escalón K , pero se obtendrá el mismo resultado con los extremos del escalón:

$$y_{max} = y_0 + \Delta/2 = 5,218505859 \cdot 10^{-3} \text{ V}$$

$$y_{min} = y_0 - \Delta/2 = 5,187988281 \cdot 10^{-3} \text{ V}$$

Que llevados por el compresor hacia atrás, nos dan los límites del margen de valores buscado:

$$x_{max} = 1 - \cos\left(\frac{\pi y_{max}}{2}\right) = +3,359693641 \cdot 10^{-5} \text{ V}$$

$$x_{min} = 1 - \cos\left(\frac{\pi y_{min}}{2}\right) = +3,320514092 \cdot 10^{-5} \text{ V}$$

5. Suponemos una secuencia “111”, donde el “1” central es el deseado. La respuesta impulsiva del canal es:

$$h(t) = 2WA \operatorname{sinc}(2Wt)$$

con nulos en:

$$\frac{1}{2W}, \frac{2}{2W}, \frac{3}{2W}, \text{ etc.}$$

Como el tiempo de símbolo es:

$$T_s = \frac{1}{R_s} = \frac{1}{1,5W} = \frac{4}{3}$$

existe interferencia intersimbólica, tal y como se observa en la figura 7.7.

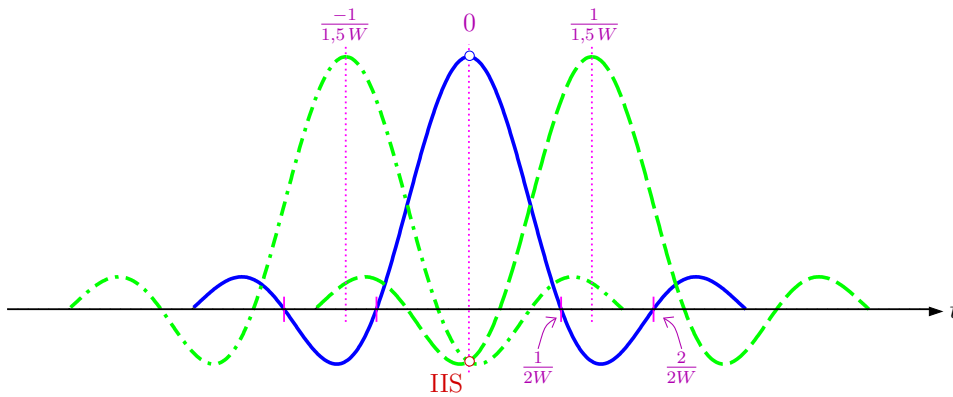


Figura 7.7: Formas temporales de señal.

Para calcular el valor de la IIS basta con calcular la respuesta impulsiva en $t = T_s$. Como hay dos señales interferentes, multiplicamos el resultado por dos:

$$h\left(\frac{1}{1,5W}\right) = 2WA \operatorname{sinc}\left(\frac{2W}{1,5W}\right) \approx 2WA(-0,207)$$

$$\text{IIS} = 2h(T_s) \approx 2WA(-0,413)$$

La IIS se evita con $R_b = (2W)/n$. Por ejemplo, con $R_b = 2W$, W , $W/2$, etc.

Problema 7.9 (Septiembre de 2001)

1. La señal de entrada está uniformemente distribuida. Como es lógico, optamos por trabajar a fondo de escala. Entonces, la calidad señal a ruido de cuantificación sólo tiene el término de resolución del cuantificador:

$$\left(\frac{S}{N}\right)_q (\text{dB}) \approx 6 \cdot n + 0 + 0$$

$$45 \geq 6 \cdot n$$

$$n \geq 7,5 \rightarrow n = 8 \text{ bits/muestra}$$

2. Escalón de cuantificación:

$$\Delta = \frac{2x_{sc}}{L} = \frac{2 \cdot 1}{2^8} = 7,8125 \cdot 10^{-3} \text{ V}$$

Palabra binaria y error de cuantificación de la muestra $x_a = 0,4 \text{ V}$:

$$K_a = +E\left(\frac{|x_a|}{\Delta}\right) = +51$$

$$K_a = +51 \rightarrow 1-0110011$$

$$\hat{x}_a = +\Delta (K_a + 0,5) = +0,40234375 \text{ V}$$

$$|q_a| = |x_a - \hat{x}_a| = 0,00234375 \text{ V}$$

Palabra binaria y error de cuantificación de la muestra $x_b = -0,8 \text{ V}$:

$$K_b = -E\left(\frac{|x_b|}{\Delta}\right) = -102$$

$$K_b = -102 \rightarrow 0-1100110$$

$$\hat{x}_b = -\Delta (K_b + 0,5) = -0,80078125 \text{ V}$$

$$|q_b| = |x_b - \hat{x}_b| = 0,00078125 \text{ V}$$

Por supuesto, ambos errores no superan la mitad del escalón.

3. El mínimo lo impone el Teorema del Muestreo:

$$f_m \geq f_{Nyq} = 2W = 8 \text{ kHz}$$

El máximo viene dado por la limitación de ancho de banda a través del Criterio de Nyquist:

$$R_b = R_s$$

$$B = \frac{R_b}{2} (1 + \alpha)$$

$$80(\text{k}) \geq \frac{R_b}{2} (1 + \alpha)$$

$$R_b \leq \frac{160(\text{k})}{(1 + \alpha)}$$

$$R_b(\text{máximo}) = 160 \text{ kb/s (con } \alpha = 0)$$

$$R_b = n \cdot f_m$$

$$160(\text{k}) \geq 8 \cdot f_m$$

$$f_m \leq 20 \text{ kHz}$$

4. Ahora formamos una multiplexación en f del MIC, en BB, y la DBL a continuación. Como el ancho de banda de la DBL tiene un valor fijo:

$$B_{DBL} = 2W = 8 \text{ kHz}$$

Del total disponible (80 kHz) nos queda para el MIC:

$$B_{MIC} = 80(\text{k}) - 8(\text{k}) = 72 \text{ kHz}$$

Por último, tenemos en cuenta que es un coseno alzado, y que debemos cumplir el criterio de Nyquist:

$$R_b = n \cdot f_m = 8 \cdot 10(\text{k}) = 80 \text{ kbps}$$

$$72(\text{k}) = \frac{80(\text{k})}{2} (1 + \alpha)$$

$$\alpha = 0,8$$

5. Ahora:

$$72(\text{k}) = \frac{R_b}{2} (1 + 0,9)$$

$$R_b \approx 75,79 \text{ kbps}$$

$$75,79(\text{k}) \approx 8 \cdot f_m$$

$$f_m \approx 9,47 \text{ kHz}$$

Problema 7.10 (Junio de 2003)

1. El filtro paso bajo anti-solapamiento debe dejar pasar la señal $x(t)$ sin distorsionarla. Para ello:

$$W = 15 \text{ kHz}$$

Para no perder información, la frecuencia de muestreo ha de cumplir el Teorema del Muestreo:

$$f_m = 2W = 30 \text{ kHz}$$

El régimen binario queda:

$$R_b = n \cdot f_m = 8 \cdot 30(\text{k}) = 240 \text{ kHz}$$

Para el ancho de banda tenemos en cuenta que hay 4 símbolos, cada uno de 2 bits:

$$M = 4 \quad \rightarrow \quad R_s = \frac{R_b}{2} = 120 \text{ kbaudios}$$

2. Primero calculamos el ancho de banda (en banda base) de un Canal de Nyquist adecuado para el régimen simbólico:

$$W' = \frac{R_s}{2} = 60 \text{ kHz}$$

Ahora calculamos el ancho de banda del filtro en coseno alzado:

$$B = W'(1 + \alpha) = 90 \text{ kHz}$$

3. Para transmitir sin IIS el R_s tiene que ser un submúltiplo del régimen simbólico máximo (120 kbaudios). Aunque 100 kbaudios sea menor que 120 kbaudios, no es un submúltiplo. Luego tenemos IIS.
4. Calculamos el escalón y el valor de reconstrucción de la señal de interés:

$$1 - 0000111 \rightarrow \text{escalón } K = +7$$

$$\Delta = \frac{2x_{sc}}{2^n} = \frac{2}{2^8} = 7,8125 \text{ mV}$$

$$\hat{x} = +\Delta (K + 0,5) = +0,05859375 \text{ V}$$

El mismo escalón corresponde a reconstrucciones que no difieren en más de $\Delta/2$:

$$\hat{x}_{max} = \hat{x} + \frac{\Delta}{2} = 0,0625000 \text{ V}$$

$$\hat{x}_{min} = \hat{x} - \frac{\Delta}{2} = 0,0546875 \text{ V}$$

Ahora ya sólo queda pasar esos valores extremos (hacia atrás) por el compresor inicial (aplicando la fórmula que corresponda, según el tramo que ocupe el valor reconstruido):

$$\frac{A \cdot (1/A)}{1 + \ln A} \approx 0,203582 \text{ V}$$

estamos en tramo lineal

$$\hat{x}_{max} = \frac{A \cdot x_{max}}{1 + \ln A} \rightarrow x_{max} = +0,0061400 \text{ V}$$

$$\hat{x}_{min} = \frac{A \cdot x_{min}}{1 + \ln A} \rightarrow x_{min} = +0,0053725 \text{ V}$$

Problema 7.11 (Septiembre de 2004)

El sistema cumple el teorema del muestreo:

$$f_{Nyq} = 2W = 2 \cdot 6(\text{k}) = 12 \text{ kHz}$$

$$f_m = 14 \text{ kHz} > f_{Nyq}$$

Régimen binario que entrega el MIC:

$$R_b = n \cdot f_m = 10 \cdot 14(\text{k}) = 140 \text{ kb/s}$$

Régimen simbólico:

$$M = 4 \rightarrow k = \log_2(4) = 2 \text{ bits/símbolo}$$

$$R_s = \frac{R_b}{k} = \frac{140(\text{k})}{2} = 70 \text{ kbaudios}$$

Para evitar IIS aplicamos el criterio de Nyquist en banda base:

$$B_{BB} = \frac{R_s}{2} (1 + \alpha) = \frac{70(\text{k})}{2} (1 + 0,2) = 42 \text{ kHz}$$

Y como la modulación es lineal:

$$B = 2 \cdot B_{BB} = 84 \text{ kHz}$$

Problema 7.12 (Julio de 2011)

Hay que comprobar si existe un régimen simbólico, R , tal que colocando subespectros del canal en $0R, \pm 1R \pm 2R \dots$ la suma es constante para todo f (basta con comprobarlo desde $-R/2$ hasta $R/2$). En la figura 7.8 se observa claramente que con $R = W$ la suma de subespectros es constante, luego cumple el criterio de Nyquist y es posible la transmisión sin IIS. También se observa en la figura que no existe ningún valor de R mayor que cumpla (aunque sí se puede TX sin IIS con velocidades menores submúltiplos). Por lo tanto, la velocidad máxima de TX sin IIS es $R = W$.

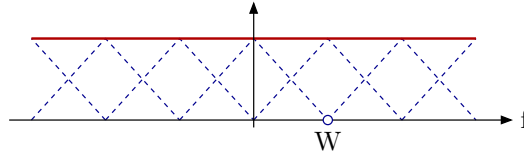


Figura 7.8: Criterio de Nyquist en f : suma de subespectros.

Problema 7.13 (Julio de 2012)

1. Régimen binario:

$$N_T = 30 \cdot 16 + 2 \cdot 8 = 496 \text{ bits/trama}$$

$$R_b = N_T \cdot f_m = 496 \cdot 16(\text{k}) = 7,936 \text{ Mbps}$$

Ancho de banda:

$$M = 2 \rightarrow R_s = R_b = 7,936 \text{ Mbaudios}$$

$$B = \frac{R_s}{2} (1 + \alpha) = \frac{7,936(\text{M})}{2} 1,2 = 4,7616 \text{ MHz}$$

2. Número de bits por muestra:

$$3,6096(\text{M}) = \frac{R_s}{2} 1,2 \rightarrow R_s = 6,016 \text{ Mbaudios}$$

$$R_b = R_s = 6,016 \text{ Mbps}$$

$$6,016(\text{M}) = (30 \cdot n + 2 \cdot 8) 16(\text{k})$$

$$n = 12 \text{ bits/muestra}$$

Calidad:

$$\left(\frac{S}{N}\right)_q \approx 6 \cdot n = 72 \text{ dB}$$

3. En la figura 7.9 se observa la señal HDB3.

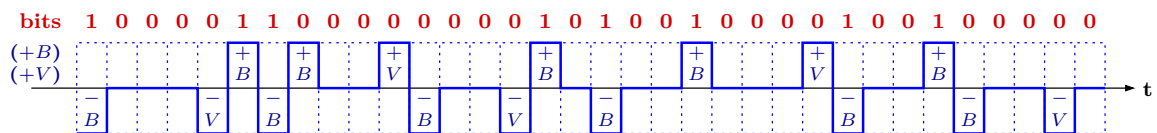


Figura 7.9: Señal HDB3.

4. Nuevo régimen simbólico:

$$k = \log_2(4) = 2$$

$$R_s = \frac{R_b}{2} = \frac{6,016(\text{M})}{2} = 3,008 \text{ Mbaudios}$$

En la figura 7.10 se observa el diagrama de ojos. Para obtener la figura se ha utilizado el programa WinIQSIM. Los 3 ojos ocupan desde $-1,5$ hasta $1,5$ en el eje horizontal. Como hay 4 amplitudes diferentes aparecen 3 ojos apilados en vertical.

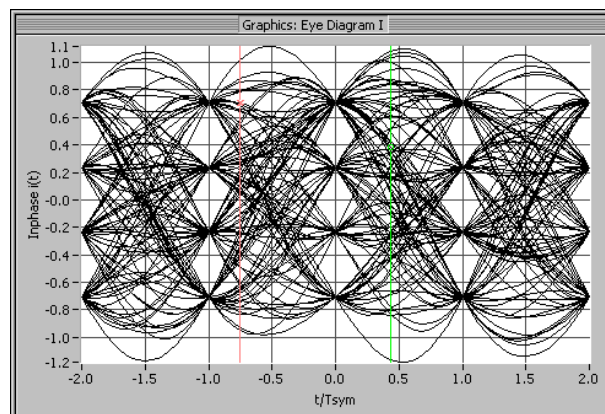


Figura 7.10: Diagrama de ojos.

Problema 7.14 (Enero de 2013)

1. El filtro anti-solapamiento debe dejar pasar la señal. Por lo tanto:

$$W = 15 \text{ kHz}$$

Frecuencia de muestreo:

$$f_m = 1,1 \cdot f_{Nyq} = 1,1 \cdot 2 \cdot W = 33 \text{ kHz}$$

Régimen binario:

$$R_b = n \cdot f_m = 264 \text{ kbps}$$

2. Con 4 símbolos hay $k = 2$ bits por símbolo. Régimen simbólico:

$$R_s = R_b/k = 132 \text{ kbaudios}$$

Criterio de Nyquist:

$$W = R_s/2 = 66 \text{ kHz}$$

Factor de redondeo del coseno alzado:

$$B = W(1 + \alpha)$$

$$100 = 66(1 + \alpha) \rightarrow \alpha = 0,51$$

3. Tenemos 8 bits por muestra, con una señal uniformemente distribuida, y trabajando a fondo de escala. En estas circunstancias la calidad es:

$$G_c = 20 \log \left[\frac{50}{1 + \ln(50)} \right] \approx 20,2 \text{ dB}$$

$$(S/N)_q \approx 6n + G_c = 68,2 \text{ dB}$$

4. Comprimos la muestra:

$$1/A = 0,02 \rightarrow x = 0,015 \text{ está en zona lineal}$$

$$C(x) = \frac{Ax}{1 + \ln(A)} = 0,152686581 \text{ V}$$

Cuantificamos:

$$\Delta = \frac{2x_{sc}}{2^n} = 0,0078125 \text{ V}$$

$$K = E \left[\frac{C(x)}{\Delta} \right] = +19 \rightarrow 10010011$$

En la figura 7.11 vemos la señal que transmite la palabra de 8 bits. Cada 2 bits dan lugar a un símbolo:

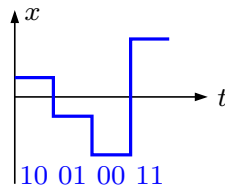


Figura 7.11: Señal en el punto A.

La reconstrucción de la muestra es:

$$C(\hat{x}) = \Delta (K + 0,5) = 0,15234375 \text{ V}$$

Que es el centro del escalón que ha cuantificado la muestra. Los extremos del escalón limitan el margen de valores que producen la misma salida:

$$C(x_s) = C(\hat{x}) + \Delta/2 = 0,15625$$

$$C(x_i) = C(\hat{x}) - \Delta/2 = 0,1484375$$

Y expandimos para obtener los valores a la entrada del sistema. Como ambos extremos están en la zona lineal:

$$x_s = \frac{1 + \ln(A)}{A} C(x_s) = 0,015350072 \text{ V}$$

$$x_i = \frac{1 + \ln(A)}{A} C(x_i) = 0,014582568 \text{ V}$$

Problema 7.15 (Junio de 2013)

1. Calculamos el régimen simbólico del MIC:

$$f_m = 1,2 \cdot f_{Nyq} = 1,2 \cdot 2 \cdot 5(\text{k}) = 12 \text{ kHz}$$

$$R_b = n \cdot f_m = 10 \cdot 12(\text{k}) = 120 \text{ kbps}$$

$$\text{HDB2} \rightarrow M = 2 \rightarrow 1 \text{ bit por símbolo}$$

$$R_s = R_b = 120 \text{ kbaudios}$$

Para evitar IIS aplicamos el Criterio de Nyquist en el ancho de banda de un coseno alzado:

$$B = W(1 + \alpha) = \frac{R_s}{2}(1 + \alpha) = \frac{120(\text{k})}{2}(1 + 0,2) = 72 \text{ kHz}$$

2. Pasamos la muestra recuperada por el expansor hacia atrás:

$$\frac{1}{A} = \frac{1}{50} = 0,02 > |\hat{x}| \rightarrow \text{zona lineal}$$

$$C(\hat{x}) = \frac{50 \cdot \hat{x}}{1 + \ln(50)} = -0,0126953125 \text{ V}$$

Calculamos el escalón en que se cuantifica la muestra, k :

$$\Delta = \frac{2 \cdot x_{sc}}{2^n} = \frac{2 \cdot 1}{2^{10}} = 1,953125 \cdot 10^{-3} \text{ V}$$

$$k = E \left\lceil \frac{|C(\hat{x})|}{\Delta} \right\rceil = 6 \rightarrow \text{escalón } -6$$

Palabra binaria:

0-000000110

3. Señal en línea (figura 7.12):

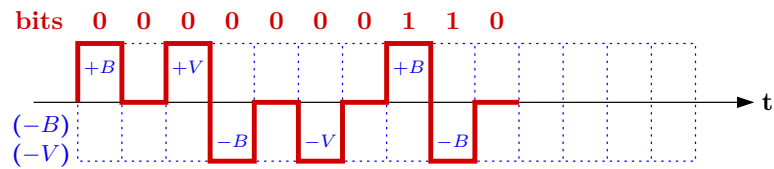


Figura 7.12: Señal HDB2.

Con la secuencia alternativa (figura 7.13):

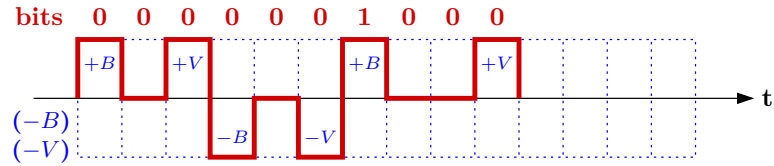


Figura 7.13: Secuencia de bits alternativa.

Tema 8

TX DIG. BB CON RUIDO

Problema 8.1 (Junio de 1996)

1. Cada una de las cuatro señales del codificador de línea ocupa 2 μs . Como hay 4 señales diferentes (4 símbolos), cada símbolo tendrá 2 bits. Por lo tanto:

$$T_b = T_s/2 = 1 \mu\text{s}$$

$$R_b = 1/T_b = 1 \text{ Mbps}$$

2. Tenemos que generar 4 formas temporales de señal que ocupan 2 μs , compuestas por 2 pulsos de 1 μs . Por simple inspección de las señales: $\phi_1 = -\phi_4$ y $\phi_2 = -\phi_3$ (son linealmente dependientes). Sin embargo, ϕ_1 y ϕ_2 son linealmente independientes (incluso son ortogonales, lo que asegura la independencia). Vemos que, en este caso, la dimensión del espacio de señales es 2. Lo más fácil es buscar un conjunto de 2 pulsos rectangulares que cubran todo el tiempo de los símbolos, sin solaparse entre ellos. Las señales candidatas a formar base son 2 pulsos: uno desde $t = 0$ hasta 1 μs , y otro desde 1 hasta 2 μs . En la figura 8.1 se observan dichos pulsos, $\psi_1(t)$ y $\psi_2(t)$.

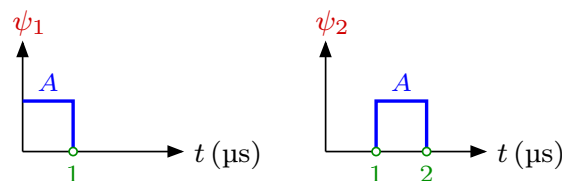


Figura 8.1: Base de dimensión 2.

Es evidente que $\psi_1(t)$ y $\psi_2(t)$ son ortogonales, porque no se solapan en el tiempo. Ahora tenemos que forzar que estén normalizados en energía, calculando la amplitud A necesaria. (La energía de un pulso rectangular temporal es igual a la potencia del pulso por el tiempo que ocupa, $E = p \cdot T$. Sobre una resistencia de 1 Ω la potencia —es una señal continua— viene dada por la amplitud al cuadrado.)

$$E_{\psi_1} = E_{\psi_2} = A^2 \cdot 1(\mu) = 1$$

$$A = 1000 \text{ V}$$

La base formada por $\psi_1(t)$ y $\psi_2(t)$ es ortonormal, y es inmediato comprobar que genera a las 4 señales ϕ_i .

3. El método general consiste en proyectar (producto escalar) cada señal ϕ_i sobre las señales de la base ψ_i . Pero es más sencillo buscar las coordenadas directamente. Veamos el proceso con ϕ_1 :

$$\phi_1 = c_{11} \psi_1 + c_{12} \psi_2$$

Para que ϕ_1 tenga 5 V desde 0 hasta 1 μ , necesitamos una coordenada $c_{11} = 5/1000$. El divisor 1000 normaliza en voltios a ψ_1 (que estaba normalizada en energía), y el factor 5 impone los 5 voltios. De forma similar, se calculan las demás coordenadas, y obtenemos:

$$\phi_1 = 5 \cdot 10^{-3} \cdot \psi_1 + 5 \cdot 10^{-3} \cdot \psi_2$$

$$\phi_2 = 5 \cdot 10^{-3} \cdot \psi_1 - 5 \cdot 10^{-3} \cdot \psi_2$$

$$\phi_3 = -5 \cdot 10^{-3} \cdot \psi_1 + 5 \cdot 10^{-3} \cdot \psi_2$$

$$\phi_4 = -5 \cdot 10^{-3} \cdot \psi_1 - 5 \cdot 10^{-3} \cdot \psi_2$$

En la figura 8.2 se observa la constelación resultante con la base escogida. La distancia desde cualquier punto (símbolo o señal) al origen es la raíz de su energía. Nótese que es una constelación en el transmisor.

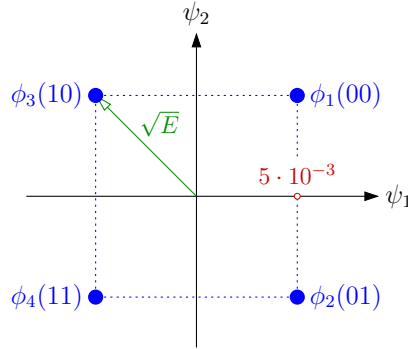


Figura 8.2: Constelación en el transmisor.

4. La densidad espectral de ruido a la entrada del detector es:

$$T_{e1} = T_0 (a - 1) \approx T_0 a$$

$$T_{e2} = T_0 (f - 1) \approx T_0 f$$

$$T_e = T_{e1} + T_{e2} a$$

$$N_0 = k T_e = k T_0 a (1 + f) \approx k T_0 a f$$

$$N_0 = 1,38 \cdot 10^{-23} \cdot 300 \cdot 10^{11,5} \cdot 1000 \approx 1,31 \cdot 10^{-6} \text{ W/Hz}$$

En el apartado anterior vimos que todos los símbolos tienen igual energía (igual distancia al origen). Para obtener esa energía, calculamos la distancia al origen (por Pitágoras) y la elevamos al cuadrado:

$$E_s = (\text{distancia})^2 = c_1^2 + c_2^2 = (5 \cdot 10^{-3})^2 + (5 \cdot 10^{-3})^2 = 5 \cdot 10^{-5} \text{ J}$$

Esta energía se ha calculado en el transmisor. Ahora tenemos que llevarla a la entrada del detector, pasando por el medio y el amplificador. La ganancia del conjunto es de 0 dB (ni gana ni atenúa), de manera que obtenemos el mismo resultado.

5. La rama superior del detector proyecta las señales recibidas sobre el eje ψ_1 , mientras que la rama inferior hace lo propio sobre el eje ψ_2 . Posteriormente, se toma una decisión binaria en cada una de las ramas: en la superior se decide respecto al primer bit del símbolo, y en la inferior respecto al segundo bit. Estas decisiones son totalmente independientes. Por último, un conversor paralelo/serie entrega la secuencia de información con los dos bits detectados.
6. Sobre cada bit del símbolo se realiza una detección binaria. Empezamos estudiando la decisión del primer bit (rama superior, proyectando sobre ψ_1):

Tenemos un sistema binario con una energía por bit $5 \cdot 10^{-3}$, como se observa en la figura 8.3.



Figura 8.3: Decisión binaria en el eje ψ_1 .

La probabilidad de error en una decisión binaria es:

$$P_b = \frac{1}{2} \operatorname{erfc}\left(\frac{d}{2\sqrt{N_0}}\right) = \frac{1}{2} \operatorname{erfc}\left(\frac{2 \cdot 5 \cdot 10^{-3}}{2\sqrt{1,31 \cdot 10^{-6}}}\right)$$

$$P_b = \frac{1}{2} \operatorname{erfc}(4,368) \approx \frac{1}{2} \cdot 7 \cdot 10^{-10} = 3,5 \cdot 10^{-10}$$

Sobre el segundo bit del símbolo se realiza una decisión análoga, y se obtiene la misma probabilidad de bit erróneo.

Como las dos decisiones (del primer bit y del segundo bit) son independientes e iguales (en P_b), la probabilidad de equivocarse en un bit cualquiera es siempre la misma, y vale:

$$P_b = 3,5 \cdot 10^{-10}$$

7. Cuando el número de resultados de un experimento es muy grande, podemos aproximar la probabilidad de un suceso dividiendo su ocurrencia por el número de experimentos realizados. Así, por ejemplo, la probabilidad de bit erróneo en un experimento en el que se mandan N_T bits y N_e son erróneos (suponiendo que $N_T \rightarrow \infty$) es:

$$P_b \approx \frac{N_e}{N_T}$$

En nuestro caso, conocemos la P_b y forzamos el número de bits erróneos a 1. De esta manera estamos observando una secuencia de N_T bits donde 1 es erróneo. Obviamente, N_T es el número medio de bits que enviamos para encontrar uno erróneo. Por lo tanto:

$$P_b = 3,5 \cdot 10^{-10} = \frac{1}{N_T} \rightarrow N_T = \frac{1}{3,5 \cdot 10^{-10}}$$

Conocemos el número medio de bits entre errores, y conocemos la duración de 1 bit. El tiempo medio transcurrido entre errores será:

$$t = N_T T_b = \frac{1 \cdot 10^{-6}}{3,5 \cdot 10^{-10}} = 2857 \text{ s}$$

Problema 8.2 (Junio de 1997)

1. Para un ruido N_0 fijo la mejor BER se obtendrá con la pareja de símbolos entre los que haya una distancia (d) mayor.

Realizamos la representación geométrica de las tres señales candidatas. Como:

$$s_3 = \frac{s_1 - s_2}{2}$$

Esta claro que son linealmente dependientes. Quitamos s_3 , y nos queda $\{s_1, s_2\}$ que son l.i., pues son ortogonales:

$$\langle s_1, s_2 \rangle = 0$$

Aunque podemos usar $\{s_1, s_2\}$ para construir la base, hemos preferido tomar los pulsos disjuntos de la figura 8.4, que son ortonormales.

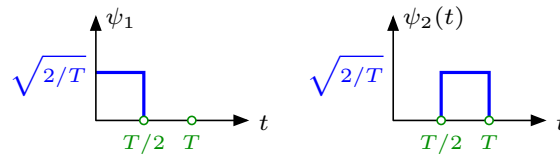


Figura 8.4: Base ortormal para $\{s_1, s_2, s_3\}$.

La representación resultante se observa en la figura 8.5, donde:

$$c = A \sqrt{T/2}$$

Queda claro que la pareja de símbolos más alejados es $\{s_2, s_3\}$, con:

$$d_{max} = d_{23} = \sqrt{(2c)^2 + c^2}$$

Este apartado también se puede resolver buscando la pareja de símbolos entre los que haya una energía, E_d , mayor. En la figura 8.6 se observan las señales diferencia.

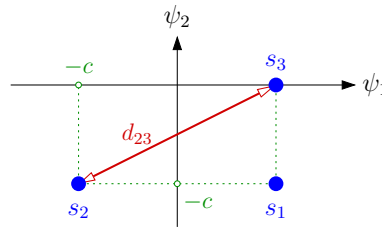


Figura 8.5: Representación geométrica de los símbolos. $c = A\sqrt{T/2}$.

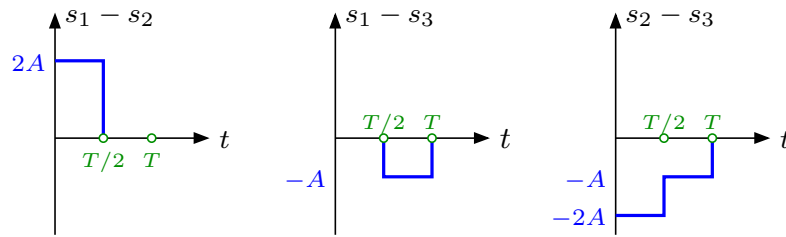


Figura 8.6: Señales diferencia.

Las energías de esas señales diferencia son:

$$E_{12} = (2A)^2 \frac{T}{2} = 4A^2 \frac{T}{2}$$

$$E_{13} = A^2 \frac{T}{2}$$

$$E_{23} = 4A^2 \frac{T}{2} + A^2 \frac{T}{2} = 5A^2 \frac{T}{2}$$

De nuevo la mejor pareja (mayor energía diferencia) es $\{s_2, s_3\}$. Además los resultados coinciden, pues:

$$E_{23} = d_{23}^2 = (2c)^2 + c^2 = 4A^2 \frac{T}{2} + A^2 \frac{T}{2}$$

2. La pareja $\{s_1, s_2\}$ constituye una buena elección, pues está formada por símbolos ortogonales (lo que ofrece muchas ventajas).

Ya tenemos la energía de la señal diferencia s_{12} :

$$E_{12} = 4A^2 \frac{T}{2} = 2A^2 T$$

Por otro lado, la energía de ambos símbolos es idéntica, y es igual a la energía atribuida a un bit:

$$E_b = E_1 = E_2 = A^2 T$$

Despejamos la energía de la señal diferencia en función de la energía atribuida a un bit, y sustituimos en la ecuación de calidad genérica:

$$E_d = E_{12} = 2E_b$$

$$P_b = \frac{1}{2} \operatorname{erfc} \left(\frac{1}{2} \sqrt{\frac{E_d}{N_0}} \right) = \frac{1}{2} \operatorname{erfc} \left(\frac{1}{2} \sqrt{\frac{2 E_b}{N_0}} \right) = \frac{1}{2} \operatorname{erfc} \left(\sqrt{\frac{1}{2} \frac{E_b}{N_0}} \right)$$

Por último, imponemos la calidad exigida y despejamos la relación E_b/N_0 :

$$P_b = 10^{-3}$$

$$2 \cdot 10^{-3} = \operatorname{erfc} \left(\sqrt{\frac{1}{2} \frac{E_b}{N_0}} \right)$$

$$\sqrt{\frac{1}{2} \frac{E_b}{N_0}} \approx 2,1851 \quad (\text{calculado con MATLAB})$$

$$\frac{E_b}{N_0} \approx 9,55 \text{ v.p.}$$

$$\frac{E_b}{N_0} \approx 9,8 \text{ dB}$$

3. Como tenemos todo el ruido (total equivalente) en el punto A, la calidad en B es la misma que en A:

$$\left(\frac{E_b}{N_0} \right)_A = \left(\frac{E_b}{N_0} \right)_B$$

En transmisión:

$$E_s = E_b = A^2 T = \frac{A^2}{R_b} = \frac{1^2}{100(\text{k})} = 10^{-5} \text{ J}$$

En recepción:

$$a_t = 1000 \text{ v.p.}$$

$$E_b = \frac{10^{-5}}{1000} = 10^{-8} \text{ J}$$

Y la relación queda:

$$\frac{E_b}{N_0} = \frac{10^{-8}}{10^{-10}} = 100 \text{ v.p.} \rightarrow 20 \text{ dB}$$

4. Podemos verlo de la siguiente manera: el ruido a la entrada, N_0 , está fijo, y el ruido interno, caracterizado por F_a , pasa de 0 a 5 dB. Puesto que se mantiene E_b y aumenta el ruido, la relación ha de empeorar.

Calculamos:

$$N_0 = N_{in} = 10^{-10} = 1,3806 \cdot 10^{-23} \cdot T_{in}$$

$$T_{in} \approx 7,24 \cdot 10^{12} \text{ K}$$

$$T_e = T_0 (f_a - 1) = 300 (10^{0,5} - 1) \approx 648,7 \text{ K}$$

$$T_T = T_{in} + T_e \approx T_{in}$$

El cambio es insignificante porque el ruido que añade el amplificador es despreciable frente al equivalente de la entrada. Por lo tanto, la relación E_b/N_0 permanece aproximadamente constante.

5. Los símbolos s_1 y s_2 son pulsos cuadrados, que dan lugar a espectros de potencia con forma sinc^2 . Ahora bien: como el pulso de s_2 ocupa T , los nulos del espectro se sitúan en $n \cdot (1/T)$; mientras que el pulso de s_1 ocupa sólo $T/2$, y los nulos se sitúan en $n \cdot (2/T)$, con el doble de ancho de banda. En la figura 8.7 se observan los dos subespectros que se suman cuando se envía el código $\{s_1, s_2\}$.

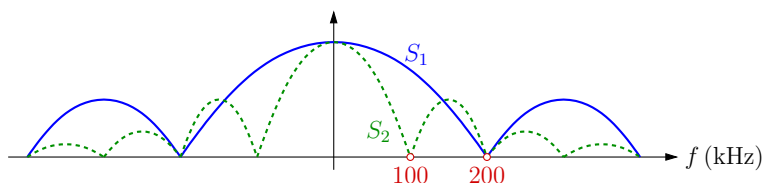


Figura 8.7: Espectro bilateral en línea.

Así, el ancho de banda es el ocupado por la suma de subespectros, que alcanza su primer nulo en $2/T$. Por lo tanto, si tomamos el ancho de banda entre nulos, la señal banda base ocupa:

$$B = \frac{2}{T} = 2 \cdot R_s = 200 \text{ kHz}$$

Problema 8.3 (Septiembre de 1997)

1. Llevamos la potencia de señal al cuantificador:

$$P_x = 10 \text{ dBm}$$

$$S = P_x + G = 10 + 10 = 20 \text{ dBm}$$

Formamos la relación señal a ruido con el valor límite del ruido (distribución uniforme, trabajando a fondo de escala):

$$\left(\frac{S}{N}\right)_q \approx 6 \cdot n$$

$$20 - (-30) = 50 = 6 \cdot n$$

$$n = 8.\hat{3}$$

Para que el ruido sea menor necesitamos una calidad mayor y, por tanto, un número de bits mayor:

$$n \geq 9 \text{ bits/muestra}$$

2. Ahora $n = 10$ bits. Calculamos el ancho de banda que ocupa la transmisión banda base:

$$f_m = 1,1 \cdot 2 \cdot 20(\text{k}) = 44 \text{ kHz}$$

$$R_b = n \cdot f_m = 440 \text{ kbps}$$

$$M = 2 \rightarrow k = 1 \text{ bit/símbolo}$$

$$R_s = R_b = 440 \text{ Mbaudios}$$

$$B = \frac{R_s}{2} (1 + \alpha) = \frac{440(\text{M})}{2} (1 + 0,2) = 264 \text{ kHz}$$

Como el ancho de banda disponible es sólo de 250 kHz, aparecerá distorsión (IIS) por filtrado.

3. El ancho de banda ocupado (que depende de la sinc) es proporcional a la inversa del tiempo del pulso más estrecho que se envíe. Esto normalmente coincide con el régimen simbólico, pero en este caso no. Por lo tanto, al pasar de símbolos con duración T a símbolos con $T/2$ el ancho de banda se duplica. Es costumbre (quizá no muy ortodoxa) trabajar pensando que el régimen simbólico se duplica (lo que no ocurre en realidad) al mandar pulsos con duración $T/2$.

$$B' = 2B = 2 \cdot 264(\text{k}) = 528 \text{ kHz}$$

4. El primer código es *antipodal*, mientras que el segundo es ortogonal. La distancia entre símbolos es mayor con el primer código, luego tendrá una probabilidad de error menor. En la figura 8.8 se ilustra el razonamiento anterior.

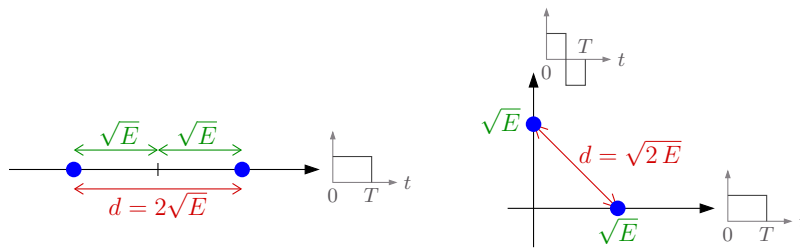


Figura 8.8: Antipodal frente a ortogonal.

5. No. Los códigos antipodales tienen la distancia máxima entre símbolos. Si mantenemos la energía por símbolo fija, podemos mover los puntos de la constelación por una circunferencia, y la pareja de puntos más alejados en la circunferencia es necesariamente la antipodal (en un diámetro).

Problema 8.4 (Junio de 1998)

1. El coseno alzado ocupa 62,4 kHz, para un canal de Nyquist de 48 kHz. Aunque no lo pide el enunciado, relacionando los dos valores podemos calcular el factor de redondeo:

$$B = W (1 + \alpha)$$

$$62,4 = 48 (1 + \alpha)$$

$$\alpha = 0,291\hat{6}$$

La capacidad del canal se obtiene mediante el criterio de Nyquist:

$$W = \frac{R_s}{2}$$

$$R_s = 2W = 96 \text{ kbaudios}$$

Como el codificador es binario:

$$R_b = R_s = 96 \text{ kbps}$$

Para un sistema MIC:

$$R_b = n \cdot f_m$$

Ya que R_b está fijado, el valor máximo de n se alcanzará con el valor mínimo de f_m que será la frecuencia de Nyquist. Por lo tanto:

$$f_{Nyq} = 2W = 8 \text{ kHz}$$

$$96(\text{k}) = n \cdot 8(\text{k})$$

$$n = 12 \text{ bits/muestra}$$

2. Ahora:

$$f_m = 1,5 \cdot 2 \cdot 4(\text{k}) = 12 \text{ kHz}$$

Imponemos el requisito de calidad en la fórmula del código NRZ unipolar:

$$P_b = \frac{1}{2} \operatorname{erfc} \left(\sqrt{\frac{E_b}{2N_0}} \right)$$

$$P_b = 10^{-5}$$

$$2 \cdot 10^{-5} = \operatorname{erfc} \left(\sqrt{\frac{E_b}{2N_0}} \right)$$

$$\sqrt{\frac{E_b}{2N_0}} \approx 3,015 \text{ (tabla)}$$

$$E_b = 2 \cdot N_0 \cdot (3,015)^2 = 2,363 \cdot 10^{-11} \text{ J}$$

Y, por último, relacionamos la energía atribuida al bit con el régimen binario:

$$E_b = \frac{p_s}{a_t} \cdot \frac{1}{R_b}$$

$$2,363 \cdot 10^{-11} = \frac{2}{10^6} \cdot \frac{1}{R_b}$$

$$R_b \approx 84,64 \text{ kbps}$$

$$R_b = n \cdot f_m$$

$$84,64(\text{k}) = n \cdot 12(\text{k})$$

$$n = 7 \text{ bits}$$

3. Estudiamos la primera propuesta. Al aumentar la potencia de salida 5 dB, la relación E_b/N_0 aumenta también 5 dB. Como en el argumento de la erfc aparece la raíz de esa relación (en unidades naturales), la variación del argumento es:

$$5 \text{ dB} \rightarrow 10^{0,5} \text{ v.p.}$$

$$\sqrt{10^{0,5}} \approx 1,778$$

Aplicamos la variación al argumento inicial:

$$3,015 \cdot 1,778 = 5,361$$

De manera que la nueva calidad sería:

$$P_b = \frac{1}{2} \operatorname{erfc}(5,36) \approx 1,7 \cdot 10^{-14}$$

Lo que supone una mejora gigantesca.

Estudiamos la segunda propuesta. La ganancia del amplificador no modifica la calidad. Sin embargo, ahora tenemos más ruido, porque a la contribución a la entrada, N_0 , se suma el ruido interno del amplificador ($F = 1 \text{ dB}$). Así, la calidad debe disminuir. Calculamos la variación:

$$N_0 = N_{in} = k T_{in}$$

$$1,30 \cdot 10^{-12} = 1,3806 \cdot 10^{-23} \cdot T_{in}$$

$$T_{in} \approx 9,42 \cdot 10^{10} \text{ K}$$

$$T_e = T_0 (f - 1) = 300 (10^{0,1} - 1) \approx 77,7 \text{ K}$$

$$T_T = T_{in} + T_e \approx T_{in}$$

Y queda claro que el ruido interno del amplificador es totalmente despreciable, de manera que la calidad permanece aproximadamente constante.

Problema 8.5 (Septiembre de 1998)

1. Para obtener los 1024 tonos de grises se ha de cuantificar con:

$$1024 = 2^n$$

$$n = 10 \text{ bits/muestra}$$

Para el ancho de banda mínimo muestreamos con la frecuencia de Nyquist:

$$f_{Nyq} = 2W = 10 \text{ MHz}$$

Calculamos el régimen binario del MIC:

$$R_b = 10 \cdot 10(\text{M}) = 100 \text{ Mb/s}$$

Con el codificador binario:

$$R_s = R_b = 100 \text{ Mbaudios}$$

Y el ancho de banda mínimo ocupado será el del canal de Nyquist:

$$W = \frac{R_s}{2} = 50 \text{ MHz}$$

2. Para que el alumno se familiarice con los órdenes de magnitud típicos, las fibras *monomodo* de grandes prestaciones atenúan en torno a 0,3 dB/km. En este problema estamos trabajando con una fibra de atenuación alta (es un valor típico para *multimodo*). Por otro lado, es usual considerar siempre que las fibras introducen muy poco ruido.

Vamos a suponer que la longitud total de fibra atenúa mucho, de tal manera que el ruido del láser (y el de cuantificación) será despreciable frente a la contribución a la entrada del RX (N_0). Entonces, para nuestro código NRZ unipolar:

$$P_b = 10^{-6}$$

$$P_b = \frac{1}{2} \operatorname{erfc} \left(\sqrt{\frac{E_b}{2 N_0}} \right)$$

$$2 \cdot 10^{-6} = \operatorname{erfc} \left(\sqrt{\frac{E_b}{2 N_0}} \right)$$

$$\sqrt{\frac{E_b}{2 N_0}} \approx 3,360$$

$$E_b = 2 \cdot N_0 \cdot 3,360^2 = 2,258 \cdot 10^{-13} \text{ J}$$

Relacionamos la energía atribuida a un bit en recepción con la potencia transmitida y la atenuación, para despejar ésta última:

$$E_b = \frac{p_s}{a_t} \cdot \frac{1}{R_b}$$

$$2,258 \cdot 10^{-13} = \frac{0,01}{a_t} \cdot \frac{1}{80 \cdot 10^6}$$

$$a_t = 553,6 \text{ v.p.} \rightarrow 27,4 \text{ dB}$$

Como la atenuación es lineal, en unidades logarítmicas, con la longitud de fibra:

$$A(\text{dB}) = \alpha(\text{dB/km}) \cdot L(\text{km})$$

$$27,4 = 2 \cdot L$$

$$L \approx 13,7 \text{ km}$$

Para terminar comprobamos que la hipótesis de trabajo es correcta:

$$N_0 = 10^{-14} \text{ W/Hz}$$

$$\frac{N_d}{a_t} = \frac{10^{-13}}{553,6} \approx 1,8 \cdot 10^{-16} \text{ W/Hz}$$

Luego es cierto que la fibra atenúa bastante y el ruido del láser es despreciable frente a N_0 a la entrada del RX.

Si la hipótesis no hubiera sido cierta habríamos tenido que trabajar con la relación:

$$\frac{E_b}{N'_0} = \frac{E_b}{N_0 + N_d/a_t}$$

3. Limita la calidad máxima del sistema, que nunca podrá ser mejor que:

$$N_d = 10^{-13} \text{ W/Hz}$$

$$E_b(TX) = p_s \frac{1}{R_b} = \frac{0,01}{80 \cdot 10^6} = 1,25 \cdot 10^{-10} \text{ J}$$

$$\left(\frac{E_b}{N_0} \right)_{max} = \frac{1,25 \cdot 10^{-10}}{10^{-13}} = 1250 \text{ v.p.} \rightarrow 31,0 \text{ dB}$$

Problema 8.6 (Junio de 2001)

1. Son linealmente dependientes, ya que:

$$s_1 = -s_3$$

$$s_2 = -s_4$$

2. Quitamos s_3 y s_4 . Es inmediato comprobar que las dos señales restantes son ortogonales, y por lo tanto independientes:

$$\langle s_1, s_2 \rangle = \int_0^{T/2} s_1 s_2 dt + \int_{T/2}^T s_1 s_2 dt = \text{área} - \text{área} = 0$$

Luego necesitamos una base de dimensión 2. Tomamos $\{s_1, s_2\}$ y normalizamos en energía:

$$E_1 = E_2 = 2 \int_0^{T/2} \left(\frac{2t}{T} \right)^2 dt = \frac{T}{3}$$

$$\psi_1(t) = \sqrt{3/T} \cdot s_1(t)$$

$$\psi_2(t) = \sqrt{3/T} \cdot s_2(t)$$

Y $\{\psi_1, \psi_2\}$ es una base ortonormal completa para las señales $\{s_i\}$

3. En la figura 8.9 se observan las señales $\{s_i(t)\}$ en función de la base. Las coordenadas en función de $\{\psi_1(t), \psi_2(t)\}$ son:

$$s_1 = \left(\sqrt{T/3}, 0 \right)$$

$$s_2 = \left(0, \sqrt{T/3} \right)$$

$$s_3 = \left(-\sqrt{T/3}, 0 \right)$$

$$s_4 = \left(0, -\sqrt{T/3} \right)$$

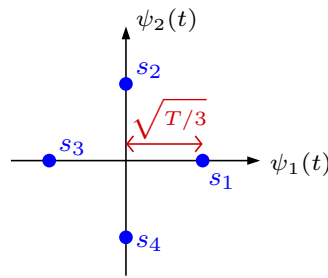


Figura 8.9: Representación geométrica de las señales.

4. Los nulos del canal triangular están en $1/B_{BB}$, $2/B_{BB}$, $3/B_{BB}$, etc. Aplicamos el Criterio de Nyquist:

$$R_{Smax} = \frac{1}{T_{min}} = B_{BB} \text{ (baudios)}$$

$$M = 4 \rightarrow k = 2 \text{ bits/símbolo}$$

$$R_b = 2 \cdot R_{Smax} = 2 B_{BB} \text{ (b/s)}$$

5. Sí se cumple, porque el régimen propuesto es un submúltiplo del máximo. En la figura 8.10 se observa que es plano el espectro resultante de la suma de subespectros desplazados.

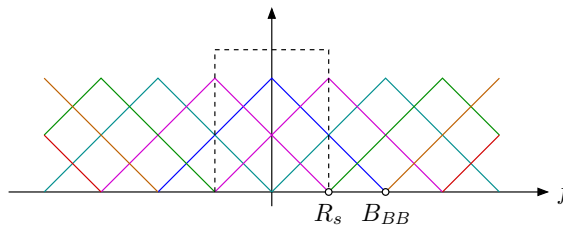


Figura 8.10: Criterio de Nyquist en f .

6. Como también es un submúltiplo, se cumple. En la figura 8.11 se observa que en el instante de muestreo se anulan las colas de los símbolos no deseados.

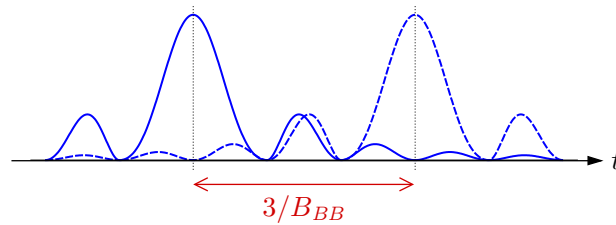


Figura 8.11: Criterio de Nyquist en t .

Problema 8.7 (Febrero de 2004)

1. Régimen binario del MIC:

$$N_T = 32 \cdot 8 = 256 \text{ bits/trama}$$

$$R_b = N_T \cdot f_m = 256 \cdot 8(\text{k}) = 2048 \text{ kbps}$$

Régimen simbólico:

$$M = 2 \text{ símbolos}$$

$$R_s = R_b = 2048 \text{ kbaudios}$$

Ancho de banda de Nyquist:

$$W = \frac{R_s}{2} = 1024 \text{ kHz}$$

2. Cálculos de ruido:

$$T_e = T_0 (f - 1)$$

$$N_0 = k (T_{in} + T_e) = k [T_0 + T_0 (f - 1)] = k T_0 f$$

$$N_0 = 1,3806 \cdot 10^{-23} \cdot 300 \cdot 8 \approx 3,3134 \cdot 10^{-20} \text{ W/Hz}$$

Energía recibida por bit:

$$a_t = 10^{10,6} \approx 4 \cdot 10^{10} \text{ v.p.}$$

$$E_b = \frac{p_T}{a_t} \cdot \frac{1}{R_b} = \frac{0,2^2}{4 \cdot 10^{10}} \cdot \frac{1}{2,048 \cdot 10^6} = 4,8828 \cdot 10^{-19} \text{ J}$$

Relación E_b/N_0 :

$$\frac{E_b}{N_0} \approx 14,737 \text{ v.p.}$$

Calculamos la calidad con la fórmula del código polar:

$$P_b = \frac{1}{2} \operatorname{erfc} \left(\sqrt{\frac{E_b}{N_0}} \right)$$

$$P_b = \frac{1}{2} \operatorname{erfc}(3,84) = \frac{1}{2} \cdot 5,6 \cdot 10^{-8} = 2,8 \cdot 10^{-8}$$

3. La asignación de menor consumo de energía, para una calidad dada, es la antipodal. (Como en el apartado anterior, que ya era antipodal.) Imponemos la calidad, despejamos la relación E_b/N_0 , y calculamos los niveles de tensión a partir de la energía de bit:

$$10^{-9} = \frac{1}{2} \operatorname{erfc} \left(\sqrt{\frac{E_b}{N_0}} \right)$$

$$2 \cdot 10^{-9} = \operatorname{erfc}\left(\sqrt{\frac{E_b}{N_0}}\right)$$

$$\sqrt{\frac{E_b}{N_0}} \approx 4,24$$

$$\frac{E_b}{N_0} \approx 17,98$$

$$E_b = 17,98 \cdot N_0 \approx 5,957 \cdot 10^{-19} \text{ J (en RX)}$$

$$E_b = \frac{v^2}{a_t \cdot R_b}$$

$$5,957 \cdot 10^{-19} = \frac{v^2}{4 \cdot 10^{10} \cdot 2,048 \cdot 10^6}$$

$$v \approx \pm 0,22 \text{ V}$$

Problema 8.8 (Junio de 2004)

1. Cálculos previos:

$$a_t = 10^{110/20} \text{ v.s.}$$

$$R_b = R_s = 155 \text{ Mbps}$$

$$N_0 = k(T_{in} + T_e) = 1,3806 \cdot 10^{-23} (300 + 700) = 1,3806 \cdot 10^{-20} \text{ W/Hz}$$

Con el código polar los símbolos son:

$$\text{En TX: } \begin{cases} 1 & \rightarrow +2 \text{ V} \\ 0 & \rightarrow -2 \text{ V} \end{cases}$$

$$\text{En RX: } \begin{cases} 1 & \rightarrow +2/a_t \text{ V} \\ 0 & \rightarrow -2/a_t \text{ V} \end{cases}$$

Relación E_b/N_0 en RX:

$$E_b = E_1 = E_0 = \left(\frac{2}{a_t}\right)^2 \cdot \frac{1}{R_b} = 2,5806 \cdot 10^{-19} \text{ J}$$

$$\frac{E_b}{N_0} = 18,6919 \text{ v.p.}$$

Calculamos la calidad con la fórmula del código polar:

$$P_b = \frac{1}{2} \operatorname{erfc}\left(\sqrt{\frac{E_b}{N_0}}\right) = \frac{1}{2} \operatorname{erfc}(4,32) \approx \frac{1}{2} 10^{-9} = 5 \cdot 10^{-10}$$

Con el código bipolar los símbolos son:

$$\text{En TX: } \begin{cases} 1 & \rightarrow \pm 2 \text{ V} \\ 0 & \rightarrow 0 \text{ V} \end{cases}$$

$$\text{En RX: } \begin{cases} 1 & \rightarrow \pm 2/a_t \text{ V} \\ 0 & \rightarrow 0 \text{ V} \end{cases}$$

Relación E_b/N_0 en RX:

$$E_0 = 0 \text{ J}$$

$$E_1 = \left(\frac{2}{a_t}\right)^2 \cdot \frac{1}{R_b} = 2,5806 \cdot 10^{-19} \text{ J}$$

$$E_b = \frac{E_0 + E_1}{2} = 1,2903 \cdot 10^{-19} \text{ J}$$

$$\frac{E_b}{N_0} = 9,3459 \text{ v.p.}$$

Calculamos la calidad con la fórmula del código bipolar (la del NRZ-L-Unipolar, pues el hecho de que cambie el signo es irrelevante):

$$P_b = \frac{1}{2} \operatorname{erfc}\left(\sqrt{\frac{E_b}{2N_0}}\right) = \frac{1}{2} \operatorname{erfc}(2,16) \approx \frac{1}{2} 0,00225 \approx 1,1 \cdot 10^{-3}$$

Con el bipolar obtenemos una calidad mucho peor. Además de la superioridad del código polar respecto al bipolar frente a AWGN, en este caso mandamos una E_s mayor con el polar.

Problema 8.9 (Noviembre de 2004)

Cálculos de ruido:

$$N_0 = 1,3806 \cdot 10^{-23} (300 + 900) = 1,65672 \cdot 10^{-20} \text{ W/Hz}$$

Imponemos la calidad y despejamos la energía de bit en RX:

$$5 \cdot 10^{-11} = \frac{1}{2} \operatorname{erfc}\left(\sqrt{\frac{E_b}{N_0}}\right)$$

$$10^{-10} = \operatorname{erfc}\left(\sqrt{\frac{E_b}{N_0}}\right)$$

$$\sqrt{\frac{E_b}{N_0}} \approx 4,573$$

$$E_b = 4,573^2 N_0 = 3,4646 \cdot 10^{-19} \text{ J}$$

Pasamos a TX, y relacionamos con el R_b :

$$E_b(\text{TX}) = E_b \cdot 10^{13} = 3,4646 \cdot 10^{-6} \text{ J}$$

$$E_b(\text{TX}) = \frac{p}{R_b} = \frac{10^2}{R_b} = 3,4646 \cdot 10^{-6}$$

$$R_b \approx 28,9 \text{ Mb/s}$$

Problema 8.10 (Junio de 2008)

Régimen binario que entrega el MIC:

$$R_b = N_T \cdot f_m = 32 \cdot 8 \cdot 8(\text{k}) = 2048 \text{ kbps}$$

Como el sistema es binario, el régimen simbólico vale:

$$R_s = R_b = 2048 \text{ kbaudios}$$

Calculamos el ancho de banda necesario según el Criterio de Nyquist:

$$B = W(1 + \alpha) = \frac{R_s}{2} (1 + \alpha) = \frac{2048(\text{k})}{2} (1, 5) = 1536 \text{ kHz}$$

Para obtener la calidad, calculamos la señal diferencia $s_1 - s_2$. Queda un pulso rectangular de 2 voltios que ocupa T . En recepción, la amplitud estará dividida por la atenuación, que es 10^3 en veces de señal. Por lo tanto, el pulso tiene amplitud $2 \cdot 10^{-3}$ y duración T . Su energía es (energía de la señal diferencia en recepción):

$$E_d = p \cdot T_d = A^2 \frac{1}{2 \cdot R_s} = (2 \cdot 10^{-3})^2 \frac{1}{2 \cdot 2048(\text{k})} \approx 1,953 \cdot 10^{-12} \text{ J}$$

La probabilidad de error de símbolo es igual que la de bit. Aplicamos la fórmula para E_d :

$$P_s = P_b = \frac{1}{2} \operatorname{erfc}\left(\frac{1}{2} \sqrt{\frac{E_d}{N_0}}\right) = \frac{1}{2} \operatorname{erfc}(4, 03)$$

Leemos en los cuadros de la función erfc para el argumento 4,03 y queda:

$$P_s = P_b = \frac{1}{2} 1,2 \cdot 10^{-8} = 6 \cdot 10^{-9}$$

Problema 8.11 (Enero de 2012)

- En la figura 8.12 se observa una base ortonormal para las señales $\{s_i(t)\}$. Obviamente, la dimensión es 2, y las señales de las base son ortogonales (son disjuntas en el tiempo). Es inmediato comprobar que están normalizadas en energía.

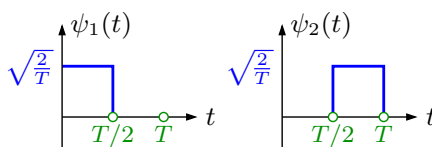


Figura 8.12: Base ortonormal.

2. Llamamos:

$$c = A\sqrt{\frac{T}{2}}$$

Las coordenadas en función de (ψ_1, ψ_2) son:

$$s_1 = (c, c)$$

$$s_2 = (c, -c)$$

$$s_3 = (-c, c)$$

$$s_4 = (-c, -c)$$

En la figura 8.13 se observa la constelación resultante.

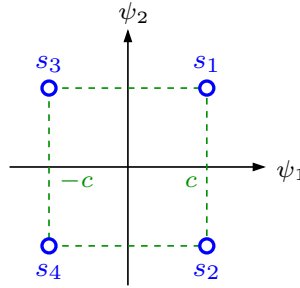


Figura 8.13: Constelación $\{s_i(t)\}$.

3. En la figura 8.14 se muestran los filtros adaptados a las señales de la base: h_1 está adaptado a ψ_1 y h_2 a ψ_2 .

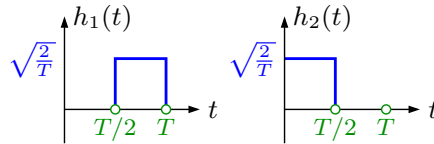


Figura 8.14: Filtros adaptados a la base.

Problema 8.12 (Junio de 2012)

1. El sistema tiene $M = 4$ símbolos, y cada símbolos lleva la información de $k = 2$ bits. Por lo tanto:

$$T = T_s = 2T_b = \frac{2}{R_b} = 2 \mu\text{s}$$

2. Las señales son linealmente dependientes:

$$s_3 = -s_1$$

$$s_4 = -s_2$$

Además, s_1 y s_2 son ortogonales por ser disjuntas en el tiempo. Por todo ello, s_1 y s_2 son adecuadas para formar una base. Sólo resta normalizar en energía:

$$E_{s1} = E_{s2} = p \cdot T = 1^2 \cdot 2 \cdot 10^{-6} = 10^{-6} \text{ J}$$

$$\psi_1 = \frac{s_1}{\sqrt{E_{s1}}} = 1000 s_1$$

$$\psi_2 = \frac{s_2}{\sqrt{E_{s2}}} = 1000 s_2$$

3. Coordenadas en función de (ψ_1, ψ_2) :

$$s_1 = (10^{-3}, 0)$$

$$s_2 = (0, 10^{-3})$$

$$s_3 = (-10^{-3}, 0)$$

$$s_4 = (0, -10^{-3})$$

La constelación se observa en la figura 8.15.

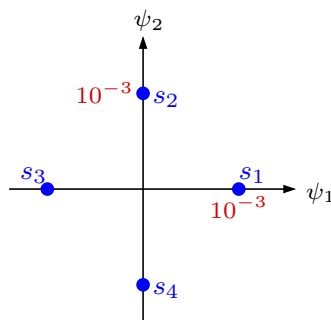


Figura 8.15: Constelación.

Problema 8.13 (Julio de 2012)

1. En la figura 8.16 se observa una base ortonormal para las señales $\{s_i(t)\}$. Obviamente, la dimensión es 2, y las señales de la base son ortogonales (son disjuntas en el tiempo). Es inmediato comprobar que están normalizadas en energía.
2. Llamamos:

$$c = A \sqrt{\frac{T}{2}}$$

Las coordenadas en función de (ψ_1, ψ_2) son:

$$s_1 = (c, -c)$$

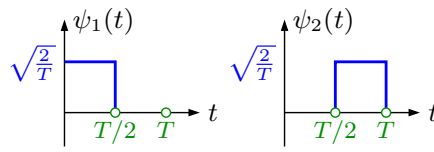


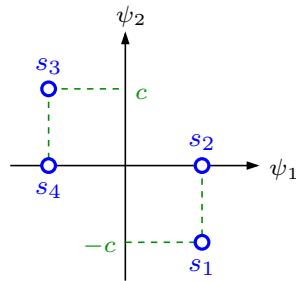
Figura 8.16: Base ortonormal.

$$s_2 = (0, c)$$

$$s_3 = (-c, c)$$

$$s_4 = (0, -c)$$

En la figura 8.17 se observa la constelación resultante.

Figura 8.17: Constelación $\{s_i(t)\}$.

3. En la figura 8.18 se muestran los filtros adaptados a las señales de la base: h_1 está adaptado a ψ_1 y h_2 a ψ_2 .

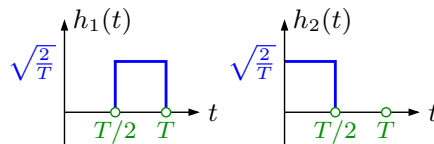


Figura 8.18: Filtros adaptados a la base.

Problema 8.14 (Junio de 2013)

1. El conjunto es linealmente dependiente:

$$s_6(t) = -s_1(t)$$

$$s_5(t) = -s_2(t)$$

$$s_4(t) = -s_3(t)$$

Es inmediato comprobar que hay 3 señales relevantes: $\phi_1 = \cos(2\pi t)$, $\phi_2 = \sin(2\pi t)$ y $\phi_3 = \cos(4\pi t)$. Las 2 primeras, seno y coseno, son ortogonales entre sí. Comprobamos si la tercera es ortogonal a las 2 primeras:

$$\langle \phi_1, \phi_3 \rangle = \int_0^1 \phi_1(t) \phi_3(t) dt = \frac{1}{2} \int_0^1 [\cos(6\pi t) + \cos(2\pi t)] dt = 0$$

$$\langle \phi_2, \phi_3 \rangle = \frac{1}{2} \int_0^1 [\sin(-2\pi t) + \sin(6\pi t)] dt = 0$$

Por lo tanto, las señales ϕ_i son ortogonales. Calculamos las energías para normalizar:

$$E_{\phi_1} = \int_0^1 \phi_1(t) dt = p \cdot T = \frac{1^2}{2 \cdot 1} 1 = \frac{1}{2}$$

$$E_{\phi_3} = E_{\phi_2} = E_{\phi_1} = \frac{1}{2}$$

Y las señales de la base serán:

$$\psi_1(t) = \sqrt{2} \cos(2\pi t)$$

$$\psi_2(t) = \sqrt{2} \sin(2\pi t)$$

$$\psi_3(t) = \sqrt{2} \cos(4\pi t)$$

2. Coordenadas de las señales en función de la base:

$$s_1(t) = \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \psi_1(t) + \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \psi_2(t) + 0 \cdot \psi_3(t)$$

$$s_2(t) = -\frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \psi_1(t) + \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \psi_2(t) + 0 \cdot \psi_3(t)$$

$$s_3(t) = 0 \cdot \psi_1(t) + \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \psi_2(t) - \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \psi_3(t)$$

$$s_4(t) = 0 \cdot \psi_1(t) - \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \psi_2(t) + \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \psi_3(t)$$

$$s_5(t) = \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \psi_1(t) - \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \psi_2(t) + 0 \cdot \psi_3(t)$$

$$s_6(t) = -\frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \psi_1(t) - \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \psi_2(t) + 0 \cdot \psi_3(t)$$

3. Los filtros adaptados a las funciones base son:

$$h_1(t) = \cos[2\pi(1-t)] = \cos(2\pi t)$$

$$h_2(t) = \sin[2\pi(1-t)] = -\sin(2\pi t)$$

$$h_3(t) = \cos[4\pi(1-t)] = \cos(4\pi t)$$

Los dibujos se dejan a cargo del alumno.

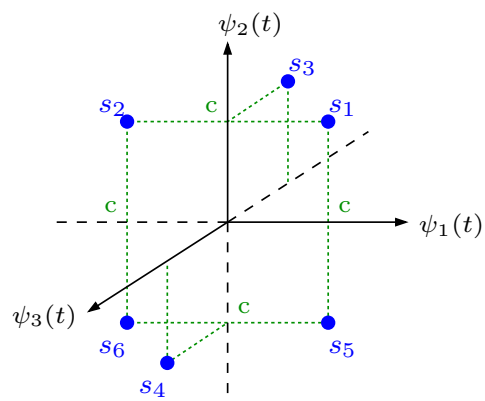


Figura 8.19: Constelación. ($c = 1/\sqrt{2}$.)

Tema 9

MODULACIÓN DIGITAL

Problema 9.1

1. Número máximo de bits por cada símbolo:

$$k = \log_2(8) = 3 \text{ bits}$$

Régimen simbólico:

$$R_s = \frac{R_b}{k} = \frac{2048(\text{k})}{3} = 682.\hat{6} \text{ kbaudios}$$

Período de símbolo:

$$T_s = \frac{1}{R_s} \approx 1,465 \text{ } \mu\text{s}$$

2. Para que sean ortogonales deben tener un producto escalar nulo:

$$\langle \phi_1, \phi_2 \rangle = \int_0^T \cos\left(\frac{2\pi}{T} 100 t\right) \sin\left(\frac{2\pi}{T} 100 t\right) dt = \int_0^T \frac{1}{2} \sin\left(\frac{2\pi}{T} 200 t\right) dt$$

$$\langle \phi_1, \phi_2 \rangle = \frac{-1}{2} \frac{T}{2\pi 200} \left[\cos\left(\frac{2\pi}{T} 200 t\right) \right]_0^T = 0$$

Luego son ortogonales. Normalizamos la energía:

$$E_{\phi_1} = E_{\phi_2} = p \cdot T = \frac{1^2}{2 \cdot 1} T = \frac{T}{2}$$

$$\Psi_1(t) = \frac{\phi_1(t)}{\sqrt{E_{\phi_1}}} = \begin{cases} \sqrt{\frac{2}{T}} \cos(\omega_c t) ; & 0 \leq t < T \\ 0 ; & \text{Resto} \end{cases}$$

$$\Psi_2(t) = \frac{\phi_2(t)}{\sqrt{E_{\phi_2}}} = \begin{cases} \sqrt{\frac{2}{T}} \sin(\omega_c t) ; & 0 \leq t < T \\ 0 ; & \text{Resto} \end{cases}$$

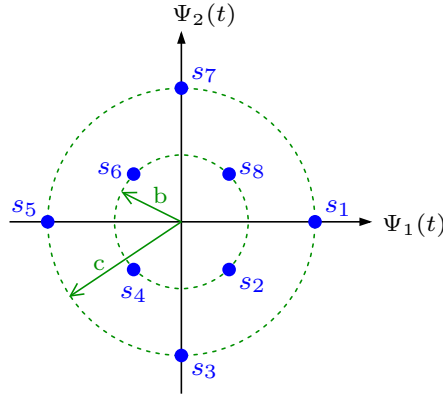


Figura 9.1: Constelación de señales. Como el eje Ψ_1 es positivo, los ángulos crecen en sentido horario.

3. En la figura 9.1 se observa la constelación de señales $\{s_i(t)\}$ en función de la base $\{\Psi_i(t)\}$. Se ha tomado una relación arbitraria entre B y C , con $C > B$.

Por comodidad, se han usado las relaciones:

$$b = B\sqrt{\frac{T}{2}}$$

$$c = C\sqrt{\frac{T}{2}}$$

Para obtener la constelación basta con ir dando valores al índice i :

$$i = 1 \rightarrow C \cos[\omega_c t + 0]$$

$$i = 2 \rightarrow B \cos[\omega_c t + \pi/4]$$

$$i = 3 \rightarrow C \cos[\omega_c t + 2\pi/4]$$

etc.

Pero es interesante hacer notar que con un desarrollo trigonométrico simple se obtiene una expresión directa de las coordenadas de la representación geométrica:

$$s_i = A_i \cos\left[\omega_c t + \frac{\pi}{4}(i-1)\right] = A_i \cos(\beta + \alpha)$$

$$s_i = A_i \cos\left[\frac{\pi}{4}(i-1)\right] \cos(\omega_c t) - A_i \sin\left[\frac{\pi}{4}(i-1)\right] \sin(\omega_c t)$$

$$s_i = A_i \sqrt{\frac{T}{2}} \cos\left[\frac{\pi}{4}(i-1)\right] \sqrt{\frac{2}{T}} \cos(\omega_c t) - A_i \sqrt{\frac{T}{2}} \sin\left[\frac{\pi}{4}(i-1)\right] \sqrt{\frac{2}{T}} \sin(\omega_c t)$$

$$s_i = a_{i1} \cdot \Psi_1(t) + a_{i2} \cdot \Psi_2(t)$$

Donde:

$$a_{i1} = A_i \sqrt{\frac{T}{2}} \cos\left[\frac{\pi}{4}(i-1)\right]$$

$$a_{i2} = -A_i \sqrt{\frac{T}{2}} \sin \left[\frac{\pi}{4} (i-1) \right]$$

Y es inmediato sacar las coordenadas. Por ejemplo, para i igual a 1 y 2:

$$i = 1 \rightarrow c = C \sqrt{\frac{T}{2}}$$

$$a_{11} = c \cos \left[\frac{\pi}{4} (1-1) \right] = c$$

$$a_{12} = -c \sin \left[\frac{\pi}{4} (1-1) \right] = 0$$

$$i = 2 \rightarrow b = B \sqrt{\frac{T}{2}}$$

$$a_{21} = b \cos \left[\frac{\pi}{4} (2-1) \right] = \frac{\sqrt{2}}{2} b$$

$$a_{22} = -b \sin \left[\frac{\pi}{4} (2-1) \right] = -\frac{\sqrt{2}}{2} b$$

4. Trabajando con una base ortonormal $\{\Psi_1, \Psi_2\}$, la distancia entre dos señales cualesquiera, s_i y s_j , es:

$$d_{ij} = \sqrt{\langle s_i - s_j, s_i - s_j \rangle} = \sqrt{E_d}$$

Que, por Pitágoras, se reduce a la raíz cuadrada de la suma de los cuadrados de las diferencias de coordenadas:

$$d_{ij} = \sqrt{(a_{i1} - a_{j1})^2 + (a_{i2} - a_{j2})^2}$$

Distancia entre s_1 y s_2 :

$$d_{12} = \sqrt{\left(c - \frac{\sqrt{2}}{2} b\right)^2 + \left(0 + \frac{\sqrt{2}}{2} b\right)^2} = \sqrt{c^2 - b c \sqrt{2} + b^2}$$

Distancia entre s_1 y s_3 :

$$d_{13} = \sqrt{c^2 + c^2} = c \sqrt{2}$$

Distancia entre s_2 y s_8 :

$$d_{28} = \frac{\sqrt{2}}{2} b + \frac{\sqrt{2}}{2} b = b \sqrt{2}$$

5. Forzamos que $d_{28} = d_{12}$:

$$b \sqrt{2} = \sqrt{c^2 - b c \sqrt{2} + b^2}$$

Operando queda una ecuación de segundo grado con, por ejemplo, incógnita b :

$$1 \cdot b^2 + (c \sqrt{2}) \cdot b - c^2 = 0$$

Sus raíces son:

$$b = \frac{-c\sqrt{2} \pm \sqrt{2c^2 + 4c^2}}{2} = \frac{c(-\sqrt{2} \pm \sqrt{6})}{2}$$

La raíz negativa no sirve, pues estamos calculando una distancia. Por lo tanto, la relación entre b y c es:

$$\frac{b}{c} = \frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{2} \approx 0,5176$$

Que es también la relación entre B y C :

$$\frac{b}{c} = \frac{B\sqrt{T/2}}{C\sqrt{T/2}} = \frac{B}{C} \approx 0,5176$$

6. Por simetrías, sólo nos interesan las energías de s_1 y s_2 :

$$E_1 = \langle s_1, s_1 \rangle = d_1^2 = c^2$$

$$E_2 = \langle s_2, s_2 \rangle = d_2^2 = b^2$$

La energía media por símbolo en transmisión es:

$$E_s = \frac{E_1 + E_2}{2} = \frac{c^2 + b^2}{2}$$

Usando la relación $c = b/0,5176$:

$$E_s = b^2 \frac{1 + (1/0,5176)^2}{2} = 2,3660 b^2$$

Y como $b = B\sqrt{T/2}$:

$$E_s = \frac{B^2 T}{2} 2,3660 = 1,1830 B^2 T$$

7. En la figura 9.2 se observan las regiones óptimas de decisión. Las fronteras están situadas equidistantes de los dos símbolos más cercanos. Por ejemplo: la región de s_5 limita en el segundo cuadrante con s_6 y, más arriba, con s_7 .
8. La distancia mínima entre símbolos es:

$$\text{En TX: } d_{min} = d_{28} = b\sqrt{2} = B\sqrt{\frac{T}{2}}\sqrt{2} = B\sqrt{T}$$

$$\text{En RX: } d_{min} = \frac{B\sqrt{T}}{a_t}$$

Cotas de la probabilidad de error:

$$\frac{d_{min}}{2\sqrt{N_0}} = \frac{B}{2a_t} \sqrt{\frac{T}{N_0}}$$

$$\frac{1}{8} \operatorname{erfc}\left(\frac{B}{2a} \sqrt{\frac{T}{N_0}}\right) \leq P_e \leq \frac{7}{2} \operatorname{erfc}\left(\frac{B}{2a} \sqrt{\frac{T}{N_0}}\right)$$

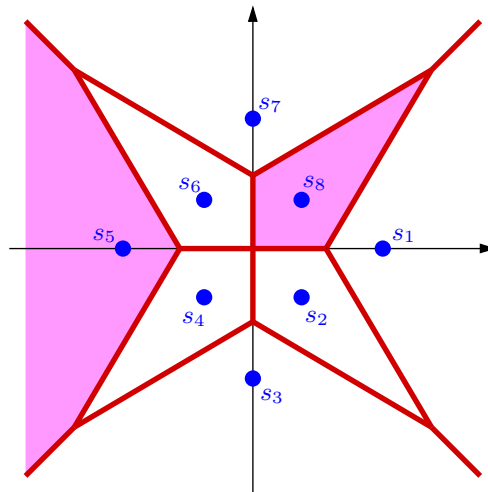


Figura 9.2: Regiones de decisión. (Dos aparecen coloreadas en magenta.)

Problema 9.2

1. Trabajamos en paralelo con la 16QAM y la 64QAM. Probabilidad de símbolo erróneo:

$$k_{16} = \log_2(16) = 4 \text{ bits/símbolo}$$

$$k_{64} = \log_2(64) = 6 \text{ bits/símbolo}$$

$$P_{s16} \approx k \cdot P_b = 4 \cdot 10^{-7}$$

$$P_{s64} \approx k \cdot P_b = 6 \cdot 10^{-7}$$

En la figura 9.3 tenemos las curvas de calidad de QAM. Podemos comprobar que los resultados aproximados son ciertos.

2. Para 16QAM:

$$P_s \approx k \cdot P_b = 4 \cdot 10^{-7}$$

$$P_s = 1 - (1 - p)^2 \approx 2p; \quad (p \ll 1)$$

$$p \approx 2 \cdot 10^{-7}$$

$$p = \frac{4-1}{4} \operatorname{erfc}\left(\sqrt{\frac{3 \cdot 4}{2 \cdot 15} \frac{E_b}{N_0}}\right)$$

$$\frac{8}{3} \cdot 10^{-7} = \operatorname{erfc}\left(\sqrt{\frac{3 \cdot 4}{2 \cdot 15} \frac{E_b}{N_0}}\right)$$

$$\sqrt{\frac{3 \cdot 4}{2 \cdot 15} \frac{E_b}{N_0}} = 3,63845 \quad (\text{resultado de MATLAB, con la tabla: 3,640})$$

$$\frac{E_b}{N_0} = 33,0965 \text{ v.p.} \quad \rightarrow \quad 15,2 \text{ dB}$$

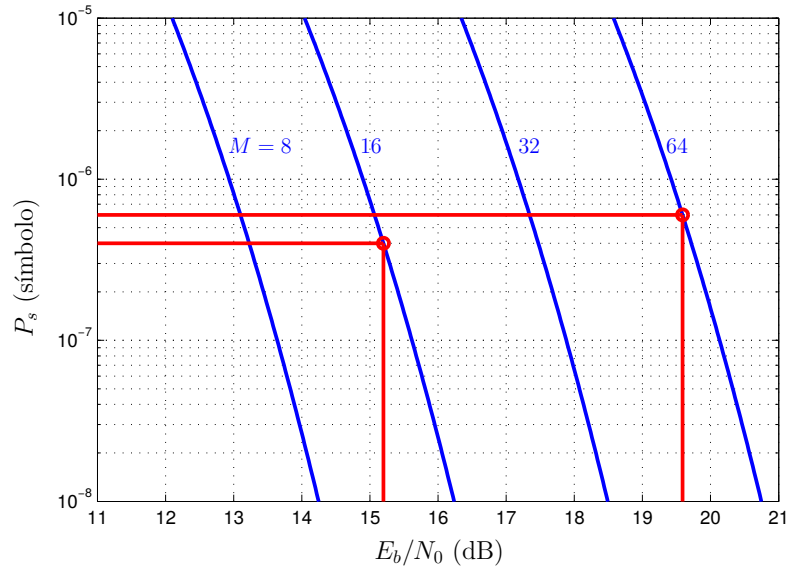


Figura 9.3: Curvas de calidad de QAM con los valores de P_s para 16QAM y 64QAM.

Para 64QAM:

$$P_s \approx k \cdot P_b = 6 \cdot 10^{-7}$$

$$P_s = 1 - (1 - p)^2 \approx 2p; \quad (p \ll 1)$$

$$p \approx 3 \cdot 10^{-7}$$

$$p = \frac{7}{8} \operatorname{erfc} \left(\sqrt{\frac{9}{63} \frac{E_b}{N_0}} \right)$$

$$\frac{24}{7} \cdot 10^{-7} = \operatorname{erfc} \left(\sqrt{\frac{3 \cdot 4}{2 \cdot 15} \frac{E_b}{N_0}} \right)$$

$$\sqrt{\frac{3 \cdot 4}{2 \cdot 15} \frac{E_b}{N_0}} = 3,60499 \quad (\text{resultado de MATLAB, con la tabla: } 3,605)$$

$$\frac{E_b}{N_0} = 90,9713 \text{ v.p.} \rightarrow 19,6 \text{ dB}$$

3. Cálculos de ruido:

$$T_e = T_0 (f - 1) = 300 (2 - 1) = 300 \text{ K}$$

$$N_0 = k (T_{in} + T_e) = 1,3806 \cdot 10^{-23} (300 + 300) = 8,2836 \cdot 10^{-21} \text{ W/Hz}$$

Para 16QAM:

$$\text{Tomamos: } E_b/N_0 = 15 \text{ dB}$$

$$E_b = 10^{1,5} \cdot N_0 = 2,6195 \cdot 10^{-19} \text{ J}$$

$$E_b = \frac{p_{TX}/a_t}{R_b} = \frac{p_{TX}/10^{9,2}}{155 \cdot 10^6}$$

$$p_{TX} = 0,06435 \text{ W} \rightarrow 18,1 \text{ dBm}$$

$$\text{Añadimos el margen: } P_{TX} = 18,1 + 6 = 24,1 \text{ dBm}$$

Para 64QAM:

$$\text{Tomamos: } E_b/N_0 = 19 \text{ dB}$$

$$E_b = 10^{1,9} \cdot N_0 = 6,5799 \cdot 10^{-19} \text{ J}$$

$$E_b = \frac{p_{TX}/a_t}{R_b} = \frac{p_{TX}/10^{9,2}}{155 \cdot 10^6}$$

$$p_{TX} = 0,1616 \text{ W} \rightarrow 22,1 \text{ dBm}$$

$$\text{Añadimos el margen: } P_{TX} = 22,1 + 6 = 28,1 \text{ dBm}$$

Como era de esperar, hay que transmitir más potencia con la constelación mayor (64QAM).

4. Anchos de banda ocupados:

$$B = \frac{R_b}{k} (1 + \alpha)$$

$$B_{16} = \frac{155(\text{M})}{4} 1,2 = 46,5 \text{ MHz}$$

$$B_{64} = \frac{155(\text{M})}{6} 1,2 = 31 \text{ MHz}$$

La 64QAM ocupa menos espectro, para un régimen binario fijado.

5. La cascada de 2 filtros raíz de coseno alzado es un coseno alzado. Luego el sistema está libre de interferencia intersimbólica.

Problema 9.3 (Febrero de 1994)

1. A partir del error máximo sacamos el tamaño del escalón y el número de bits por muestra:

$$q_{max} = \frac{\Delta}{2} = \frac{7812,5(\mu)}{2}$$

$$\Delta = 7812,5 \mu\text{V}$$

$$\Delta = \frac{2 x_{sc}}{2^n}$$

$$7812,5(\mu) = \frac{2 \cdot 1}{2^n}$$

$$2^n = 256 \text{ niveles}$$

$$n = 8 \text{ bits/muestra}$$

2. Frecuencia de muestreo:

$$f_m = f_{Nyq} = 2W = 2 \cdot 375 = 750 \text{ Hz}$$

Régimen binario a la entrada de cada uno de los moduladores:

$$R_b = n \cdot f_m = 8 \cdot 750 = 6 \text{ kbps}$$

3. En el ancho de banda disponible en la línea, B_T , hay que acomodar 2 modulaciones PSK y la banda de guarda (BG):

$$B_T = 2B_{PSK} + BG$$

$$14(\text{k}) = 2B_{PSK} + 2(\text{k})$$

$$B_{PSK} = 6 \text{ kHz}$$

Ahora comparamos el ancho de banda de una PSK con su régimen binario, a través de la fórmula del coseno alzado sin IIS:

$$B_{PSK} = \frac{R_b}{k} (1 + \alpha)$$

$$6 = \frac{6}{k} (1 + 1)$$

$$k = 2 \text{ bits/símbolo}$$

$$M = 2^k = 4 \text{ símbolos}$$

4. En la figura 9.4 se observa cómo se reparte el ancho de banda de la línea de transmisión.

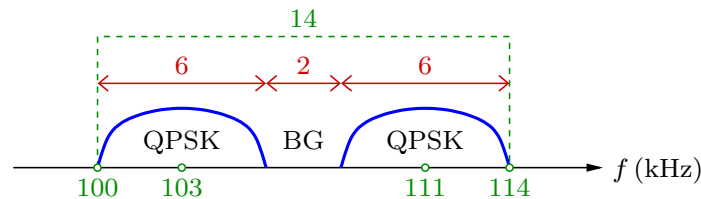


Figura 9.4: Reparto del ancho de banda de la línea.

Obviamente:

$$f_{c1} = 103 \text{ kHz}$$

$$f_{c2} = 111 \text{ kHz}$$

5. Escalón de cuantificación:

$$K = +E \left[\frac{|0,6|}{7812,5(\mu)} \right] = +76$$

Palabra código:

$$K = +76 \rightarrow 1-1001100$$

6. Ahora la banda disponible va desde 100 kHz hasta 110 kHz. En los 10 kHz hay que multiplexar 2 modulaciones MPSK y la BG:

$$B_T = 2 B_{PSK} + BG$$

$$10(\text{k}) = 2 B_{PSK} + 2(\text{k})$$

$$B_{PSK} = 4 \text{ kHz}$$

Ahora comparamos el ancho de banda de una PSK con su régimen binario, a través de la fórmula del coseno alzado sin IIS:

$$B_{PSK} = \frac{R_b}{k} (1 + \alpha)$$

$$4 = \frac{6}{k} (1 + 1)$$

$$k = 3 \text{ bits/símbolo}$$

$$M = 2^k = 8 \text{ símbolos}$$

Luego necesitamos modulaciones 8PSK. Las nuevas portadoras son:

$$f_{c1} = 102 \text{ kHz}$$

$$f_{c2} = 108 \text{ kHz}$$

7. Nomenclatura de subíndices: primer filtro cuadripolo 1; amplificador cuadripolo 2; segundo filtro cuadripolo 3; demodulador cuadripolo 4. Temperatura equivalente de cada elemento:

$$T_{in} = 300 \text{ K}$$

$$T_{e1} = 300 (10^{0,125} - 1) \approx 100 \text{ K}$$

$$T_{e2} = 300 (2 - 1) = 300 \text{ K}$$

$$T_{e3} = 300 (10 - 1) = 2700 \text{ K}$$

Ganancias y atenuaciones:

$$a_1 = 10^{0,125} \approx 1,3335 \text{ v.p.}$$

$$g_2 = 100 \text{ v.p.}$$

$$a_3 = 10 \text{ v.p.}$$

Temperatura de ruido total equivalente, llevada a la entrada del demodulador:

$$T_T = T_{in} \frac{g_2}{a_1 a_3} + T_{e1} \frac{g_2}{a_1 a_3} + T_{e2} \frac{g_2}{a_3} + T_{e3} \frac{1}{a_3} + T_{e4}$$

$$T_T = (300 + 100) \frac{100}{1,3335 \cdot 10} + 300 \frac{100}{10} + 2700 \frac{1}{10} + 973$$

$$T_T \approx 7243 \text{ K}$$

Densidad espectral:

$$N_0 = k T_T \approx 10^{-19} \text{ W/Hz}$$

8. Calculamos la energía por bit para una de las PSK, pues para la otra el resultado será el mismo. La atenuación total desde el transmisor hasta la entrada del detector incluye el medio, el amplificador del receptor y el filtro atenuador del receptor:

$$A_t = 160 - 20 + 10 = 150 \text{ dB}$$

Energía por bit:

$$E_b = \frac{p_{TX}/a_t}{R_b} = \frac{10/10^{15}}{6000} = 1.6 \cdot 10^{-18} \text{ J}$$

9. De nuevo, calculamos la probabilidad de símbolo erróneo para una de las PSK, ya que para la otra se obtiene el mismo resultado. Relación E_b/N_0 :

$$\frac{E_b}{N_0} = \frac{1.6 \cdot 10^{-18}}{10^{-19}} \approx 16,67 \text{ v.p.} \rightarrow 12,2 \text{ dB}$$

En la gráfica de 8PSK:

$$P_s \approx 10^{-4}$$

(No es una aproximación muy buena, sale un poco más.)

10. Probabilidad de bit erróneo:

$$P_b \approx \frac{P_s}{k} \approx 3,3 \cdot 10^{-5}$$

Problema 9.4 (Junio de 1994)

1. Períodos de portadora por símbolo en el enlace ascendente (16QAM):

$$R_s = \frac{R_b}{4} = 500 \text{ kbaudios}$$

$$\frac{T_s}{T_c} = \frac{f_c}{R_s} = \frac{17(\text{G})}{500(\text{k})} = 34000$$

Períodos de portadora por símbolo en el enlace descendente (QPSK):

$$R_s = \frac{R_b}{2} = 1 \text{ Mbaudios}$$

$$\frac{T_s}{T_c} = \frac{12(\text{G})}{1(\text{M})} = 12000$$

2. En la figura 9.5 se observa la señal transmitida.

Cálculos previos:

$$PEP = \frac{9}{5} p = \frac{9}{5} 80 = 144 \text{ W}$$

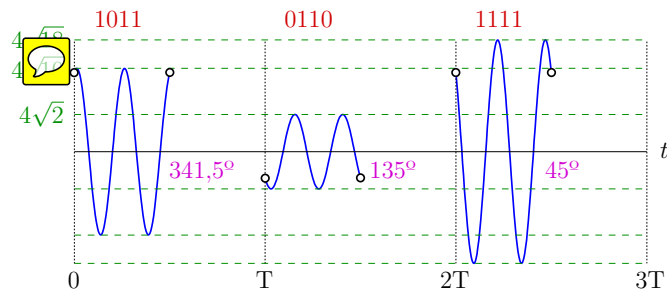


Figura 9.5: Señal transmitida.

$$PEP = \frac{A_p^2}{2R}$$

$$144 = \frac{A^2}{2}$$

$$A_p = \sqrt{2 \cdot 144}$$

$$3A = A_p \cos(45^\circ) = 12$$

$$A = 4 \text{ V}$$

Desfase y amplitud de “1011”:

$$\theta_i = -\arctan(1/3) \approx -18,4^\circ$$

$$A_i = \sqrt{9A^2 + A^2} = 4\sqrt{10} \text{ V}$$

Desfase y amplitud de “0110”:

$$\theta_i = 90 + 45 = 135^\circ$$

$$A_i = \sqrt{A^2 + A^2} = 4\sqrt{2} \text{ V}$$

Desfase y amplitud de “1111”:

$$\theta_i = 45^\circ$$

$$A_i = A_p = \sqrt{9A^2 + 9A^2} = 4\sqrt{18} \text{ V}$$

3. Temperatura de ruido de cada elemento:

$$T_{in} = T_a = 150 \text{ K}$$

$$T_{e1} = 300 (10^{0,125} - 1) \approx 100 \text{ K (no está a } T_0)$$

$$T_{e2} = 300 (2 - 1) = 300 \text{ K}$$

$$T_{e3} = 300 (100 - 1) = 29700 \text{ K}$$

$$T_{e4} = 300 (2 - 1) = 300 \text{ K}$$

$$T_{e5} = 331 \text{ K}$$

Temperatura total equivalente a la entrada del detector:

$$a_1 = 10^{0,05} \approx 1,122 \text{ v.p.}$$

$$g_2 = 1000 \text{ v.p.}$$

$$a_3 = 100 \text{ v.p.}$$

$$a_4 = 2 \text{ v.p.}$$

$$T_T = \frac{(T_{in} + T_{e1}) g_2}{a_1 a_3 a_4} + \frac{T_{e2} g_2}{a_3 a_4} + \frac{T_{e3}}{a_3 a_4} + \frac{T_{e4}}{a_4} + T_{e5}$$

$$T_T = \frac{(150 + 100) 1000}{1,122 \cdot 100 \cdot 2} + \frac{300 \cdot 1000}{100 \cdot 2} + \frac{29700}{100 \cdot 2} + \frac{300}{2} + 331$$

$$T_T = 3243,6 \text{ K}$$

Densidad espectral de potencia de ruido unilateral:

$$N_0 = k T_T = 4,478 \cdot 10^{-20} \text{ W/Hz} \rightarrow -193,5 \text{ dBW/Hz}$$

4. Energía media por bit:

$$A_t = 134 + 0,5 - 30 + 20 + 3 = 127,5 \text{ dB}$$

$$p_{TX} = 4 \text{ W}$$

$$E_b = \frac{p_{TX}/a_t}{R_b} = \frac{4/10^{12,75}}{2 \cdot 10^6} = 3,557 \cdot 10^{-19} \text{ J}$$

$$E_b = -184,5 \text{ dBJ}$$

5. Relación E_b/N_0 :

$$\frac{E_b}{N_0} = -184,5 - (-193,5) = 9 \text{ dB}$$

De la gráfica QPSK:

$$P_s \approx 7 \cdot 10^{-5}$$

BER:

$$P_b \approx \frac{P_s}{k} = 3,5 \cdot 10^{-5}$$

6. Podemos despreciar la probabilidad de que un bit erróneo de un enlace sea arreglado con un nuevo error por el otro enlace. Así, un bit será erróneo si sufre error en un enlace u otro, de manera que sumamos las probabilidades. Como en el enlace ascendente la BER es mucho más baja, la calidad BER total es aproximadamente la del enlace descendente:

$$P_{bT} \approx P_{ba} + P_{bd} = 10^{-8} + 3,5 \cdot 10^{-5} \approx 3,5 \cdot 10^{-5}$$

7. Para el enlace ascendente se dispone de más energía, lo que facilita la transmisión de una constelación mayor. Por lo tanto, es preferible que la 16QAM se emplee en el enlace ascendente, tal y como aparece en el enunciado.

Problema 9.5 (Junio de 1995)

1. Régimen simbólico:

$$M = 8 \rightarrow k = 3 \text{ bits/símbolo}$$

$$R_s = \frac{R_b}{k} = \frac{14400}{3} = 4800 \text{ baudios}$$

Tiempo de símbolo:

$$T_s = \frac{1}{R_s} = 208.3 \mu\text{s}$$

2. Para demostrar la ortogonalidad calculamos el producto escalar:

$$\langle \Psi_1, \Psi_2 \rangle = \int_0^T \frac{-2}{T} \cos\left(\frac{6\pi t}{T}\right) \sin\left(\frac{6\pi t}{T}\right) dt$$

$$\langle \Psi_1, \Psi_2 \rangle = \frac{-2}{T} \int_0^T \frac{1}{2} \sin\left(\frac{12\pi t}{T}\right) dt = 0 \text{ (q.e.d.)}$$

Para demostrar que las señales están normalizadas en energía, hallamos sus energías:

$$\langle \Psi_1, \Psi_1 \rangle = \int_0^T \frac{2}{T} \cos\left(\frac{6\pi t}{T}\right) dt = \frac{2}{T} \int_0^T \frac{1}{2} \left[1 + \cos\left(\frac{12\pi t}{T}\right)\right] dt = 1 + 0 \text{ (q.e.d.)}$$

$$\langle \Psi_2, \Psi_2 \rangle = \int_0^T \frac{2}{T} \sin\left(\frac{6\pi t}{T}\right) dt = \frac{2}{T} \int_0^T \frac{1}{2} \left[1 - \cos\left(\frac{12\pi t}{T}\right)\right] dt = 1 - 0 \text{ (q.e.d.)}$$

3. Calculamos la energía media por símbolo de la constelación transmitida. Como hay 4 símbolos de energía baja y 4 de energía alta, basta con promediar 2 energías:

$$E_1 = A^2$$

$$E_2 = (2A)^2 + A^2 = 5A^2$$

$$E_s = \frac{1}{2} (A^2 + 5A^2) = 3A^2 = 300 \mu\text{J}$$

$$A = 0,01 \text{ V}$$

Energía transmitida por bit:

$$E_b = \frac{E_s}{k} = 100 \mu\text{J}$$

Potencia media transmitida:

$$p_{TX} = E_b \cdot R_b = 1,44 \text{ W}$$

4. A partir de la pulsación sacamos que hay tres ciclos por símbolo:

$$\omega_c = 2\pi f_c = \frac{6\pi}{T} = 2\pi \frac{3}{T}$$

$$T_c = \frac{1}{f_c} = \frac{T}{3}$$

Calculamos la amplitud y la fase de cada símbolo:

$$\text{En general: } E = \frac{A^2}{2} T \quad \rightarrow \quad A = \sqrt{\frac{2}{T}} \sqrt{E}$$

$$\text{Vamos a usar: } \theta = \arctan\left(\frac{1}{2}\right) \approx 26,6^\circ$$

$$s_1 = \{011\}$$

$$A'_1 = 0,01 \text{ (raíz de energía)}$$

$$A_1 = 0,01 \sqrt{\frac{2}{T}}$$

$$\theta_1 = 90^\circ$$

$$s_2 = \{001\}$$

$$A'_2 = 0,01 \sqrt{5} \text{ (raíz de energía)}$$

$$A_2 = 0,01 \sqrt{5} \sqrt{\frac{2}{T}}$$

$$\theta_2 \approx 180 + 26,6 = 206,6^\circ$$

$$s_3 = \{010\}$$

$$A'_3 = 0,01 \text{ (raíz de energía)}$$

$$A_3 = 0,01 \sqrt{\frac{2}{T}}$$

$$\theta_3 = 180^\circ$$

$$s_4 = \{111\}$$

$$A'_4 = 0,01 \sqrt{5} \text{ (raíz de energía)}$$

$$A_4 = 0,01 \sqrt{5} \sqrt{\frac{2}{T}}$$

$$\theta_4 \approx 26,6^\circ$$

En la figura 9.6 se observa la señal temporal transmitida para “011-001-010-111”:

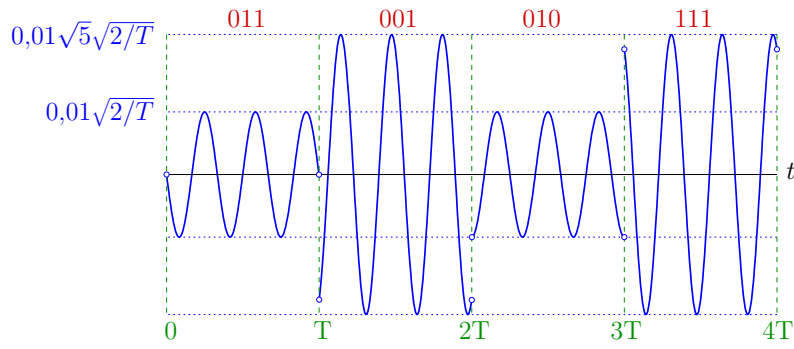


Figura 9.6: Señal transmitida.

5. Nomenclatura: primer símbolo, $s_1(t)$; segundo símbolo, $s_2(t)$; se añade al subíndice el punto en cuestión (por ejemplo: s_{1B} es el primer símbolo en el punto B).

Los dos primeros símbolos transmitidos son:

$$s_1(t) = \begin{cases} -0,01\sqrt{\frac{2}{T}} \sin\left[\frac{6\pi t}{T}\right] & ; \quad 0 \leq t < T \\ 0 & ; \quad \text{resto} \end{cases}$$

$$s_2(t) = \begin{cases} -0,01\sqrt{\frac{2}{T}} \left\{ 2 \cos\left[\frac{6\pi(t-T)}{T}\right] - \sin\left[\frac{6\pi(t-T)}{T}\right] \right\} & ; \quad T \leq t < 2T \\ 0 & ; \quad \text{resto} \end{cases}$$

El medio retarda 0,001 segundos y atenúa 10^4 veces de señal. Tomamos s_1 y s_2 y pasamos por el medio para llegar al punto A:

$$s_{1A}(t) = \begin{cases} -0,01\sqrt{\frac{2}{T}} \cdot 10^{-4} \sin\left[\frac{6\pi(t-0,001)}{T}\right] & ; \quad 0,001 \leq t < T + 0,001 \\ 0 & ; \quad \text{resto} \end{cases}$$

$$s_{2A}(t) = \begin{cases} -0,01\sqrt{\frac{2}{T}} \cdot 10^{-4} \left\{ 2 \cos\left[\frac{6\pi(t-T-0,001)}{T}\right] - \sin\left[\frac{6\pi(t-T-0,001)}{T}\right] \right\} & ; \quad T + 0,001 \leq t < 2T + 0,001 \\ 0 & ; \quad \text{resto} \end{cases}$$

Las portadoras recuperadas son:

Eje I, primer símbolo:

$$c_{1I}(t) = \begin{cases} \cos\left[\frac{6\pi(t-0,001)}{T}\right] & ; \quad 0,001 \leq t < T + 0,001 \\ 0 & ; \quad \text{resto} \end{cases}$$

Eje I, segundo símbolo:

$$c_{2I}(t) = \begin{cases} \cos\left[\frac{6\pi(t-T-0,001)}{T}\right] & ; \quad T + 0,001 \leq t < 2T + 0,001 \\ 0 & ; \quad \text{resto} \end{cases}$$

Eje Q, primer símbolo:

$$c_{1Q}(t) = \begin{cases} -\sin\left[\frac{6\pi(t-0,001)}{T}\right] & ; \quad 0,001 \leq t < T + 0,001 \\ 0 & ; \quad \text{resto} \end{cases}$$

Eje Q, segundo símbolo:

$$c_{2Q}(t) = \begin{cases} -\operatorname{sen}\left[\frac{6\pi(t-T-0,001)}{T}\right] & ; \quad T + 0,001 \leq t < 2T + 0,001 \\ 0 & ; \quad \text{resto} \end{cases}$$

Para llegar a los puntos B y C hay que multiplicar los símbolos recibidos por las portadoras recuperadas (B está en la rama I, C en la Q):

$$\begin{aligned} s_{1B}(t) &= \begin{cases} s_{1A}(t) c_{1I}(t) & ; \quad 0,001 \leq t < T + 0,001 \\ 0 & ; \quad \text{resto} \end{cases} \\ s_{2B}(t) &= \begin{cases} s_{2A}(t) c_{2I}(t) & ; \quad T + 0,001 \leq t < 2T + 0,001 \\ 0 & ; \quad \text{resto} \end{cases} \\ s_{1C}(t) &= \begin{cases} s_{1A}(t) c_{1Q}(t) & ; \quad 0,001 \leq t < T + 0,001 \\ 0 & ; \quad \text{resto} \end{cases} \\ s_{2C}(t) &= \begin{cases} s_{2A}(t) c_{2Q}(t) & ; \quad T + 0,001 \leq t < 2T + 0,001 \\ 0 & ; \quad \text{resto} \end{cases} \end{aligned}$$

Para llegar a los puntos D y E hay que integrar, respectivamente, los resultados de B y C, durante el tiempo del símbolo. (Los valores obtenidos son voltios de continua durante el tiempo del símbolo en cuestión. Como el valor varía de un símbolo a otro, obtenemos una señal PAM.)

Valor RX en D para el primer símbolo:

$$\begin{aligned} s_{1D}(t) &= \int_{0,001}^{T+0,001} s_{1B}(t) dt = \int_{0,001}^{T+0,001} s_{1A}(t) c_{1I}(t) dt \\ s_{1D}(t) &= \int_{0,001}^{T+0,001} -0,01\sqrt{\frac{2}{T}} \cdot 10^{-4} \operatorname{sen}\left[\frac{6\pi(t-0,001)}{T}\right] \cos\left[\frac{6\pi(t-0,001)}{T}\right] dt \\ s_{1D}(t) &= 0 \quad (\operatorname{sen} \text{ y } \cos \text{ son ortogonales}) \end{aligned}$$

Valor RX en D para el segundo símbolo:

$$\begin{aligned} s_{2D}(t) &= \int_{T+0,001}^{2T+0,001} s_{2B}(t) dt = \int_{T+0,001}^{2T+0,001} s_{2A}(t) c_{2I}(t) dt \\ \text{Llamamos: } \alpha &= \frac{6\pi(t-T-0,001)}{T} \\ s_{2D}(t) &= \int_{T+0,001}^{2T+0,001} -2 \cdot 0,01\sqrt{\frac{2}{T}} \cdot 10^{-4} \cos(\alpha) \cos(\alpha) dt + \\ &\quad + \int_{T+0,001}^{2T+0,001} 0,01\sqrt{\frac{2}{T}} \cdot 10^{-4} \operatorname{sen}(\alpha) \cos(\alpha) dt \\ s_{2D}(t) &= -2 \cdot 0,01\sqrt{\frac{2}{T}} \cdot 10^{-4} \cdot \frac{T}{2} + 0 \\ s_{2D}(t) &= -0,01\sqrt{2T} \cdot 10^{-4} \end{aligned}$$

Mediante cálculos similares se obtienen los valores RX en E para los dos primeros símbolos:

$$s_{1E}(t) = 0,01\sqrt{\frac{T}{2}} \cdot 10^{-4}$$

$$s_{2E}(t) = -0,01\sqrt{\frac{T}{2}} \cdot 10^{-4}$$

6. Calculamos las cotas de la probabilidad de símbolo erróneo en una APK:

$$d_{min} = 0,01\sqrt{2} \cdot 10^{-4} = \sqrt{2} \cdot 10^{-6}$$

$$\frac{d_{min}}{2\sqrt{N_0}} \approx 4,0825$$

$$\frac{1}{8} \operatorname{erfc}(4,0825) \leq P_s \leq \frac{8-1}{2} \operatorname{erfc}(4,0825)$$

$$\operatorname{erfc}(4,0825) \approx 7,92 \cdot 10^{-8}$$

$$9,9 \cdot 10^{-10} \leq P_s \leq 2,8 \cdot 10^{-8}$$

7. Cada símbolo contiene 3 bits, y los símbolos situados sobre el eje Ψ_1 están rodeados por cuatro símbolos contiguos. Por lo tanto es imposible realizar una codificación de Gray.
8. Las regiones de decisión se observan en la figura 9.7.

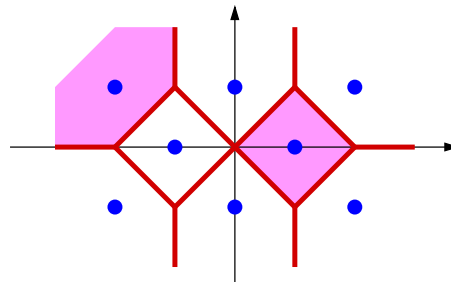


Figura 9.7: Fronteras de decisión (en rojo). Para mayor claridad, dos de las regiones de decisión se han coloreado en magenta.

Problema 9.6 (Septiembre de 1995)

1. Período de símbolo:

$$M = 8 \rightarrow k = 3 \text{ bits/símbolo}$$

$$R_s = \frac{R_b}{k} = \frac{750(k)}{3} = 250 \text{ kbaudios}$$

$$T_s = \frac{1}{R_s} = 4 \mu\text{s}$$

2. Valor de n :

$$\frac{2\pi n}{T} = 2\pi f$$

$$f = \frac{n}{T} = n R_s$$

$$250 \cdot 10^6 = n \cdot 250 \cdot 10^3$$

$$n = 1000$$

3. Factor de redondeo máximo:

$$B = R_s (1 + \alpha)$$

$$300(\text{k}) = 250(\text{k}) (1 + \alpha)$$

$$\alpha = 0,2$$

4. Energía media por símbolo:

$$E_1 = A^2$$

$$E_2 = 2 A^2$$

$$E_s = \frac{E_1 + E_2}{2} = \frac{3 A^2}{2} = \frac{3 \cdot 5,164 \cdot 10^{-3}}{2} \approx 40 \text{ } \mu\text{J}$$

Potencia media transmitida:

$$E_s = \frac{p_{TX}}{R_s}$$

$$40 \cdot 10^{-6} = \frac{p_{TX}}{250 \cdot 10^3}$$

$$p_{TX} = 10 \text{ W}$$

Energía media por bit:

$$E_b = \frac{E_s}{k} \approx 13,3 \text{ } \mu\text{J}$$

5. Ciclos de portadora por símbolo:

$$\frac{T}{T_c} = T \cdot f_c = 4 \cdot 10^{-6} \cdot 250 \cdot 10^6 = 1000$$

Posibles amplitudes:

$$A_2 = \sqrt{2} \sqrt{\frac{2}{T}} A = \frac{2}{\sqrt{4 \cdot 10^{-6}}} \cdot 5,164 \cdot 10^{-3} = 5,164 \text{ V}$$

$$A_1 = \sqrt{\frac{2}{T}} A \approx 3,6515 \text{ V}$$

Amplitudes y fases de cada símbolo:

$$\{101\}$$

$$5,164 \text{ V}$$

$$135^\circ$$

{110}

5,164 V

225°

{001}

3,6515 V

0°

{100}

3,6515 V

90°

La señal transmitida se observa en la figura 9.8.

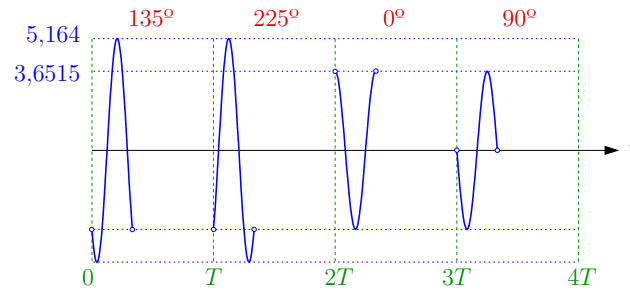


Figura 9.8: Señal transmitida.

Al pasar por el medio la señal sufre atenuación y retardo:

$$a_t = 10^{60/20} = 1000 \text{ v.s.}$$

$$\tau = \frac{T}{4n} = \frac{4 \cdot 10^{-6}}{4 \cdot 1000} = 10^{-9} \text{ s}$$

La señal recibida se observa en la figura 9.9.

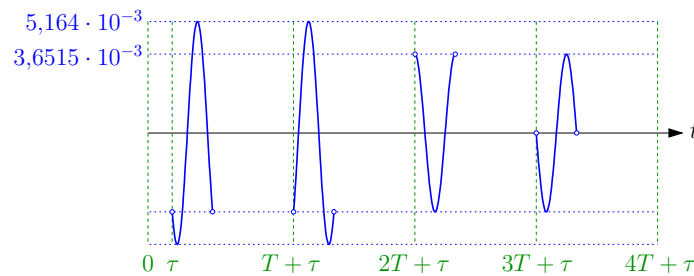


Figura 9.9: Señal recibida.

6. Las regiones de decisión se observan en la figura 9.10.

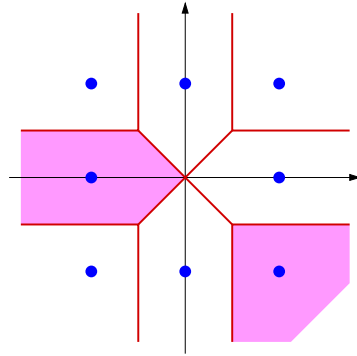


Figura 9.10: Regiones de decisión.

7. Calculamos las cotas de la probabilidad de símbolo erróneo en una APK:

$$d_{min} = \frac{A}{a_t} = \frac{5,164 \cdot 10^{-3}}{1000} = 5,164 \cdot 10^{-6}$$

$$\frac{d_{min}}{2\sqrt{N_0}} \approx 4,715$$

$$\frac{1}{8} \operatorname{erfc}(4,715) \leq P_s \leq \frac{8-1}{2} \operatorname{erfc}(4,715)$$

$$\operatorname{erfc}(4,715) \approx 2,6 \cdot 10^{-11}$$

$$3,2 \cdot 10^{-12} \leq P_s \leq 9,1 \cdot 10^{-11}$$

Problema 9.7 (Febrero de 1996)

1. La fase en función de la información $x(t)$ es:

$$\theta(t) = \frac{\pi}{2} x(t)$$

Y la frecuencia:

$$\Delta f = (600 - 400) 10^3 = 200 \cdot 10^3 \text{ Hz}$$

$$f_c = 500 \cdot 10^3 \text{ Hz}$$

$$f(t) = 500 \cdot 10^3 + \frac{\Delta f}{2} [2x(t) - 1]$$

De manera que la señal 2FSK queda:

$$s(t) = \cos \left\{ 2\pi [500 \cdot 10^3 + (\Delta f/2) (2x - 1)] t + \frac{\pi}{2} x \right\}$$

$$x = \{1, 0\}$$

El espectro se observa en la figura 9.11.

Ancho de banda:

$$B = (M - 1) \Delta f + R_s (1 + \alpha) = \Delta f + R_s = 200(\text{k}) + 100(\text{k}) = 300 \text{ kHz}$$

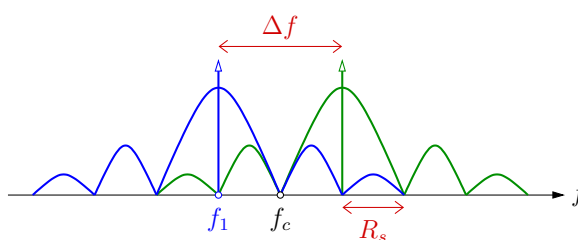


Figura 9.11: El espectro total 2FSK se obtiene sumando los dos subespectros componentes (azul y verde).

2. Separación mínima de ortogonalidad para FSK no coherente:

$$\Delta f = R_s = 100 \text{ kHz}$$

Luego podemos bajar Δf a la mitad. Si queremos bajar más Δf manteniendo R_b tenemos 2 opciones:

- Cambiar la FSK de no coherente a coherente ($\theta_1 = \theta_2$). Así:

$$\Delta f = \frac{R_s}{2} = 50 \text{ kHz}$$

- Aumentar el número de símbolos de la constelación. Para MFSK (no coherente):

$$k = \log_2(M)$$

$$R_s = \frac{R_b}{k}$$

$$\Delta f = R_s = \frac{R_b}{k}$$

3. Calidad:

$$\frac{E_b}{N_0} = 10^{1,4} \text{ v.p.}$$

$$P_b = \frac{1}{2} \exp\left(-\frac{10^{1,4}}{2}\right) \approx 1,76 \cdot 10^{-6}$$

El receptor óptimo coherente para FSK aparece detallado en las transparencias de la asignatura.

4. La representación gráfica de la señal temporal para “1011” se deja a cargo del alumno.

Problema 9.8 (Junio de 1996)

1. Número de símbolos del sistema (combinaciones de 3 frecuencias con 2 fases):

$$M = 6$$

2. Cada símbolo tiene 3 bits. De las 8 palabras binarias posibles, 2 quedan sin asignar: “000” y “111”. Es inmediato ver que no podemos transmitir más de 4 unos o ceros seguidos. Esto facilita la recuperación del sincronismo de símbolo.
3. En la figura 9.12 se observan la constelación y las coordenadas. Los ejes ortonormales son:

$$T = 5 \mu\text{s}$$

$$\psi_1 = \sqrt{\frac{2}{T}} \cos(2\pi f_1 t)$$

$$\psi_2 = \sqrt{\frac{2}{T}} \cos(2\pi f_2 t)$$

$$\psi_3 = \sqrt{\frac{2}{T}} \cos(2\pi f_3 t)$$

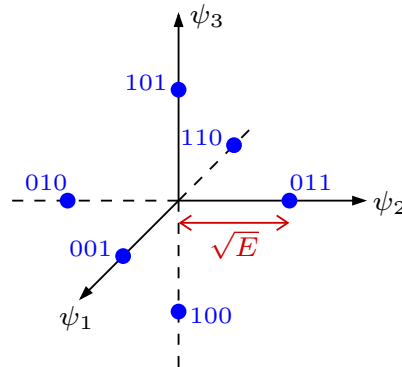


Figura 9.12: Constelación y coordenadas.

En cuanto a las coordenadas, calculamos el caso concreto de “011”:

$$E_1 = E_2 = E_3 = E = \frac{A^2}{2} T$$

$$\sqrt{E} = A \sqrt{\frac{T}{2}} = 20 \sqrt{\frac{5 \cdot 10^{-6}}{2}} \approx 3,162 \cdot 10^{-2}$$

$$\text{“011”} = 0 \cdot \psi_1 + \sqrt{E} \cdot \psi_2 + 0 \cdot \psi_3$$

4. Es una mezcla de 3FSK y 2PSK. Este tipo de sistemas son bastante habituales hoy en día: se toman N (muy grande) portadoras ortogonales y se modula cada una linealmente (con BPSK, QPSK, 16QAM, etc.). Como la modulación lineal exige que la fase de cada portadora varíe, la ortogonalidad entre portadoras es la de una FSK no coherente.

5. En la figura 9.13 se observa el espectro (unilateral). La separación entre frecuencias contiguas es $\Delta f' = 20$ MHz, mientras que desde el centro de cada frecuencia hasta el primer nulo hay $R_s = 1/T = 200$ kHz. Con el criterio de Nyquist, el ancho de banda ocupado será:

$$B_{3FSK+2PSK} = 2 \cdot \Delta f' + R_s = 40,2 \text{ MHz}$$

La eficiencia espectral es muy baja:

$$\eta = \frac{R_b}{B} = \frac{k R_s}{B} = \frac{3 \cdot 200 \cdot 10^3}{40,2 \cdot 10^6} \approx 0,015$$

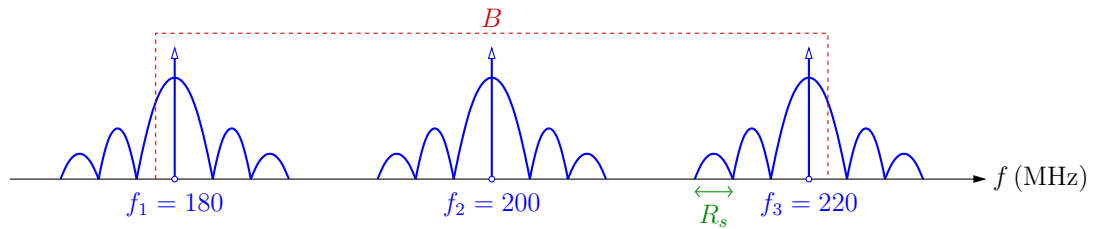


Figura 9.13: Espectro de la modulación híbrida FSK+PSK.

6. La separación mínima de ortogonalidad de la FSK (o de las portadoras) es $\Delta f = R_s = 200$ kHz, pues no hay coherencia por culpa de la modulación PSK.

La señal $x(t)$, con frecuencia 200 MHz y fase $-\pi$, se detectará como “010”. Las señales $y(t)$ y $z(t)$ son ortogonales a las frecuencias esperadas (f_1, f_2, f_3) de modo que las decisiones sólo dependerán del ruido. NO es cierto que la probabilidad de error con $z(t)$ sea mayor que con $y(t)$.

Problema 9.9 (Septiembre de 1996)

1. Es 8-PSK, porque tenemos 8 símbolos equiespaciados en una circunferencia.
2. Expresión temporal de las señales:

$$s_i(t) = \sqrt{E} \sqrt{\frac{2}{T}} \cos \left[\omega_c t + \frac{2\pi(i-1)}{8} + \frac{\pi}{8} \right] ; \quad 0 \leq t \leq T$$

Donde:

$$i = 1, 2, \dots, 8$$

$$\omega_c = 2\pi \cdot 900 \cdot 10^6$$

$$\frac{1}{T} = R_s = \frac{R_b}{k} = \frac{4(\text{M})}{3} = \frac{4}{3} \text{ Mbaudios}$$

$$\sqrt{E} \sqrt{\frac{2}{T}} \approx 1,633 \cdot 10^3 \sqrt{E}$$

3. Base ortonormal ($\sqrt{2/T} \approx 1633$ V):

$$\psi_1(t) = \sqrt{\frac{2}{T}} \cos(\omega_c t)$$

$$\psi_2(t) = -\sqrt{\frac{2}{T}} \sin(\omega_c t)$$

Coordenadas de “011”:

$$s_{011} = a \cdot \psi_1(t) + b \cdot \psi_2(t)$$

$$\text{fase: } 5\pi/8$$

$$s_{011} \rightarrow \begin{cases} a = \sqrt{E} \cos\left(\frac{5\pi}{8}\right) \approx -0,3827 \sqrt{E} \\ b = \sqrt{E} \sin\left(\frac{5\pi}{8}\right) \approx 0,9239 \sqrt{E} \end{cases}$$

4. Ancho de banda (Criterio de Nyquist + modulación lineal):

$$B = 2 \frac{R_s}{2} (1 + \alpha) = \frac{4(\text{M})}{3} (1 + 0) = 1,3 \text{ MHz}$$

El espectro se observa en la figura 9.14.

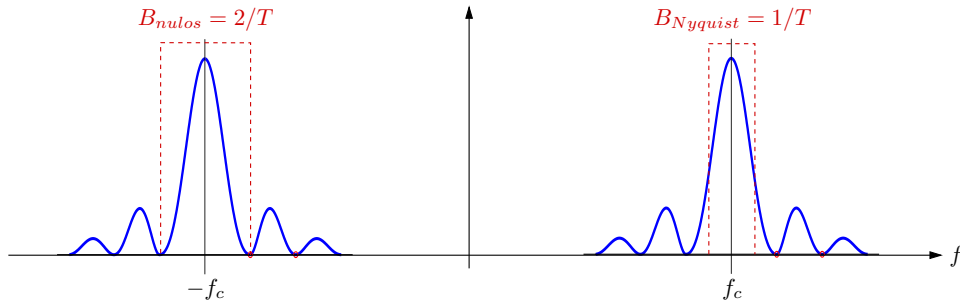


Figura 9.14: Espectro de potencia en unidades naturales.

5. Como en una secuencia de 300000 bits hay 20 erróneos:

$$P_b \approx \frac{20}{300000} = 6,6 \cdot 10^{-5}$$

Teniendo en cuenta que la codificación es de Gray:

$$P_s \approx k P_b = 2 \cdot 10^{-4}$$

En la gráfica, para la curva de $M = 8$, con $P_s = 2 \cdot 10^{-4}$:

$$\frac{E_b}{N_0} \approx 12,0 \text{ dB} \rightarrow 15,849 \text{ v.p.}$$

Despejamos E_b y la amplitud de la señal:

$$E_b = 15,849 \cdot N_0 = 1,25 \cdot 10^{-17}$$

$$E_b = \frac{A^2}{2} \cdot \frac{1}{R_b}$$

$$A = \sqrt{2 \cdot R_b \cdot E_b} = 10^{-5} \text{ V}$$

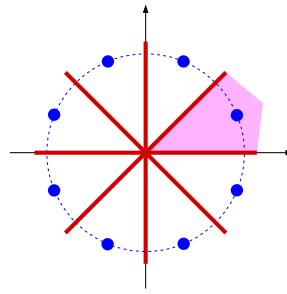


Figura 9.15: Regiones de decisión.

6. En la figura 9.15 se observan las regiones de decisión.
7. Calculamos la distancia mínima entre símbolos mediante trigonometría básica (véase la figura 9.16):

$$d_{min} = 2 \sin(\pi/8) \sqrt{E} \approx 0,76537 \sqrt{E}$$

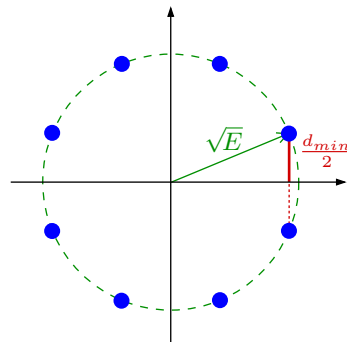


Figura 9.16: Cálculo de la distancia entre símbolos contiguos.

Una constelación de menor energía media por símbolo es la 8APK óptima. En la figura 9.17 se observa la constelación de la 8APK óptima.

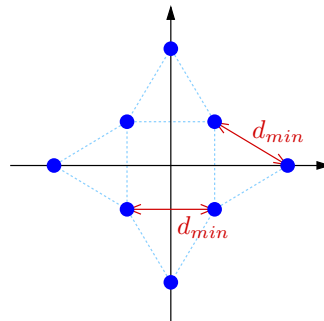


Figura 9.17: Constelación de menor energía media: 8APK óptima.

Calculamos la energía media de cada constelación en función de la distancia entre

símbolos contiguos:

$$E_{PSK} = \left[\frac{d_{min}}{2 \sin(\pi/8)} \right]^2 \approx 1,7017 \cdot d_{min}^2$$

$$E_{APK} = \frac{\left(\frac{d_{min}}{\sqrt{2}} \right)^2 + \left[\frac{(1+\sqrt{3})d_{min}}{2} \right]^2}{2} \approx 1,1830 \cdot d_{min}^2$$

Y la diferencia de energías medias, en dB, entre ambas constelaciones es:

$$\Delta = 10 \log \left[\frac{E_{PSK}}{E_{APK}} \right] = 10 \log \left[\frac{1,7017}{1,1830} \right] \approx 1,6 \text{ dB}$$

Problema 9.10 (Febrero de 1997)

1. El transmisor puede generar cuatro señales diferentes:

$$s(t) = \pm A \cos(\omega_1 t) \pm A \cos(\omega_2 t)$$

Comprobamos si los símbolos coseno a f_1 y f_2 son ortogonales:

$$M = 4 \text{ símbolos}$$

$$k = 2 \text{ bits/símbolo}$$

$$R_{bT} = 64 + 64 = 128 \text{ bps}$$

$$R_s = \frac{R_{bT}}{k} = 64 \text{ baudios}$$

(Nota: el régimen binario de una rama o canal, $R_b = 64$ bps, coincide con el régimen simbólico del sistema; pero el régimen binario total de información, $R_{bT} = 128$ bps, es el doble del régimen simbólico del sistema, pues hay 4 símbolos.)

$$\text{Coherente: } \Delta f = \frac{R_s}{2} = 32 \text{ Hz}$$

Como los símbolos tienen la separación mínima de ortogonalidad, son ortogonales. Es inmediato comprobar que basta con un espacio de dimensión 2. Una base ortonormal es:

$$\psi_1 = \sqrt{\frac{2}{T}} \cos(\omega_1 t)$$

$$\psi_2 = \sqrt{\frac{2}{T}} \cos(\omega_2 t)$$

2. Potencia media antes del amplificador (las potencias de los canales #1 y #2 se suman porque son ortogonales):

$$p = \frac{A^2}{2} + \frac{A^2}{2} = A^2 = 10^{-4} \text{ W} \rightarrow -10 \text{ dBm}$$

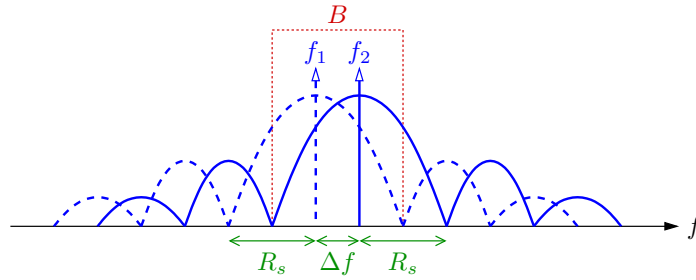


Figura 9.18: Espectro transmitido.

Pasamos por el amplificador:

$$P_T = P + G_T = -10 + 20 = 10 \text{ dBm}$$

En la figura 9.18 se observa el espectro transmitido.

Ancho de banda:

$$B = (M - 1) \Delta f + R_s (1 + \alpha) = \Delta f + R_s = 32 + 64 = 96 \text{ Hz}$$

3. Las portadoras recuperadas coinciden con la base ortonormal. Como en cada canal (en cada rama) se efectúa una decisión binaria, podemos estudiar lo que ocurre en la rama superior (y en la inferior sucederá lo mismo). Pasar por la circuitería del receptor (multiplicar por la portadora recuperada e integrar en T) equivale a proyectar sobre ψ_1 , lo que nos da un resultado como raíz de energía. La señal recibida es:

$$s_R(t) = \pm A_R \cos(\omega_1 t) \pm A_R \cos(\omega_2 t)$$

Con potencia media:

$$p_R = \frac{A_R^2}{2} + \frac{A_R^2}{2} = A_R^2$$

A la entrada del decisor de la rama superior tendremos:

$$z_1 = \int_0^T s_R \psi_1 dt$$

Por ortogonalidad eliminamos en s_R el sumando a f_2 :

$$z_1 = \int_0^T \pm A_R \cos(\omega_1 t) \cdot \sqrt{\frac{2}{T}} \cos(\omega_1 t) dt$$

$$z_1 = \pm A_R \sqrt{\frac{2}{T}} \frac{T}{2} = \pm A_R \sqrt{\frac{T}{2}}$$

Que, como ya comentamos, coincide con la proyección (raíz de energía) de la señal (quitando la parte ortogonal):

$$z_1 = \sqrt{E} = \sqrt{pT} = \sqrt{\frac{A_R^2}{2} T}$$

La distancia, como raíz de energía, entre los 2 símbolos de la rama superior es:

$$d = 2 A_R \sqrt{\frac{T}{2}} = A_R \sqrt{2T}$$

Que también se puede calcular como la raíz de la energía de la señal diferencia (de nuevo quitando la parte ortogonal a la portadora recuperada):

$$s_d = 2 A_R \cos(\omega_1 t)$$

$$E_d = \frac{4 A_R^2}{2} T = 2 A_R^2 T$$

$$d = \sqrt{E_d} = A_R \sqrt{2T}$$

La densidad de ruido vale:

$$N_0 = k T_e$$

Sustituimos en la probabilidad de bit erróneo (decisión binaria de la rama superior):

$$P_b = \frac{1}{2} \operatorname{erfc}\left(\frac{d}{2\sqrt{N_0}}\right)$$

$$P_b = \frac{1}{2} \operatorname{erfc}\left(\frac{A_R \sqrt{2T}}{2\sqrt{k T_e}}\right) = \frac{1}{2} \operatorname{erfc}\left(\frac{A_R \sqrt{T}}{\sqrt{2k T_e}}\right)$$

El dato del enunciado es p_R , de manera que:

$$p_R = A_R^2$$

$$P_b = \frac{1}{2} \operatorname{erfc}\left(\frac{\sqrt{p_R T}}{\sqrt{2k T_e}}\right) = \frac{1}{2} \operatorname{erfc}\left(\frac{\sqrt{p_R}}{\sqrt{2k T_e R_s}}\right)$$

Que es un resultado válido tanto para el canal #1 como para el canal #2 .

4. Imponemos la calidad límite:

$$10^{-6} = \frac{1}{2} \operatorname{erfc}(x)$$

De la tabla: $x \approx 3,36$

$$3,36 = \frac{\sqrt{p_R}}{\sqrt{2k T_e R_s}}$$

$$3,36^2 = 11,29 = \frac{p_R}{2 \cdot 1,3806 \cdot 10^{-23} \cdot 40 \cdot 10^6 \cdot 64}$$

$$p_R = 7,98 \cdot 10^{-13} \text{ W} \rightarrow -91,0 \text{ dBm}$$

A partir de la potencia transmitida y la recibida sacamos la atenuación:

$$A_t = P_T - P_R = 10 - (-91,0) = 101 \text{ dB}$$

Y con la fórmula de la atenuación calculamos la distancia:

$$101 = 80 + 20 \log[d(\text{km})]$$

$$d \approx 11,2 \text{ km}$$

Problema 9.11 (Junio de 1997)

1. Ancho de banda mínimo en banda base:

$$R_s = \frac{R_b}{k} = \frac{1000(\text{k})}{2} = 500 \text{ kbaudios}$$

$$B_{BB} = \frac{R_s}{2} (1 + \alpha) = \frac{500(\text{k})}{2} 1,4 = 350 \text{ kHz}$$

Ancho de banda de la modulación 4-ASK:

$$B_{ASK} = 2 B_{BB} = 700 \text{ kHz}$$

2. Base ortonormal (una dimensión):

$$\Psi(t) = \sqrt{\frac{2}{T}} \cos(\omega_c t)$$

$$\sqrt{\frac{2}{T}} = \sqrt{2 R_s} = 1000$$

Coordenadas de las señales $s_i(t)$:

$$s_1 = -3 \cdot 10^{-3} \cdot \Psi$$

$$s_2 = -10^{-3} \cdot \Psi$$

$$s_3 = 10^{-3} \cdot \Psi$$

$$s_4 = 3 \cdot 10^{-3} \cdot \Psi$$

En la figura 9.19 se observa la constelación de señales transmitidas, con una asignación Gray.

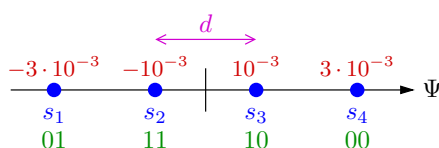


Figura 9.19: Constelación de señales.

En la figura 9.20 se observa una constelación de menor energía (una QPSK), para una distancia entre símbolos contiguos d fija.

3. Atenuación:

$$a_t = 10^6 \text{ v.p.}$$

Las coordenadas de la constelación en recepción, sobre el eje Ψ , son:

$$c_1 = -3 \cdot 10^{-9}$$

$$c_2 = -10^{-9}$$

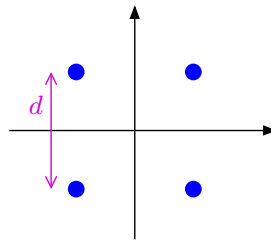


Figura 9.20: Constelación de menor energía (QPSK).

$$c_3 = 10^{-9}$$

$$c_4 = 3 \cdot 10^{-9}$$

Energía media por símbolo:

$$E_1 = c_1^2 = 9 \cdot 10^{-18}$$

$$E_2 = c_2^2 = 10^{-18}$$

$$E_s = \frac{E_1 + E_2}{2} = 5 \cdot 10^{-18} \text{ J}$$

Probabilidad de símbolo erróneo:

$$P_s = \frac{4-1}{4} \operatorname{erfc} \left(\sqrt{\frac{3}{4^2-1} \frac{5 \cdot 10^{-18}}{6,25 \cdot 10^{-20}}} \right) = \frac{3}{4} \operatorname{erfc}(4) \approx \frac{3}{4} 1,54 \cdot 10^{-8}$$

$$P_s \approx 1,16 \cdot 10^{-8}$$

Probabilidad de bit erróneo:

$$P_b \approx \frac{P_s}{2} = 5,8 \cdot 10^{-9}$$

4. Calculamos la energía media de la QPSK, imponiendo la distancia entre símbolos contiguos de la 4ASK (ver figura 9.21):

$$d = 2 \cdot 10^{-18}$$

$$E_s = \left(\frac{d}{2}\right)^2 + \left(\frac{d}{2}\right)^2 = 2 \cdot 10^{-18} \text{ J}$$

Cotas de la probabilidad de símbolo erróneo para la QPSK:

$$\operatorname{erfc} \left[\sqrt{\frac{E_s}{N_0}} \sin \left(\frac{\pi}{M} \right) \right] \geq P_s \geq \frac{1}{2} \operatorname{erfc} \left[\sqrt{\frac{E_s}{N_0}} \sin \left(\frac{\pi}{M} \right) \right]$$

$$\sqrt{\frac{E_s}{N_0}} \sin \left(\frac{\pi}{M} \right) = \sqrt{\frac{2 \cdot 10^{-18}}{6,25 \cdot 10^{-20}}} \sin \left(\frac{\pi}{4} \right) = 4$$

$$1,54 \cdot 10^{-8} \geq P_s \geq 7,70 \cdot 10^{-9}$$

Cotas de la probabilidad de bit erróneo:

$$7,70 \cdot 10^{-9} \geq P_b \geq 3,85 \cdot 10^{-9}$$

La BER de ambas constelaciones es similar porque se mantiene la distancia entre símbolos contiguos. Si se desfasa la constelación QPSK la calidad no varía (no afecta a ningún parámetro de la fórmula de calidad).

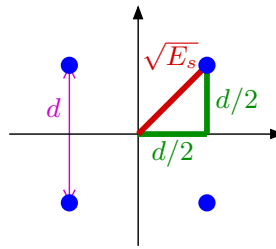


Figura 9.21: Cálculo de E_s en la constelación QPSK recibida, manteniendo la distancia entre símbolos contiguos de la 4ASK.

Problema 9.12 (Septiembre de 1997)

1. Limitamos con la condición de ortogonalidad.

Con FSK coherente:

$$\Delta f = \frac{R_s}{2} \rightarrow R_s = 2 \Delta f = 2 \cdot 50(\text{k})$$

$$R_s = 100 \text{ kbaudios}$$

$$R_b = 100 \text{ kbps}$$

Con FSK no coherente:

$$\Delta f = R_s$$

$$R_s = 50 \text{ kbaudios}$$

$$R_b = 50 \text{ kbps}$$

2. En la figura 9.22 se observa la constelación con asignación. Las señales de la base ortonormal son:

$$\psi_1 = \sqrt{\frac{2}{T}} \cos(\omega_1 t)$$

$$\psi_2 = \sqrt{\frac{2}{T}} \cos(\omega_2 t)$$

Donde:

$$f_2 = f_c - \frac{\Delta f}{2} = 499,975 \text{ MHz}$$

$$f_1 = f_c + \frac{\Delta f}{2} = 500,025 \text{ MHz}$$

La energía media por símbolo, que coincide con la energía de cualquiera de los símbolos, es:

$$E_s = E = p \cdot T = \frac{4,5}{50 \cdot 10^3} = 9 \cdot 10^{-5} \text{ J}$$

Por lo que la distancia al origen de un símbolo es:

$$\sqrt{E} \approx 9,4868 \cdot 10^{-3}$$

Y la distancia entre símbolos contiguos queda:

$$d = \sqrt{E + E}$$

$$d = \sqrt{2 \cdot 90 \cdot 10^{-6}} \approx 0,0134 \text{ (raíz de energía)}$$

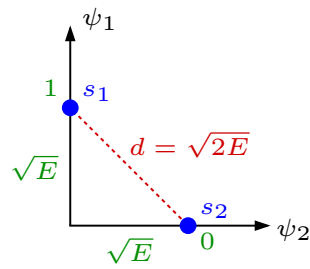


Figura 9.22: Constelación con asignación.

3. No hay cambios cualitativos: los símbolos siguen siendo ortogonales. (Aunque sí cambian las frecuencias de la base ortonormal.)
4. Ancho de banda:

$$B = (2 - 1) \Delta f + R_s (1 + \alpha) = \Delta f + R_s$$

$$B = 50(\text{k}) + 50(\text{k}) = 100 \text{ kHz}$$

El espectro de potencia se observa en la figura 9.23.

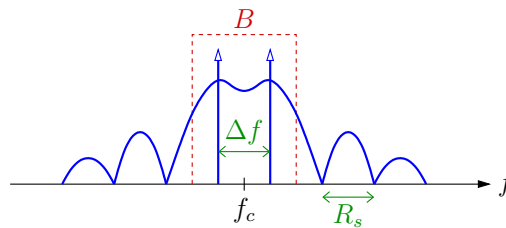


Figura 9.23: Espectro.

5. En la figura 9.24 se observa la señal transmitida. Valores significativos:

$$T_s = \frac{1}{R_s} = 20 \text{ } \mu\text{s}$$

$$T_b = T_s$$

$$f_1 = 500,025 \text{ MHz}$$

$$f_2 = 499,975 \text{ MHz}$$

$$T_1 = \frac{1}{f_1}$$

$$T_2 = \frac{1}{f_2}$$

$$\frac{T_s}{T_1} = 10000,5 \text{ ciclos/símbolo}$$

$$\frac{T_s}{T_2} = 9999,5 \text{ ciclos/símbolo}$$

$$p_T = \frac{A^2}{2} \rightarrow A = \sqrt{2 p_T}$$

$$A = 3 \text{ V}$$

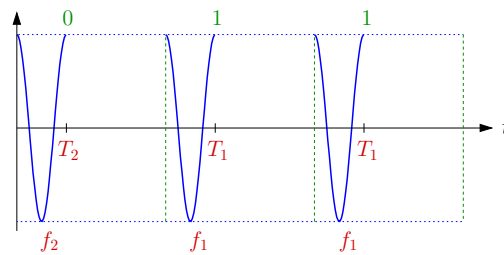


Figura 9.24: Señal transmitida.

6. Señal analítica correspondiente al tercer símbolo:

$$y_3(t) = A \cos(2\pi f_1 t); \quad 2T_s \leq t \leq 3T_s$$

$$A = 3 \text{ V}$$

$$f_1 = 500,025 \text{ MHz}$$

$$T_s = 20 \text{ } \mu\text{s}$$

7. Como las señales son coherentes, la separación mínima de ortogonalidad es:

$$\Delta f = \frac{R_s}{2} = 25 \text{ kHz}$$

a) Señal RX $y_A(t)$:

$$\langle y_A, s_1 \rangle = \int_0^T y_A(t) s_1(t) dt = 3 \int_0^T \cos^2(2\pi f_1 t) dt$$

la integral (sin la constante 3) equivale a la energía de un símbolo coseno de duración T sobre 1 Ω :

$$\langle y_A, s_1 \rangle = 3 \cdot \frac{1^2}{2} \cdot T = \frac{3 \cdot 20 \cdot 10^{-6}}{2} = 3 \cdot 10^{-5}$$

$$\langle y_A, s_2 \rangle = 0 \quad (\text{son ortogonales: } f_A - f_2 = 50 \text{ kHz})$$

$$Z(T) = 3 \cdot 10^{-5} - 0 > 0 \Rightarrow s_1(t) \text{ "1"}$$

b) Señal RX $y_B(t)$:

$$\langle y_B, s_1 \rangle = 0 \quad (\text{son ortogonales: } f_1 - f_B = 25 \text{ kHz})$$

$$\langle y_B, s_2 \rangle = 0 \quad (\text{son ortogonales: } f_B - f_2 = 25 \text{ kHz})$$

$$Z(T) = 0 \quad \Rightarrow \quad \text{decisión impredecible}$$

Problema 9.13 (Junio de 1998)

1. El máximo régimen binario se consigue cuando: a) Cada cadena radiofónica se modula en QPSK con el ancho de banda de un canal de Nyquist ($\alpha = 0$). b) Las QPSK se multiplexan en frecuencia utilizando la separación mínima de ortogonalidad (como las portadoras están moduladas en fase se trata de una ortogonalidad no coherente).

En la figura 9.25 se observa el espectro simplificado de la multiplexación. De cada QPSK sólo se representa el lóbulo principal.

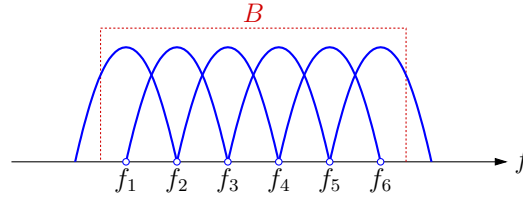


Figura 9.25: Espectro de la multiplexación.

Una cadena tiene canal derecho e izquierdo, ambos con el mismo régimen binario. El régimen binario de la cadena en conjunto es:

$$R_{bIi} = R_{bDi}$$

$$R_{bi} = R_{bIi} + R_{bDi} = 2 R_{bDi}$$

Las 6 cadenas llevan una información total:

$$R_{bT} = 6 R_{bi} = 12 R_{bDi}$$

Una QPSK está modulada con la información de una cadena, R_{bi} . Por lo tanto, su régimen simbólico es:

$$k = \log_2(4) = 2$$

$$R_{si} = \frac{R_{bi}}{2} = \frac{2 R_{bDi}}{2} = R_{bDi}$$

La ortogonalidad entre las portadoras QPSK equivale al caso de una FSK no coherente (las fases varían), donde se cambia de símbolo a velocidad R_{si} . Luego la separación mínima de ortogonalidad es:

$$\Delta f = R_{si}$$

Con todas las consideraciones anteriores, y observando la figura 9.25, es inmediato calcular el ancho de banda:

$$B = (M - 1) \Delta f + R_{si} = (6 - 1) R_{si} + R_{si} = 6 R_{si}$$

Imponemos el ancho de banda disponible, y sacamos los regímenes binarios buscados:

$$1,5 \cdot 10^6 = 6 R_{si}$$

$$R_{si} = 250 \text{ kbaudios}$$

$$R_{bDi} = R_{dIi} = 250 \text{ kb/s}$$

$$R_{bT} = 3 \text{ Mb/s}$$

2. Será un banco de 6 receptores óptimos QPSK en paralelo, cada uno a una de las 6 frecuencias posibles. (Cada RX óptimo decodifica una de las cadenas radiofónicas, y rechaza las otras pues son ortogonales.)

El dibujo se deja a cargo del alumno.

3. Estudiamos una QPSK, y los resultados se podrán aplicar a cualquiera de ellas (y, por ende, al sistema en conjunto).

$$P_s \approx k P_b = 2 \cdot 10^{-9}$$

$$P_s \approx \text{erfc} \left[\sqrt{\frac{E_s}{N_0}} \sin\left(\frac{\pi}{M}\right) \right] = \text{erfc} \left[\sqrt{2 \frac{E_b}{N_0}} \sin\left(\frac{\pi}{4}\right) \right]$$

$$2 \cdot 10^{-9} \approx \text{erfc} \left[\sqrt{2 \frac{E_b}{N_0}} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} \right] = \text{erfc} \left[\sqrt{\frac{E_b}{N_0}} \right]$$

$$\sqrt{\frac{E_b}{N_0}} \approx 4,24$$

$$\frac{E_b}{N_0} \approx 17,98 \text{ v.p.} \rightarrow 12,5 \text{ dB}$$

Problema 9.14 (Noviembre de 1998)

1. Al multiplexar temporalmente los dos canales obtenemos un régimen binario total:

$$R_{bT} = R_{bi} + R_{bi} = 2 R_{bi} = 2 \cdot 25 \cdot 10^3 = 50 \text{ kbps}$$

De manera que cada bit (cada símbolo, pues la modulación es binaria) ocupa:

$$T_b = \frac{1}{R_{bT}} = 20 \text{ } \mu\text{s}$$

En los 100 μs caben 5 bits. La multiplexación bit a bit de esos primeros 5 bits es:

$$1_1 1_2 0_1 0_2 0_1$$

donde el subíndice indica de qué canal proviene cada bit. Comparando el tiempo de bit con el periodo de portadora:

$$\frac{T_b}{T_c} = T_b \cdot f_c = 20 \cdot 10^{-6} \cdot 100 \cdot 10^3 = 2 \text{ ciclos/símbolo}$$

La señal transmitida con ASK (OOK), para los 5 primeros bit de la multiplexación, se observa en la figura 9.26.

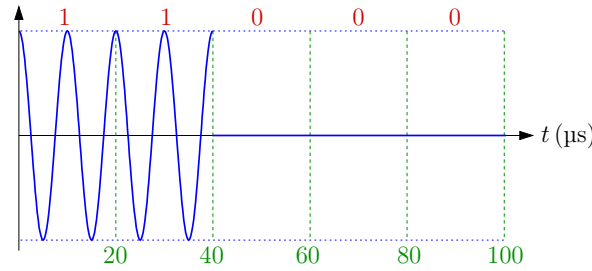


Figura 9.26: Señal TX con ASK (OOK).

2. La señal transmitida con BPSK se observa en la figura 9.27.

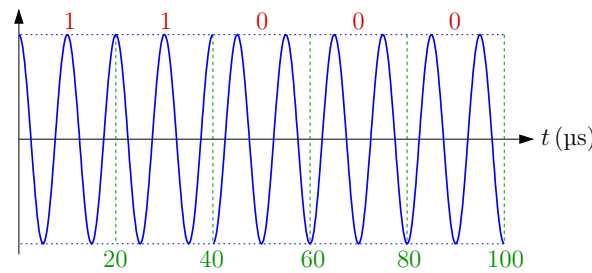


Figura 9.27: Señal TX con BPSK.

3. Ancho de banda mínimo sin IIS en BPSK:

$$B = R_s = R_{bT} = 50 \text{ kHz}$$

No hay límite para el ancho de banda máximo.

4. Ahora tenemos 2 canales de 25 kbaudios multiplexados en frecuencia. Cada canal ocupa:

$$B_i = 25 \text{ kHz}$$

La multiplexación necesita:

$$B = 2 B_i = 50 \text{ kHz}$$

Y la separación entre las portadoras es:

$$\Delta f = 25 \text{ kHz}$$

En la figura 9.28 se aclara la situación.

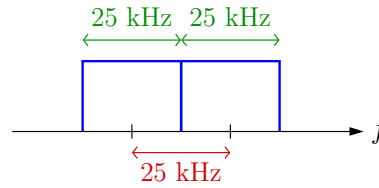


Figura 9.28: Separación entre las portadoras.

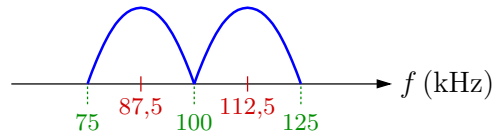


Figura 9.29: Espectro transmitido.

5. El espectro transmitido se observa en la figura 9.29.
6. La BER depende de la relación E_b/N_0 . Para tener una calidad constante, suponiendo un ruido fijo, fijamos también E_b , y despejamos la potencia que se debe recibir.

BPSK-MDT:

$$E_b = p_R \cdot T_b$$

$$p_R = E_b T_b$$

BPSK-MDF (hay 2 BPSK, la ecuación se refiere a una de ellas):

$$E_b = \frac{p_R}{2} \cdot 2T_b$$

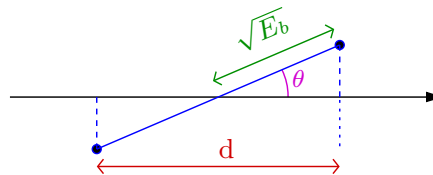
$$p_R = E_b T_b$$

Luego con la misma potencia recibida se obtiene idéntica calidad en ambos casos.

7. Suponemos que la portadora se recupera con un error θ en la fase. En la figura 9.30 se observa la constelación recibida sobre un eje normalizado en energía. La distancia (raíz de energía) entre los símbolos se reduce en un factor $\cos(\theta)$:

$$d = 2 \sqrt{E_b} \cos(\theta)$$

$$P_b = \frac{1}{2} \operatorname{erfc} \left(\frac{d}{2\sqrt{N_0}} \right) = \frac{1}{2} \operatorname{erfc} \left[\sqrt{\frac{E_b}{N_0}} \cdot \cos(\theta) \right]$$

Figura 9.30: Variación de P_b con un error en la fase de enganche.

Problema 9.15 (Junio de 1999)

1. Régimen simbólico:

$$k = \log_2(8) = 3 \text{ bits/símbolo}$$

$$R_s = \frac{R_b}{k} = \frac{2052 \cdot 10^3}{3} = 684 \text{ kbaudios}$$

Tiempo de símbolo:

$$T = \frac{1}{R_s} \approx 1,462 \text{ } \mu\text{s}$$

2. Mediante un cálculo trigonométrico elemental se puede comprobar que con la relación $b = a\sqrt{2}$ la constelación forma un rombo (los símbolos de cada cuadrante están alineados). La energía media por símbolo transmitido es:

$$E_a = a^2$$

$$E_b = b^2$$

$$E_s = \frac{a^2 + b^2}{2} = \frac{3a^2}{2}$$

Relacionamos E_s con la potencia transmitida y el régimen simbólico, despejamos a y hallamos b :

$$\frac{3a^2}{2} = p_T \cdot T = \frac{10}{684000}$$

$$a \approx 3,122 \cdot 10^{-3}$$

$$b \approx 4,415 \cdot 10^{-3}$$

3. Las regiones de decisión se observan en la figura 9.31.

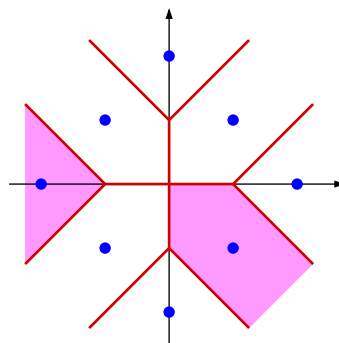


Figura 9.31: Regiones de decisión (2 aparecen coloreadas en magenta).

4. La distancia mínima entre símbolos es $d = a$. Trabajamos con la cota superior de P_s en una APK:

$$a_t = 10^{130/20} \text{ v.s.}$$

$$d = \frac{a}{a_t} \approx 9,872 \cdot 10^{-10}$$

$$P_s \leq \frac{M-1}{2} \operatorname{erfc}\left(\frac{d}{2\sqrt{N_0}}\right)$$

$$10^{-5} \leq \frac{8-1}{2} \operatorname{erfc}\left(\frac{d}{2\sqrt{N_0}}\right)$$

$$2,86 \cdot 10^{-6} \approx \operatorname{erfc}\left(\frac{d}{2\sqrt{N_0}}\right)$$

$$\frac{d}{2\sqrt{N_0}} \approx 3,31$$

$$N_0 = 2,22 \cdot 10^{-20} \text{ J}$$

5. No es óptima, pues no coincide con la 8APK óptima.

Problema 9.16 (Septiembre de 1999)

1. Es una modulación 4-APK. Energía media por bit:

$$E_s = \frac{1}{2} \left(\frac{k^2}{4} + k^2 \right) = \frac{5}{8} k^2 = 1,5625 \cdot 10^{-15} \text{ J}$$

$$E_b = \frac{E_s}{2} = 7,8125 \cdot 10^{-16} \text{ J}$$

2. Potencia media:

$$p = E_b \cdot R_b = 5 \cdot 10^{-11} \text{ W}$$

Valor de pico (para “01” o “10”):

$$\sqrt{E} = k = 5 \cdot 10^{-8}$$

$$A_p = \sqrt{\frac{2E}{T}} = k \sqrt{R_b} \approx 1,265 \cdot 10^{-5} \text{ V}$$

3. Ancho de banda (criterio de Nyquist):

$$B = R_s = 32 \text{ kHz}$$

Eficiencia espectral:

$$\eta = \frac{R_b}{B} = 2$$

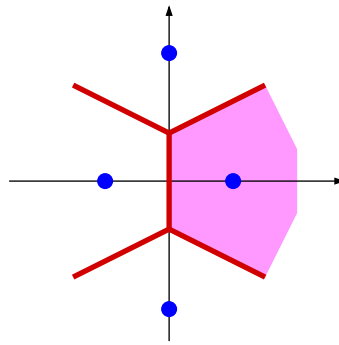


Figura 9.32: Regiones de decisión.

4. Las regiones de decisión se observan en la figura 9.32.
5. Distancia mínima entre símbolos (de 11 a 00):

$$d = k = 5 \cdot 10^{-8}$$

Cota superior de la probabilidad de símbolo erróneo:

$$P_s \leq \frac{4-1}{2} \operatorname{erfc}\left(\frac{5 \cdot 10^{-8}}{2\sqrt{10^{-16}}}\right) = \frac{3}{2} \operatorname{erfc}(2,5) \approx \frac{3}{2} \cdot 4 \cdot 10^{-4}$$

$$P_s \approx 6 \cdot 10^{-4}$$

La constelación NO tiene una codificación de Gray (ni puede tenerla). De todos modos, tomamos la aproximación típica para codificación de Gray, aunque en este caso no es tan buena aproximación:

$$P_b \sim \frac{P_s}{2} = 3 \cdot 10^{-4}$$

Problema 9.17 (Junio de 2000)

1. Detallamos el proceso con 16QAM:

Régimen simbólico máximo admitido por el canal:

$$B = R_s (1 + \alpha)$$

$$8 \cdot 10^6 = R_s (1 + 0,15)$$

$$R_s \approx 6,9565 \text{ Mbaudios}$$

Velocidad binaria total:

$$R_b(16\text{-total}) = 4 R_s \approx 27,826 \text{ Mbps}$$

Velocidad de datos:

$$R_b(16\text{-datos}) = R_b(16\text{-total}) \cdot \frac{187}{188} \cdot \frac{188}{204} \approx 25,507 \text{ Mbps}$$

El resto de los resultados son:

$$R_b(32\text{-datos}) \approx 31,884 \text{ Mbps}$$

$$R_b(64\text{-datos}) \approx 38,261 \text{ Mbps}$$

$$R_b(128\text{-datos}) \approx 44,638 \text{ Mbps}$$

$$R_b(256\text{-datos}) \approx 51,014 \text{ Mbps}$$

2. Como un canal de TV ocupa 8 Mbps:

$$N_c = E \left[\frac{R_b(\text{datos})}{8 \cdot 10^6} \right]$$

$$N_c(16) = E \left[\frac{25,508}{8} \right] = E[3,19] = 3 \text{ canales}$$

$$N_c(32) = 3 \text{ canales}$$

$$N_c(64) = 4 \text{ canales}$$

$$N_c(128) = 5 \text{ canales}$$

$$N_c(256) = 6 \text{ canales}$$

3. A partir de la potencia transmitida se calcula la amplitud A . Basta con calcular las energía de 10 símbolos —medio cuadrante—, considerando que los símbolos de la diagonal *pesan* 1/2 y el resto *pesa* 1. En la figura 9.33 se aclara la situación.

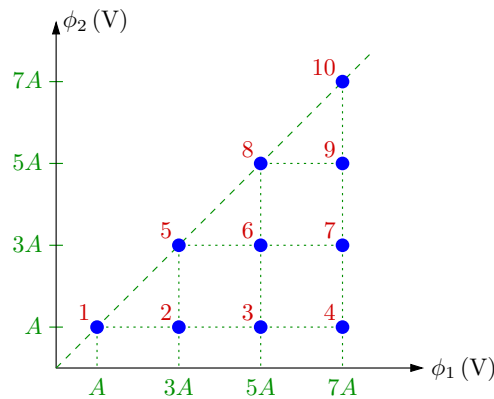


Figura 9.33: Simetrías de la constelación 64-QAM.

$$p_i = \frac{h_i^2}{2}$$

$$h_1 = \sqrt{A^2 + A^2} = A\sqrt{2}$$

$$h_2 = \sqrt{A^2 + 9A^2} = A\sqrt{10} \quad \text{etc.}$$

$$p = \frac{1}{8} \left[\frac{1}{2} (p_1 + p_5 + p_8 + p_{10}) + (p_2 + p_3 + p_4 + p_6 + p_7 + p_9) \right]$$

$$p = 21 A^2$$

$$10 \cdot 10^{-3} = 21 A^2$$

$$A \approx 2,1822 \cdot 10^{-3} \text{ V}$$

Para el primer símbolo recibido (110011) el desfase es:

$$\theta = 180 + 45 = 225^\circ$$

Y la amplitud vale:

$$h_5 = A \sqrt{18} \approx 92,582 \text{ mV}$$

Como:

$$T_c = \frac{1}{800 \cdot 10^6} = 1,25 \text{ ns}$$

$$T = \frac{1}{R_s} = 143,75 \text{ ns}$$

$$\frac{T}{T_c} = 115$$

Caben 115 ciclos de portadora por símbolo.

El cálculo del resto de los símbolos (y el dibujo) se dejan a cargo del alumno.

4. El ruido viene dado por el cable, que suponemos a T_0 . Tomamos la hipótesis de que el cable es largo (de forma que su atenuación es mucho mayor que la unidad):

$$T_e = T_0 (a_t - 1) \approx T_0 a_t$$

$$N_0 = k \frac{T_e}{a_t} \approx k T_0$$

Energía recibida por bit:

$$E_s = \frac{p_T/a_t}{R_s} = \frac{10 \cdot 10^{-3}/a_t}{6,9565 \cdot 10^6} = \frac{1,4375 \cdot 10^{-9}}{a_t}$$

$$E_b = \frac{E_s}{6} = \frac{2,3958 \cdot 10^{-10}}{a_t}$$

Imponemos la calidad límite:

$$P_s \approx k P_b = 6 \cdot 10^{-4}$$

$$P_s = 1 - (1 - p)^2 \approx 2p$$

$$p \approx 3 \cdot 10^{-4} = \frac{8-1}{8} \operatorname{erfc}(x)$$

$$\operatorname{erfc}(x) \approx 3,43 \cdot 10^{-4}$$

$$x = \frac{3 \cdot 6}{2 \cdot 63} \cdot \frac{E_b}{N_0} \approx 2,53$$

$$\frac{E_b}{N_0} \approx 18 \text{ v.p.}$$

$$18 = \frac{2,3958 \cdot 10^{-10}}{a_t \cdot 1,38 \cdot 10^{-23} \cdot 300}$$

$$a_t \approx 3,2 \cdot 10^9 \text{ v.p.}$$

Y la longitud buscada es:

$$A_t \approx 95(\text{dB}) = 20(\text{dB/km}) \cdot L(\text{km})$$

$$L = 4,75 \text{ km}$$

5. La probabilidad de error sólo se puede reducir introduciendo redundancia (con un código contra errores adecuado). El codificador de canal (204,188) realiza esta tarea.

Problema 9.18 (Septiembre de 2000)

1. La modulación es QPSK: moduladora digital, amplitud constante, cuatro fases equiespaciadas. Sin embargo, conviene señalar que la constelación está girada 45° respecto a su posición habitual.
2. Frecuencia de la portadora:

$$\omega_c = 2\pi f_c$$

$$5718 \cdot 10^6 = 2\pi f_c$$

$$f_c \approx 910 \text{ MHz}$$

Potencia media transmitida:

$$P_{TX} = 10 \log\left(\frac{4^2}{2} 1000\right) \approx 39,0 \text{ dBm}$$

Régimen simbólico:

$$R = \frac{R_b}{k} = \frac{9(\text{M})}{2} = 4,5 \text{ Mbaudios}$$

Ancho de banda de la señal modulada:

$$B = 2 \cdot B_{BB} = 2 \cdot \frac{R}{2} = R = 4,5 \text{ MHz}$$

3. Base ortonormal (dimensión 2):

$$\Psi_1(t) = \sqrt{\frac{2}{T}} \cos(5718 \cdot 10^6 \cdot t)$$

$$\Psi_2(t) = -\sqrt{\frac{2}{T}} \sin(5718 \cdot 10^6 \cdot t)$$

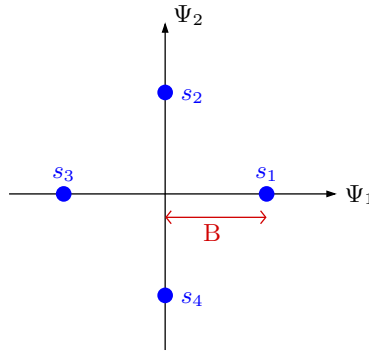


Figura 9.34: Constelación de señales. $B = (4/3) \cdot 10^{-3}$.

Donde:

$$\sqrt{\frac{2}{T}} = \sqrt{2 \cdot R} = 3000 \text{ V}$$

En la figura 9.34 se observa la constelación de las señales:

Coordenadas:

$$s_1 \rightarrow (B, 0)$$

$$s_2 \rightarrow (0, B)$$

$$s_3 \rightarrow (-B, 0)$$

$$s_4 \rightarrow (0, -B)$$

Siendo:

$$B = 4 \sqrt{\frac{T}{2}} = \frac{4}{3} \cdot 10^{-3}$$

4. Las fronteras de decisión, para símbolos equiprobables, se observan en la figura 9.35.

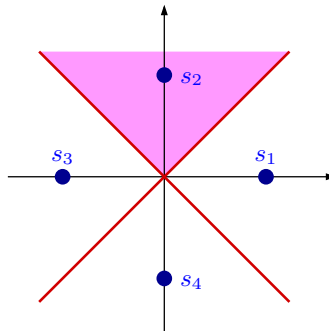


Figura 9.35: Fronteras de decisión equiprobables. La región de s_2 está coloreada en magenta.

Si s_2 y s_4 son más probables, sus zonas asociadas de decisión aumentan de tamaño (figura 9.36):

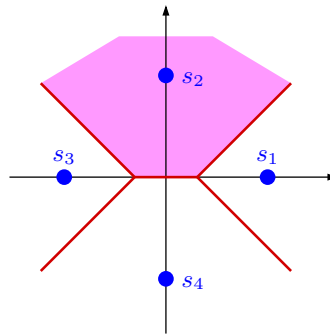


Figura 9.36: Nuevas fronteras de decisión. La región de s_2 está coloreada en magenta.

5. El demodulador IQ tiene los bloques típicos. Pero en este caso, como la constelación está girada, se esperan 3 amplitudes equidistantes en I y en Q (la central de 0 V).
6. Potencia recibida:

$$P_{RX} = P_{TX} - A_t = 39 - 99 = -60 \text{ dBm} \rightarrow 10^{-9} \text{ W}$$

Energía media por símbolo en el receptor:

$$E_s = p_{RX} \cdot T = \frac{10^{-9}}{4,5 \cdot 10^{-6}} = 2,2 \cdot 10^{-16} \text{ J}$$

7. Relación E_s/N_0 :

$$\frac{E_s}{N_0} = \frac{2,2 \cdot 10^{-16}}{1,1 \cdot 10^{-17}} \approx 20,2 \text{ v.p.}$$

Probabilidad de símbolo erróneo:

$$P_s \approx \text{erfc} \left[\sqrt{\frac{E_s}{N_0}} \cdot \sin\left(\frac{\pi}{M}\right) \right] = \text{erfc} \left[\sqrt{20,2} \cdot \sin(\pi/4) \right] \approx \text{erfc}(3,18)$$

$$P_s \approx 6,89 \cdot 10^{-6}$$

BER:

$$P_b \approx \frac{P_s}{k} = 3,45 \cdot 10^{-6}$$

Problema 9.19 (Junio de 2001)

1. Régimen simbólico que ha de transmitir el sistema:

$$R_s = \frac{R_b}{k} = \frac{2 \cdot 10^6}{2} = 1 \text{ Mbaudios}$$

Estudiamos el ancho de banda que ocupa la 4FSK en los casos coherente y no coherente:

$$B = (M - 1) \Delta f + R_s = 3 \Delta f + R_s$$

$$B(\text{coh.}) = 3 \frac{R_s}{2} + R_s = \frac{5 R_s}{2} = 2,5 \text{ MHz}$$

$$B(\text{no coh.}) = 3 R_s + R_s = 4 R_s = 4 \text{ MHz}$$

Como se dispone de 3,5 MHz es necesario usar FSK coherente, de manera que:

$$\Delta f = \frac{R_s}{2} = 500 \text{ kHz}$$

Las frecuencias de los osciladores son:

$$f_1 = f_c - 3 \frac{\Delta f}{2} = 910 \text{ MHz}$$

$$f_2 = f_c - \frac{\Delta f}{2} = 910,5 \text{ MHz}$$

$$f_3 = f_c + \frac{\Delta f}{2} = 911 \text{ MHz}$$

$$f_4 = f_c + 3 \frac{\Delta f}{2} = 911,5 \text{ MHz}$$

2. La constelación está formada por cuatro símbolos situados en ejes ortonormales, a igual distancia del origen. Todos los símbolos son adyacentes entre sí (por lo tanto, cada símbolo tiene tres adyacentes).
3. Un cable de gran atenuación, a T_0 , pone a su salida una temperatura de ruido T_0 . Como el filtro de predetección tiene ganancia unidad, tenemos tres contribuciones de ruido que se suman directamente:

$$T_{eT} = 300 + 1200 + 1500 = 3000 \text{ K}$$

Potencia de ruido (el ancho de banda lo fija el filtro):

$$n_T = k T_{eT} B = 1,449 \cdot 10^{-13} \text{ W}$$

4. En las gráficas de calidad, para $M = 4$ y con $P_b = 5 \cdot 10^{-7}$:

$$\frac{E_b}{N_0} \approx 11 \text{ dB} \rightarrow 12,59 \text{ v.p.}$$

Calculamos la potencia recibida:

$$\frac{E_b}{N_0} = \frac{p_{RX}/R_b}{k T_{eT}}$$

$$12,59 = \frac{p_{RX}/(2 \cdot 10^6)}{1,38 \cdot 10^{-23} \cdot 3000}$$

$$p_{RX} \approx 1,04 \cdot 10^{-12} \text{ W} \rightarrow -119,8 \text{ dBW}$$

Y la potencia transmitida es:

$$P_{TX} = P_{RX} + A = -119,8 + 130 = 10,2 \text{ dBW}$$

5. Eficiencia espectral (la modulación no ocupa todo el ancho del banda del filtro):

$$\eta = \frac{R_b}{B} = \frac{2}{2,5} = 0,8 \text{ b/Hz}$$

Cualquier modulación lineal (por ejemplo: QPSK) ofrece mejor eficiencia.

Problema 9.20 (Septiembre de 2001)

1. La frecuencia central de los filtros será la frecuencia de portadora:

$$f_0 = f_c = 100 \text{ MHz}$$

Las velocidades máximas que evitan interferencia intersimbólica son:

$$R_s = B = 10 \text{ Mbaudios}$$

$$R_b = k R_s = 20 \text{ Mbps}$$

2. Temperatura equivalente de ruido de un tramo i :

$$T_{ea} = T_0 (f_a - 1)$$

$$T_{ec} = T_0 (a_c - 1) \approx T_0 a_c$$

$$T_{ei} \approx T_{ea} + \frac{T_0 a_c}{g_a} = T_0 f_a - T_0 + T_0 = T_0 f_a$$

Para los N tramos (todos con ganancia unitaria):

$$T_{eT} = N T_{ei} \approx N T_0 f_a$$

Densidad espectral de ruido (total) en el punto B:

$$N_0 = k T_{eT} = 1,38 \cdot 10^{-23} \cdot 6 \cdot 300 \cdot 5 \approx 124,5 \cdot 10^{-21} \text{ J}$$

3. Energía por símbolo:

$$E_s(\text{RX}) = E_s(\text{TX}) = d^2 + d^2 = 1,2 \cdot 10^{-18} \text{ J}$$

Energía por bit:

$$E_b = \frac{E_s}{2} = 600 \cdot 10^{-21} \text{ J}$$

4. Probabilidad de símbolo erróneo:

$$P_s \approx \text{erfc} \left[\sqrt{\frac{E_s}{N_0}} \sin \left(\frac{\pi}{M} \right) \right] = \text{erfc}(2,195) \approx 0,0019$$

Sin embargo la fórmula usada no es muy precisa, porque la condición:

$$E_b/N_0 \gg 1$$

no se cumple estrictamente, ya que:

$$E_b/N_0 \approx 4,82 \text{ v.p.}$$

Probabilidad de bit erróneo:

$$P_b \approx \frac{P_s}{2} = 0,95 \cdot 10^{-3}$$

Es una probabilidad de error muy alta.

Problema 9.21 (Septiembre de 2001)

1. Cada codificador lineal entrega una 3-PAM (con niveles $-10, 0$ y 10), que se convierte en una 3-ASK. Al multiplexar en cuadratura obtenemos una 9-APK.

$$s_i(t) = 5(2i_c - 4) \cos(\omega_c t) - 5(2i_s - 4) \sin(\omega_c t)$$

Donde:

$$0 \leq t \leq T$$

$$i_c, i_s = 1, 2, 3$$

2. Base ortonormal:

$$\Psi_1(t) = \sqrt{2/T} \cos(\omega_c t)$$

$$\Psi_2(t) = -\sqrt{2/T} \sin(\omega_c t)$$

En la figura 9.37 se observa la constelación en los ejes propuestos. La señal correspondiente a “1001” tiene las coordenadas $-d$ y d en los ejes Ψ_1 y Ψ_2 , respectivamente, donde $d = 10\sqrt{T/2}$. El resto de las coordenadas se dejan a cargo del alumno.

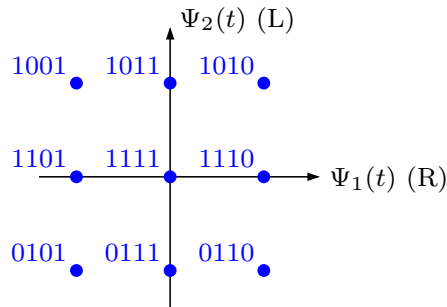


Figura 9.37: Constelación.

3. En cada rama:

$$f_m = 1,2 \cdot f_{Nyq} = 1,2 \cdot 2 \cdot 20(\text{k}) = 48 \text{ kHz}$$

$$R'_{bi} = n \cdot f_m = 16 \cdot 48(\text{k}) = 768 \text{ kb/s}$$

$$R_{bi} = \frac{4}{3} R'_{bi} = 1024 \text{ kb/s}$$

$$3\text{PAM, 3ASK: } k = 2 \text{ bits/símbolo}$$

$$R_{si}(3\text{PAM}) = R_{si}(3\text{ASK}) = \frac{R_{bi}}{2} = 512 \text{ kbaudios}$$

A la salida del sumador:

$$R_s = R_{si}(3\text{ASK}) = 512 \text{ kbaudios}$$

$$9\text{APK: } k = 4 \text{ bits/símbolo}$$

$$R_b = 4 R_s = 2048 \text{ kb/s}$$

4. Distancia entre símbolos contiguos en el receptor:

$$d_T = 10 \sqrt{T/2} \approx 9,8821 \cdot 10^{-3}$$

$$a_t = 10^4 \text{ v.s.}$$

$$d_R = \frac{d_T}{a_t} \approx 9,88 \cdot 10^{-7} \approx 10^{-6}$$

Argumento de la erfc:

$$\frac{d_R}{2\sqrt{N_0}} \approx \frac{10^{-6}}{2\sqrt{1,5625 \cdot 10^{-14}}} = 4$$

Cotas de la probabilidad de símbolo erróneo:

$$\text{erfc}(4) \approx 1,54 \cdot 10^{-8}$$

$$\frac{1}{9} \cdot 1,54 \cdot 10^{-8} \leq P_s \leq 4 \cdot 1,54 \cdot 10^{-8}$$

Cotas de la BER:

$$P_b \approx \frac{P_s}{4}$$

$$4,3 \cdot 10^{-10} \leq P_b \leq 1,54 \cdot 10^{-8}$$

5. Para subir R_b hay que aumentar M . a) En una modulación lineal, al aumentar M empeora P_b . No nos sirve, porque estamos al límite de calidad. b) En una modulación no lineal (FSK) al aumentar M mejora P_b , pagando el precio de incrementar B . No hay problema, porque sobra ancho de banda.

Luego la elección es acertada.

Problema 9.22 (Junio de 2002)

1. Hay 8 símbolos, por lo tanto:

$$k = \log_2(8) = 3 \text{ bits/símbolo}$$

Régimen simbólico:

$$R_s = \frac{R_b}{k} = \frac{60(\text{M})}{3} = 20 \text{ Mbaudios}$$

Ancho de banda de una modulación lineal:

$$B = 2 \cdot B_{BB} = R_s (1 + \alpha) = 20(\text{M}) (1 + 0,5) = 30 \text{ MHz}$$

2. Señal recibida en B (“010”):

$$A_t = 60 \text{ dB} \quad \rightarrow \quad a_t = 1000 \text{ v.s.}$$

De manera que la señal RX “010” tiene coordenadas:

$$\text{En I: } \frac{3 \cdot 10^{-4}}{1000} = 3 \cdot 10^{-7}$$

$$\text{En Q: } \frac{-1 \cdot 10^{-4}}{1000} = -1 \cdot 10^{-7}$$

Su energía es:

$$E_{010} = (3 \cdot 10^{-7})^2 + (-1 \cdot 10^{-7})^2 = 10^{-13} \text{ J}$$

Calculamos su amplitud:

$$E_{010} = \frac{A^2}{2} \cdot \frac{1}{R_s}$$

$$A = \sqrt{2 \cdot 10^{-13} \cdot 20 \cdot 10^6} = 2 \cdot 10^{-3} \text{ V}$$

Calculamos su fase:

$$\theta = -\arctan(1/3) \approx -18,435^\circ \quad \rightarrow \quad -0,32175 \text{ radianes}$$

Y la señal es:

$$s_B = A \cos(\omega t + \theta)$$

(También se puede escribir la señal en forma I-Q.)

- 3.** Las portadoras recuperadas son la base ortonormal de nuestra representación geométrica. Como el receptor proyecta sobre las portadoras recuperadas (la base), en E y F tenemos las coordenadas de la constelación recibida (son pulsos, con el valor de la muestra en T). Luego basta con tomar las coordenadas de “010” en la constelación recibida:

$$\text{En E: } z_I = +3 \cdot 10^{-7} \text{ V}$$

$$\text{En F: } z_Q = -1 \cdot 10^{-7} \text{ V}$$

También podemos obtener los valores proyectando la raíz de la energía de la señal RX según el seno o coseno de θ :

$$\sqrt{E_{010}} \approx 3,1623 \cdot 10^{-7}$$

$$z_I = +3,1623 \cdot 10^{-7} \cos(18,435^\circ) = +3 \cdot 10^{-7} \text{ V}$$

$$z_Q = -3,1623 \cdot 10^{-7} \sin(18,435^\circ) = -1 \cdot 10^{-7} \text{ V}$$

En los puntos C y D tenemos: señales PAM, extraídas por la detección; y señales ASK con frecuencia doble de portadora, que serán filtradas en el integrador.

Es fácil realizar los cálculos analíticos necesarios para comprobar todo lo expuesto. Trabajamos con el eje I:

$$\text{En B: } s_B = 2 \cdot 10^{-3} \cos(\omega t - 0,32175)$$

$$\text{P. recuperada: } \psi_1 = \sqrt{2 \cdot R_s} \cos(\omega_c t) \approx 6324,6 \cos(\omega_c t)$$

$$\text{En C: } s_B \cdot \psi_1 = 6,3246 [\cos(0,32175) + \cos(2\omega t - 0,32175)]$$

$$s_B \cdot \psi_1 = 6 + 6,3246 \cos(2\omega t - 0,32175)$$

$$\text{En E: } \int_0^T 6 dt = 6 \cdot T = \frac{6}{20 \cdot 10^6} = 3 \cdot 10^{-7}$$

4. Energía media por símbolo en RX:

$$E_{010} = 10^{-13} \text{ J}$$

$$E_{011} = (1 \cdot 10^{-7})^2 + (-1 \cdot 10^{-7})^2 = 2 \cdot 10^{-14} \text{ J}$$

$$E_s = \frac{E_{010} + E_{011}}{2} = 6 \cdot 10^{-14} \text{ J}$$

Energía atribuida al bit:

$$E_b = \frac{E_s}{3} = 2 \cdot 10^{-14} \text{ J}$$

Relación E_b/N_0 :

$$\frac{E_b}{N_0} = \frac{2 \cdot 10^{-14}}{1,125 \cdot 10^{-15}} = 17,7 \text{ v.p.} \rightarrow 12,5 \text{ dB}$$

De la gráfica de calidad:

$$P_s \approx 3 \cdot 10^{-6}$$

Y la BER queda:

$$P_b \approx \frac{P_s}{3} = 10^{-6}$$

Problema 9.23 (Septiembre de 2002)

1. En cada uno de los ejes (I y Q) hay una 2-ASK. El conjunto se multiplexa en cuadratura. Por lo tanto, la modulación resultante (QPSK) es lineal.

El espectro de potencia es una *sinc* cuadrado, centrada en 450 MHz, con ancho de banda entre nulos (del lóbulo principal) 8 MHz.

2. En la figura 9.38 se observa el modulador. Velocidades de transmisión:

$$R_{bT} = 8 \text{ Mbps}$$

$$R_{b1} = R_{b2} = 4 \text{ Mbps}$$

$$R_s = 4 \text{ Mbaudios}$$

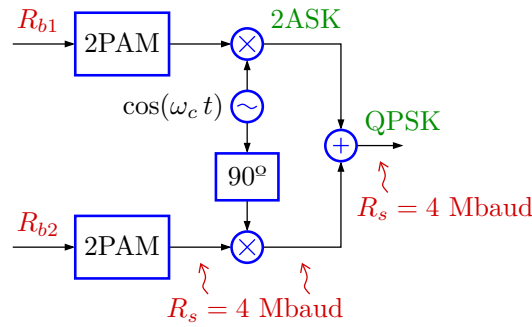


Figura 9.38: Modulador.

3. Estudiamos el primer símbolo: “11”. La amplitud (que es igual para todos los símbolos) vale:

$$A = \sqrt{2 R_s E} = \sqrt{8 \cdot 10^6 \cdot E} \text{ (V)}$$

El desfase es de 225° respecto a la referencia *coseno*. Los demás símbolos se dejan a cargo del alumno.

4. Energía por bit:

$$k = 2 \text{ bits/símbolo}$$

$$E_b = E/2$$

5. Mediante un cálculo trigonométrico inmediato se obtiene que la distancia mínima entre símbolos es:

$$d = \sqrt{2 E}$$

6. Las fronteras de decisión son los propios ejes Ψ_1 y Ψ_2 .

7. A partir del requisito BER sacamos la P_s :

$$P_s \approx k P_b = 2 \cdot 5 \cdot 10^{-8} = 10^{-7}$$

Leyendo en la gráfica:

$$\frac{E_b}{N_0} \approx 11,5 \text{ dB} \rightarrow 14,13 \text{ v.p.}$$

Calculamos E_b :

$$14,13 = \frac{E_b}{0,2 \cdot 10^{-17}}$$

$$E_b \approx 2,825 \cdot 10^{-17} \text{ J}$$

Calculamos la potencia recibida:

$$p_{RX} = E_b \cdot R_{bT} = 2,825 \cdot 10^{-17} \cdot 8 \cdot 10^6 = 2,26 \cdot 10^{-10} \text{ W}$$

$$P_{RX} \approx -66,5 \text{ dBm}$$

Problema 9.24 (Junio de 2003)

1. Periodos de portadora por símbolo:

$$R_s = \frac{2 \cdot 10^6}{4} = 500 \text{ kbaudios}$$

$$\frac{T}{T_c} = \frac{f_c}{R_s} = \frac{20 \cdot 10^9}{500 \cdot 10^3} = 40 \cdot 10^3$$

2. Estudiamos la señal correspondiente a “1111”. Es una senoide, tipo coseno, con un desfase de 45° y amplitud:

$$E_{TX} = (1 \cdot 10^{-5})^2 + (1 \cdot 10^{-5})^2 = 2 \cdot 10^{-10} \text{ J}$$

$$E_{RX} = \frac{E_{TX}}{a_t} = \frac{2 \cdot 10^{-10}}{100} = 2 \cdot 10^{-12} \text{ J}$$

$$A = \sqrt{2 \cdot R_s \cdot E_{RX}} = \sqrt{2 \cdot 500 \cdot 10^3 \cdot 2 \cdot 10^{-12}} = \sqrt{2} \text{ mV}$$

El símbolo “0100” se deja a cargo del alumno.

3. Energía media por símbolo transmitida:

$$E_1 = (1 \cdot 10^{-5})^2 + (1 \cdot 10^{-5})^2 = 2 \cdot 10^{-10}$$

$$E_2 = E_3 = (3 \cdot 10^{-5})^2 + (1 \cdot 10^{-5})^2 = 10^{-9}$$

$$E_4 = (3 \cdot 10^{-5})^2 + (3 \cdot 10^{-5})^2 = 1,8 \cdot 10^{-9}$$

$$E_s = \frac{E_1 + E_2 + E_3 + E_4}{4} = 10^{-9} \text{ J}$$

En recepción:

$$E_s = \frac{10^{-9}}{100} = 10^{-11} \text{ J}$$

4. Probabilidad de símbolo erróneo:

$$E_b = \frac{E_s}{k} = \frac{10^{-11}}{4} = 2,5 \cdot 10^{-12} \text{ J}$$

$$\frac{E_b}{N_0} = \frac{2,5 \cdot 10^{-12}}{2 \cdot 62,65 \cdot 10^{-15}} = 19,95 \text{ v.p.} \rightarrow 13 \text{ dB}$$

$$P_s \approx 10^{-4}$$

Probabilidad de bit erróneo:

$$P_b \approx \frac{P_s}{4} = 2,5 \cdot 10^{-5}$$

5. La mejora es de unos 4 dB en E_b/N_0 .

Problema 9.25 (Septiembre de 2003)

1. Como los dos símbolos tienen la misma fase, se trata de FSK coherente. La separación entre señales coherentes ortogonales es:

$$\Delta f = \frac{1}{2T} = \frac{R_s}{2}$$

$$R_s = 2 \Delta f = 2 \cdot 50(\text{k}) = 100 \text{ kbaudios}$$

$$M = 2 \Rightarrow R_b = R_s = 100 \text{ kbps}$$

2. Entre las dos frecuencias hay Δf . A cada lado de los extremos, siguiendo el criterio de Nyquist, se añade $1/(2T)$:

$$B = (M - 1) \Delta f + 2 \frac{1}{2T} = \Delta f + R_s = 150 \text{ kHz}$$

3. No ganamos nada (la calidad no varía: sigue existiendo ortogonalidad y, por lo tanto, la distancia entre símbolos no cambia). Perdemos en eficiencia espectral porque aumenta el ancho de banda.
4. En la figura 9.39 observamos un diagrama de bloques simplificado del sistema.

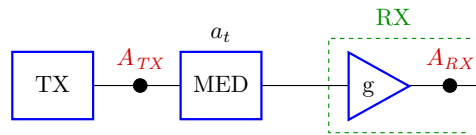


Figura 9.39: Diagrama de bloques.

$A_{TX} = 3 \text{ V}$. Amplitud de la senoide transmitida.

$A_{RX} = 1 \text{ V}$. Amplitud de la senoide recibida (Punto M).

$g = \sqrt{900} = 30$ veces de señal. Ganancia del amplificador del receptor.

a_t : atenuación del medio, en veces de señal.

$$A_{TX} \cdot \frac{1}{a_t} \cdot g = A_{RX}$$

$$3 \cdot \frac{1}{a_t} \cdot 30 = 1$$

$$a_t = 90 \text{ v.s.}$$

$$A_T \approx 39 \text{ dB}$$

5. y_B es ortogonal a r_1 y r_2 (está a 100 kHz y 50 kHz, respectivamente). y_A es ortogonal a r_1 .

$$Z_B(t) = 0 \Rightarrow \text{decisión impredecible}$$

$$Z_A(t) = 0 - \int_0^T y_A(y) r_2(t) dt$$

$$Z_A(t) = - \int_0^T \cos(2\pi f_{r2} t) \cos(2\pi f_A t) dt$$

$$Z_A(t) = - \frac{1}{2} \int_0^T \left\{ \cos[2\pi (f_{r2} + f_A) t] + \cos(0) \right\} dt$$

$$Z_A(t) = - \frac{1}{2} T = \frac{-1}{2 R_S} = \frac{-1}{200 \cdot 10^3} < 0 \quad \Rightarrow \quad \text{decisión: } s_2 \text{ "0"}$$

Problema 9.26 (Junio de 2004)

1. En cada rama:

$$f_m = \frac{16}{15} \cdot f_{Nyquist} = \frac{16}{15} \cdot 2 \cdot 15 \cdot 10^3 = 32 \text{ kHz}$$

$$R_b = n \cdot f_m = 16 \cdot 32(\text{k}) = 512 \text{ kbps}$$

$$M = 4 = 2^2 \rightarrow k = 2$$

$$R_s = \frac{R_b}{2} = 256 \text{ kbaudios}$$

$$\text{D: } R_s = f_m = 32 \text{ kbaudios}$$

$$\text{E: } R_b = 512 \text{ kbps}$$

$$\text{F, G y H: } R_b = 512 \text{ kbps; } R_s = 256 \text{ kbaudios}$$

A la salida:

$$\text{I: } R_{bT} = 2 \cdot R_b = 1024 \text{ kbps; } R_s = 256 \text{ kbaudios}$$

2. Es una modulación 16-QAM. La constelación transmitida se observa en la figura 9.40, con ejes normalizados en tensión de pico. Las tensiones ± 2 y ± 6 del codificador de línea se ven multiplicadas por los 2 voltios de pico del OL.

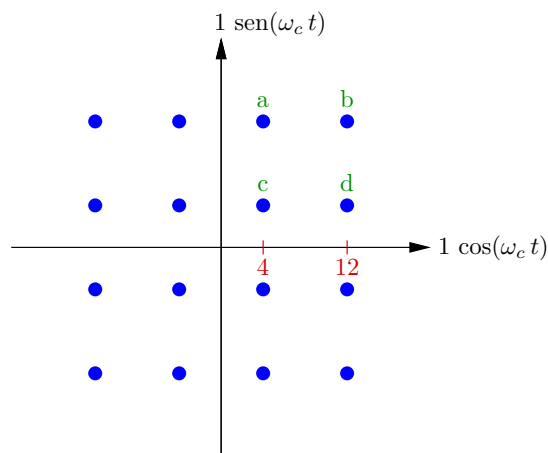


Figura 9.40: Constelación transmitida.

3. Calculamos por Pitágoras, en la figura del apartado anterior:

$$h_a^2 = h_d^2 = 12^2 + 4^2 = 160$$

$$h_b^2 = 12^2 + 12^2 = 288$$

$$h_c^2 = 4^2 + 4^2 = 32$$

$$E_s = \frac{A^2}{2} \cdot T = \frac{2 \cdot 160 + 288 + 32}{4} \cdot \frac{1}{2 \cdot 256(\text{k})} = 3,125 \cdot 10^{-4} \text{ J}$$

$$E_b = \frac{E_s}{k} = \frac{3,125}{4} \cdot 10^{-4} = 7,8125 \cdot 10^{-5} \text{ J}$$

4. Calculamos las palabras de las dos muestras:

$$x_R = 0,1 \text{ V}; \quad x_L = -0,1 \text{ V}$$

$$x_{sc} = x_p = 1$$

$$\Delta = \frac{2 \cdot x_{sc}}{L} = \frac{2}{2^{16}}$$

$$K_R = K_L = E \left\lceil \frac{|x_R|}{\Delta} \right\rceil = 3276$$

Y en la figura 9.41 se observan las palabras resultantes.

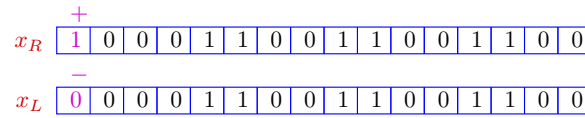


Figura 9.41: Palabras MIC.

Las señales temporales en F, en voltios, se observan en la figura 9.42.

$$T = \frac{1}{R_s} = \frac{1}{256(\text{k})}$$

La secuencia de símbolos transmitida es: (1),(2),(3),(2),(3),(2),(3) y (2). En la figura 9.43 se aclara la notación.

5. Buscamos el canal de Nyquist para $R_s = 256$ kbaudios:

$$W' = \frac{1}{2T} = \frac{R_s}{2} = 128 \text{ kHz}$$

Calculamos el ancho de banda (BB) del coseno alzado:

$$B = W'(1 + \alpha) = 128(\text{k}) \cdot (1 + 0,3) = 166,4 \text{ kHz}$$

6. Como es una modulación lineal:

$$B_{QAM} = 2 \cdot W'_{BB} = 332,8 \text{ kHz}$$

7. La única limitación viene por el ruido de cuantificación. En cada rama:

$$\left(\frac{S}{N} \right)_q \approx 6 \cdot 16 - 0 - 0 = 96 \text{ dB}$$

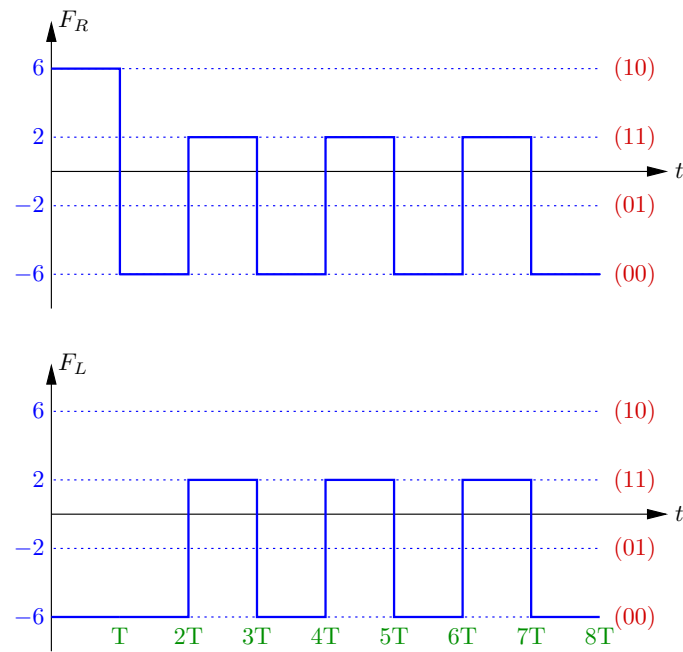


Figura 9.42: Señales temporales en F.

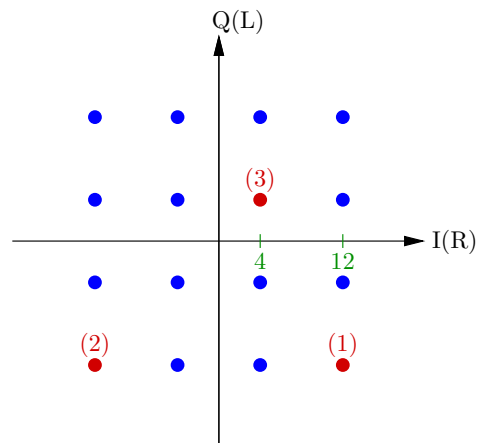


Figura 9.43: Señales temporales en F.

Problema 9.27 (Septiembre de 2004)

Régimen binario del MDT MIC:

$$R_b = 128 \cdot 20 \cdot 48(k) = 122,88 \text{ Mbps}$$

Cálculos de ruido:

$$f \approx 1,26 \text{ v.p.}$$

$$T_e = T_0 (f - 1) \approx 77,7 \text{ K}$$

$$N_0 = k(T_{in} + T_e) \approx 3,83 \cdot 10^{-21} \text{ W/Hz}$$

Atenuación del medio:

$$A_t = 54 + 20 \log(8000) \approx 132 \text{ dB} \rightarrow 16,1 \cdot 10^{12} \text{ v.p.}$$

Potencia recibida:

$$p_{RX} = \frac{p_{TX}}{a_t} = \frac{200}{16,1 \cdot 10^{12}} = 12,44 \cdot 10^{-12} \text{ W}$$

Energía por bit:

$$E_b = \frac{p_{RX}}{R_b} = \frac{12,44 \cdot 10^{-12}}{122,88 \cdot 10^6} = 1,012 \cdot 10^{-19} \text{ J}$$

Probabilidad de bit erróneo:

$$P_b \approx \frac{1}{2} \exp \left[\frac{-1,012 \cdot 10^{-19}}{3,83 \cdot 10^{-21} (1 + 0,25)} \right] \approx 3,3 \cdot 10^{-10}$$

Aunque no lo pide el enunciado, calculamos el ancho de banda ocupado:

$$R_s = R_b$$

$$B = R_s (1 + \alpha) = 122,88 \cdot 10^6 \cdot (1,25) = 153,6 \text{ MHz}$$

Problema 9.28 (Septiembre de 2004)

Trabajamos con la PSK para obtener E_b . Como el ruido, el régimen binario, la potencia transmitida y la atenuación del medio son fijos, E_b y E_b/N_0 también lo serán.

$$k = 3 \text{ bits/símbolo}$$

$$P_s \approx k P_b = 3 \cdot 10^{-3}$$

$$\text{Gráfica: } \frac{E_b}{N_0} \approx 10 \text{ dB}$$

Llevamos $E_b/N_0 = 10 \text{ dB}$ y $P_b = 3 \cdot 10^{-3}$ a la gráfica de FSK. Vemos que para cualquier M la modulación no lineal cumple los requisitos.

Observaciones:

- De hecho, cuanto mayor es M mejor BER se obtiene.
- El precio pagado por esta mejora es un rápido aumento del ancho de banda.
- En la práctica nunca se dispone de un ancho de banda ilimitado.

Problema 9.29 (Noviembre de 2004)

La frecuencia de portadora es la central del canal:

$$f_c = f_0 = 2,4 \text{ GHz}$$

Como tenemos un régimen binario grande, comparado con el ancho de banda, necesitamos una modulación con buena eficiencia espectral. Podemos eliminar FSK. Aunque no es necesario, comprobamos analíticamente que las FSK no pueden transmitir R_b por B . Tomamos FSK coherente, pues ocupa menos espectro:

$$\Delta f = \frac{R_s}{2}$$

$$R_s = \frac{R_b}{k}$$

$$B = (M - 1) \frac{R_b}{2k} + R_s(1,3) = \left(\frac{M}{2} + 0,8\right) \frac{R_b}{k}$$

$$B_{2FSK} = \left(\frac{2}{2} + 0,8\right) \frac{139,264(\text{M})}{1} = 250,6752 \text{ MHz}$$

$$B_{4FSK} = \left(\frac{4}{2} + 0,8\right) \frac{139,264(\text{M})}{2} = 194,9696 \text{ MHz}$$

$$B_{8FSK} = \left(\frac{8}{2} + 0,8\right) \frac{139,264(\text{M})}{3} = 222,8224 \text{ MHz}$$

A partir de aquí el ancho de banda seguirá aumentando con M , y ninguna de las FSK cabe en los 50 MHz disponibles.

Nos centramos en las modulaciones lineales. El canal admite:

$$B = R_s(1 + \alpha)$$

$$50 \cdot 10^6 = R_s(1,3)$$

$$R_s = 38,46 \text{ Mbaudios}$$

Comparamos con R_b para hallar los valores de k posibles:

$$k \geq \frac{R_b}{R_s} = \frac{139,264}{38,46} \approx 3,6$$

Queda claro que necesitamos al menos 4 bits por símbolo: una modulación de 16 símbolos. Tomamos la 16QAM pues queremos transmitir a la mayor distancia posible. El régimen simbólico realmente transmitido es:

$$k = \log_2(16) = 4 \text{ bits/símbolo}$$

$$R_s = \frac{R_b}{4} = 34,816 \text{ Mbaudios}$$

El ancho de banda ocupado es:

$$B = 34,816(M) (1 + 0,3) \approx 45,26 \text{ MHz}$$

Respecto a la potencia, transmitimos el máximo permitido (de nuevo para llegar a la mayor distancia posible):

$$p_{TX} = 10 \text{ W}$$

Ahora imponemos la restricción de calidad:

$$P_s \approx k P_b = 4 \cdot 10^{-7}$$

En la gráfica de 16QAM:

$$\frac{E_b}{N_0} \approx 15,2 \text{ dB} \rightarrow 33,1 \text{ v.p.}$$

Calculamos la atenuación:

$$\frac{E_b}{N_0} = 33,1 = \frac{10/a_t}{139,264 \cdot 10^6 \cdot 2,17 \cdot 10^{-19}}$$

$$a_t \approx 9,997 \cdot 10^9 \text{ v.p.} \rightarrow 100 \text{ dB}$$

Y en la fórmula de la atenuación despejamos la distancia:

$$100 = 90 + 10 \log(d)$$

$$d = 10 \text{ km}$$

Problema 9.30 (Febrero de 2006)

1. Pasamos la señal MPSK por el multiplicador de frecuencia (toda la fase se multiplica por M):

$$\cos(2\pi M f_c t + M \varphi + 2\pi i)$$

Eliminamos el término $2\pi i$ porque es un múltiplo de 2π . Si el término $M \varphi$ es mayor o igual que 2π , nos quedamos con: $\text{mod}[(M \varphi)/(2\pi)]$. Tras el divisor:

$$\cos(2\pi f_c t + \varphi)$$

Luego el circuito funciona.

2. Calculamos las fases recuperadas para la QPSK ($M = 4$). Partimos de θ_i , pasamos por el multiplicador, simplificamos el ángulo, y pasamos por el divisor:

$$\theta_1 = \pi/4 \rightarrow 4(\pi/4) = \pi \rightarrow \pi/4$$

$$\theta_2 = 3\pi/4 \rightarrow 4(3\pi/4) = 3\pi = \pi \rightarrow \pi/4$$

$$\theta_3 = 5\pi/4 \rightarrow 4(5\pi/4) = 5\pi = \pi \rightarrow \pi/4$$

$$\theta_4 = 7\pi/4 \rightarrow 4(7\pi/4) = 7\pi = \pi \rightarrow \pi/4$$

Calculamos la fase real. Por ejemplo, para $i = 1$:

$$\theta_1 = \frac{\pi}{4} = \varphi + \frac{2\pi \cdot 1}{4} \Rightarrow \varphi = \frac{-\pi}{4}$$

Se comete una ambigüedad en la recuperación de la fase.

Problema 9.31 (Febrero de 2006)

1. A partir de la PEP sacamos la potencia media transmitida:

$$p_T = \frac{5}{9} PEP = \frac{5}{9} \cdot 160 \cdot 10^{-3} = 0,08 \text{ W}$$

Energía por bit en el receptor:

$$E_b = \frac{p_T/a_t}{R_b} = \frac{0,08/(2 \cdot 10^9)}{125 \cdot 10^6} = 3,5 \cdot 10^{-19} \text{ J}$$

Densidad de ruido:

$$T_e = 300(2 - 1) = 300 \text{ K}$$

$$N_0 = 1,3806 \cdot 10^{-23} (300 + 300) = 8,2836 \cdot 10^{-21} \text{ W/Hz}$$

Relación E_b/N_0 :

$$\frac{E_b}{N_0} = 42,92 \text{ v.p.} \rightarrow 16,3 \text{ dB}$$

2. Calculamos la BER:

$$x = \sqrt{\frac{3 \log_2(M)}{2(M-1)}} \cdot \frac{E_b}{N_0} = 4,1434$$

$$p = \frac{\sqrt{M}-1}{\sqrt{M}} \operatorname{erfc}(x) \approx \frac{3}{4} \cdot 4,7 \cdot 10^{-9} \approx 3,5 \cdot 10^{-9}$$

$$P_s = 1 - (1 - p)^2 \approx 2p = 7,0 \cdot 10^{-9}$$

$$P_b \approx \frac{P_s}{k} = 1,75 \cdot 10^{-9}$$

Problema 9.32 (Junio de 2006)

Empezamos con las modulaciones no lineales (FSK). Como $R_b > B$ no es posible realizar la transmisión. Lo comprobamos con FSK coherente:

$$B_{FSK} = (M - 1) \Delta f + R_s (1 + \alpha)$$

$$B_{FSK} = (M - 1) \frac{R_b}{2k} + \frac{R_b}{k} 1,3 = \left(\frac{M}{2} + 0,8 \right) \frac{R_b}{k}$$

$$B_{2FSK} = \left(\frac{2}{2} + 0,8 \right) \frac{155(M)}{1} = 279 \text{ MHz}$$

$$B_{4FSK} = \left(\frac{4}{2} + 0,8 \right) \frac{155(M)}{2} = 217 \text{ MHz}$$

Ahora estudiamos las modulaciones lineales:

$$B = R_s (1 + \alpha)$$

$$40 = \frac{155}{k} 1,3$$

$$k \geq 5,0375 \rightarrow k \geq 6$$

Luego seleccionamos la única opción posible: 64QAM. Calculamos sus parámetros:

$$R_s = \frac{R_b}{k} = 25,8\hat{3} \text{ Mbaudios}$$

$$B = R_s (1 + \alpha) = 33,58\hat{3} \text{ MHz}$$

Problema 9.33 (Septiembre de 2006)

1. Gráfica 1: es un diagrama de ojos sin IIS, para un filtro coseno alzado con α grande. Se ha tomado tras la cascada de los dos filtros, antes de muestrear en el receptor (punto H).

Gráfica 2: es un diagrama de ojos con IIS. Como el sistema funciona en conjunto sin IIS, es razonable pensar que cada filtro aislado es raíz de coseno alzado. Se ha tomado a la salida del filtro del transmisor (punto D).

Gráfica 3: es un diagrama vectorial a la salida del filtro raíz de coseno (punto D).

Gráfica 4: es un diagrama vectorial a la salida del conjunto coseno alzado (punto H).

Gráfica 5: es un espectro BB sin filtrar (punto C, o incluso B).

Gráfica 6: es un espectro paso banda filtrado (punto E o F, o también G).

Gráfica 7: es una constelación sin IIS (punto I o H, también C).

Gráfica 8: es una constelación con IIS (punto D, incluso E o G).

Gráfica 9: es una señal, I o Q, en t , sin filtrado. Se ha tomado antes de filtrar (punto C).

Gráfica 10: es un espectro BB filtrado (punto D o H).

2. El régimen simbólico se lee tanto en el espectro sin filtrar, como en los diagramas de ojos:

$$\Delta f_{nulo} = 12,5 \Rightarrow R_s = 12,5 \text{ Mbaudios}$$

$$T = 80 \text{ ns} \Rightarrow R_s = 1/T = 12,5 \text{ Mbaudios}$$

En las constelaciones vemos que se trata de una 16-QAM. Luego:

$$M = 16 = 2^4$$

Y el régimen binario es:

$$R_b = k \cdot R_s = 4 \cdot 12,5(\text{M}) = 50 \text{ Mb/s}$$

La frecuencia de portadora se lee en uno de los espectros filtrados:

$$f_c = 600 \text{ MHz}$$

El sistema trabaja sin IIS, y el ruido es despreciable. El diagrama de ojos sin IIS (antes de muestrear en el decisor) indica que el filtrado total es coseno alzado, con α grande (flancos temporales suaves). El otro diagrama de ojos, con IIS (no puede ser ruido), se ha obtenido a la salida del filtro del transmisor. Como el conjunto no presenta IIS, es razonable pensar que los filtros son raíz de coseno alzado (dos filtros en cascada son un coseno alzado, sin IIS.)

Problema 9.34 (Septiembre de 2006)

1. Régimen binario del MIC:

$$f_m = 1,25 \cdot f_{Nyq} = 1,25 \cdot 2 \cdot W = 10 \text{ kHz}$$

$$R_b = N \cdot n \cdot f_m = 8 \cdot 8 \cdot 10(\text{k}) = 640 \text{ kbps}$$

Como la 4-FSK tiene $M = 4$ símbolos, cada símbolo lleva 2 bits, luego:

$$R_s = \frac{R_b}{2} = 320 \text{ kbaudios}$$

2. El dibujo se deja a cargo del alumno. Calculamos los parámetros:

$$T_T = T_m = 1/f_m = 100 \text{ } \mu\text{s}$$

$$T_c = T_T/8 = 12,5 \text{ } \mu\text{s}$$

$$T_b = T_c/8 = 1,5625 \text{ } \mu\text{s}$$

$$N_T = N \cdot n = 64 \text{ bits/trama}$$

3. Ancho de banda:

$$B = (M - 1) \Delta f + R_s (1 + \alpha)$$

$$\Delta f = 1/T_s = R_s$$

$$B = (4 - 1) \cdot 320 \cdot 10^3 + 320 \cdot 10^3 \cdot (1,5) = 1440 \text{ kHz}$$

Problema 9.35 (Septiembre de 2006)

1. Como en vertical hay 4 niveles *no equiespaciados* descartamos las QAM. Es fácil comprobar que se trata de una 8PSK con el giro típico de $22,5^\circ$, tal y como puede apreciarse en la constelación de la figura 9.44. El alumno puede realizar cálculos trigonométricos para verificar que los niveles del diagrama de ojos tienen la relación de amplitudes correcta.

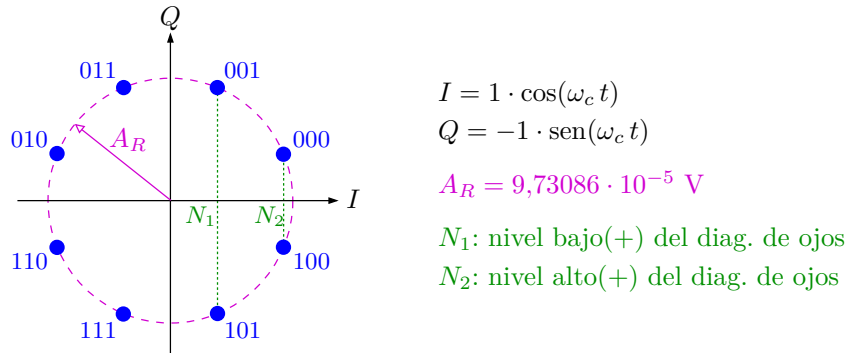


Figura 9.44: Constelación 8PSK recibida, con codificación de Gray.

Para el dibujo de la constelación recibida (figura 9.44), tomamos ejes IQ normalizados en 1 voltio de pico de senoide. Se ha incluido una codificación de Gray (hay muchas variantes posibles). El radio de la circunferencia se calcula a partir de la PEP:

$$PEP = p_T = 0,36(\text{W}) = \frac{A_T^2}{2 \cdot 50}$$

$$A_T = 6 \text{ V}$$

$$A_R = \frac{A_T}{10^{95,8/20}} = 9,73086 \cdot 10^{-5} \text{ V}$$

2. Energía por bit recibida:

$$E_b = \frac{p_T/a_t}{R_b} = \frac{0,36/10^{9,58}}{156 \cdot 10^6} = 6,06985 \cdot 10^{-19} \text{ J}$$

Densidad espectral de ruido:

$$T_e = 300(4 - 1) = 900 \text{ K}$$

$$N_0 = 1,3806 \cdot 10^{-23} (300 + 900) = 1,65672 \cdot 10^{-20} \text{ W/Hz}$$

Relación E_b/N_0 :

$$\frac{E_b}{N_0} \approx 36,64 \text{ v.p.} \rightarrow 15,6 \text{ dB}$$

3. Calculamos la BER:

$$x = \sqrt{\log_2(M) \cdot \frac{E_b}{N_0}} \cdot \text{sen}\left(\frac{\pi}{8}\right) \approx 4,012$$

$$P_s = \text{erfc}(x) \approx 1,40 \cdot 10^{-8}$$

$$P_b \approx \frac{P_s}{k} = 4,65 \cdot 10^{-9}$$

Problema 9.36 (Enero de 2007)

De la relación de potencia a ruido sacamos E_b/N_0 :

$$\frac{s}{n} \approx 128,825 \text{ v.p.}$$

$$B = \frac{R_b}{k} (1 + \alpha) = 0,3125 R_b$$

$$\frac{E_b}{N_0} = \frac{s/R_b}{n/(0,3125 R_b)} = 0,3125 \frac{s}{n}$$

$$\frac{E_b}{N_0} \approx 40,2578 \text{ v.p.}$$

Con la fórmula de calidad calculamos P_s :

$$x = \sqrt{\frac{3 \log_2(M)}{2(M-1)} \frac{E_b}{N_0}}$$

$$x = \sqrt{\frac{3 \cdot 4}{2(16-1)} 40,2578} \approx 4,013$$

$$\text{erfc}(4,013) \approx 1,39 \cdot 10^{-8}$$

$$p = \frac{\sqrt{M}-1}{\sqrt{M}} \text{erfc}(x) \approx 1,04 \cdot 10^{-8}$$

$$P_s = 1 - (1-p)^2 = 1 - 1 + 2p - p^2 \approx 2p = 2,1 \cdot 10^{-8}$$

Y suponiendo una codificación de Gray:

$$P_b \approx \frac{P_s}{k} \approx 5,2 \cdot 10^{-9}$$

Problema 9.37 (Enero de 2007)

1. Ancho de banda ocupado:

$$R_b = 32 \cdot 20 \cdot 48(\text{k}) = 30,72 \text{ Mb/s}$$

$$R_s = \frac{R_b}{k} = 15,36 \text{ Mbaudios}$$

$$B = R_s (1 + \alpha) = 19,2 \text{ MHz}$$

2. Energía por símbolo:

$$p_T = PEP$$

$$E_s = p_R \cdot T_s = \frac{p_T/a_t}{R_s}$$

$$E_s = \frac{100/(4 \cdot 10^8)}{15,36 \cdot 10^6} = 1,6276 \cdot 10^{-14} \text{ J}$$

Problema 9.38 (Junio de 2007)

1. Ancho de banda:

$$M = 8 \rightarrow k = 3 \text{ bits/símbolo}$$

$$B = R_s (1 + \alpha) = \frac{120(M)}{3} 1,9 = 76 \text{ MHz}$$

Relación entre los radios:

$$R_2 = \sqrt{\frac{d^2}{4} + \frac{d^2}{4}} = \frac{d}{\sqrt{2}}$$

$$d^2 = \frac{d^2}{4} + x^2 \rightarrow x = \sqrt{\frac{4d^2}{4} - \frac{d^2}{4}} = \frac{\sqrt{3}}{2} d$$

$$R_1 = x + \frac{d}{2} = \frac{1 + \sqrt{3}}{2} d$$

$$\frac{R_1}{R_2} = \frac{1 + \sqrt{3}}{\sqrt{2}} \approx 1,93185$$

No se puede realizar una asignación de Gray porque cada símbolo de energía baja está rodeado por 4 contiguos, y los símbolos son de 3 bits.

En la figura 9.45 se observan las fronteras de decisión de la 8APK óptima.

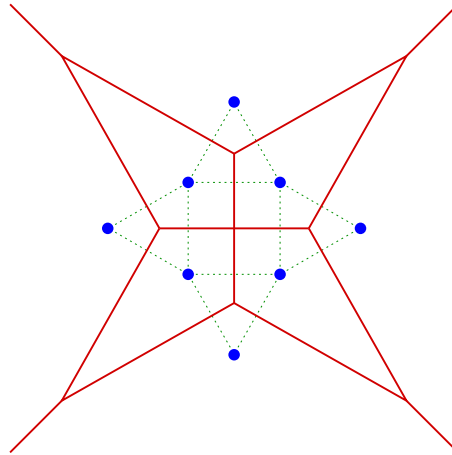


Figura 9.45: Fronteras de decisión.

En la figura 9.46 se aprecia el diagrama de ojos en I (el de Q es similar). El tiempo entre símbolos es:

$$T = \frac{1}{R_s} = \frac{k}{R_b} = 25 \text{ ns}$$

Hay 4 ojos apilados en vertical; los centrales son más pequeños. Como se ha normalizado la amplitud total a 1 V, los 5 niveles ideales son (con un d distinto del transmitido):

$$-1, -d/2, 0, d/2, +1$$

Donde, por la normalización:

$$R_1 = \frac{d}{2} (1 + \sqrt{3}) = 1$$

$$\frac{d}{2} = \frac{1}{1 + \sqrt{3}} \approx 0,3660$$

El filtrado total (raíz de coseno alzado en cascada con raíz de coseno alzado) es coseno alzado, de manera que en los puntos de muestreo no se aprecia interferencia intersimbólica. El *roll-off* es alto (casi 1) y las trayectorias se benefician de un ancho de banda elevado.

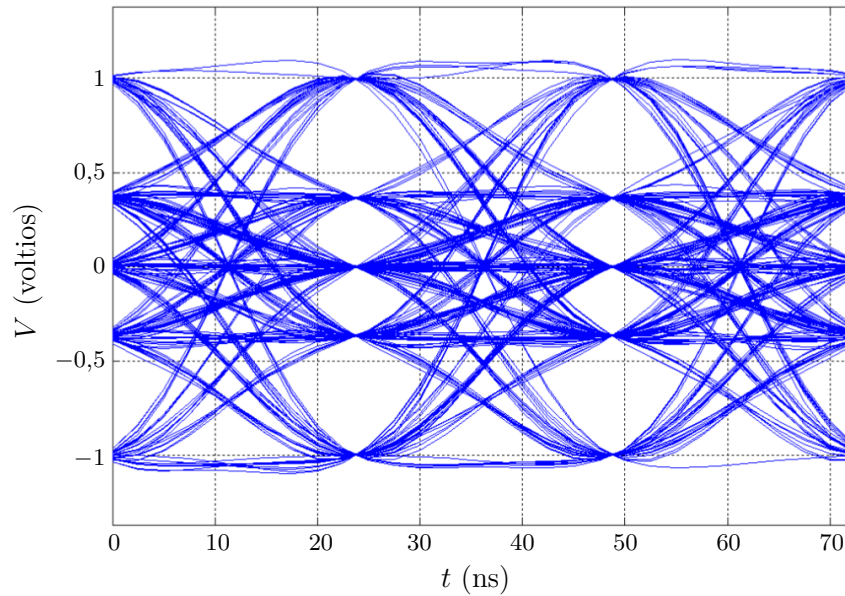


Figura 9.46: Diagrama de ojos. (Se ha obtenido con WinIQSIM.)

2. En la constelación, relacionamos las potencias de pico y media:

$$PEP \propto (1 + \sqrt{3})^2$$

$$p_T \propto \frac{1}{2} [2 + (1 + \sqrt{3})^2]$$

$$p_T = \frac{2 + (1 + \sqrt{3})^2}{2 (1 + \sqrt{3})^2} PEP \approx 2,5359 \text{ W}$$

Energía media por símbolo en recepción:

$$E_s = \frac{p_T / a_t}{R_b / k} = \frac{3 \cdot 2,5359}{10^{10,6} \cdot 120 \cdot 10^6} \approx 1,5925 \cdot 10^{-18} \text{ J}$$

Densidad de ruido:

$$T_e = 300 (10^{0,9} - 1) \approx 2083,0 \text{ K}$$

Relación E_s/N_0 :

$$\frac{E_s}{N_0} = 46,45 \text{ v.p.} \rightarrow 16,67 \text{ dB}$$

Relación E_b/N_0 :

$$\frac{E_b}{N_0} = \frac{E_s}{N_0} - 10 \log(3) \approx 11,90 \text{ dB}$$

3. Entre dos símbolos contiguos transmitidos hay una tensión de pico de senoide d :

$$PEP = \frac{R_1^2}{2R} = \frac{\frac{d^2}{4} (1 + \sqrt{3})^2}{2 \cdot 50} = 4$$

$$d = 14,641 \text{ V}$$

Calculamos la energía entre dos símbolos contiguos (en el receptor):

$$E_{dmin} = \frac{d^2}{2R} \cdot \frac{1}{a_t} \cdot \frac{1}{R_s} \approx 1,3461 \cdot 10^{-18} \text{ J}$$

Tomamos la cota superior como valor de la probabilidad:

$$P_s = \frac{7}{2} \operatorname{erfc}(3,1332) \approx 3,3 \cdot 10^{-5}$$

4. La relación entre P_b y P_s será un caso intermedio entre lo que ocurre con codificación de Gray y lo que ocurre con símbolos ortogonales (como en FSK):

$$\text{Con Gray: } P_b = \frac{1}{k} P_s = 0,3 \cdot P_s$$

$$\text{Con FSK: } P_b = \frac{M}{2(M-1)} P_s = \frac{8}{14} P_s \approx 0,57143 \cdot P_s$$

Por lo tanto, trabajando siempre con las cotas superiores, la BER tendrá los siguientes límites:

$$1,1 \cdot 10^{-5} \leq P_b \leq 1,9 \cdot 10^{-5}$$

5. Para una calidad mejor (P_s menor) hace falta más potencia. El incremento de potencia es igual al incremento en E_{dmin} . Como dicha energía está con raíz en el argumento de la *erfc*, basta con comparar los argumentos de la *erfc* al cuadrado. Antes teníamos:

$$x = 3,1332$$

Ahora, con la nueva calidad:

$$3,5 \cdot 10^{-11} = \frac{7}{2} \operatorname{erfc}(x')$$

$$\operatorname{erfc}(x') = 10^{-11}$$

$$x' = 4,8129$$

Por lo tanto, el incremento de potencia es:

$$\Delta p_T = \left(\frac{x'}{x} \right)^2 = \left(\frac{4,8129}{3,1332} \right)^2 \approx 2,3596 \text{ v.p.}$$

$$\Delta P_T \approx 3,7 \text{ dB}$$

Problema 9.39 (Junio de 2007)

En la fórmula de calidad probamos con diferentes valores de M , para ver si cumplen:

$$\frac{E_b}{2 \cdot N_0} = \frac{p_{rx}/R_b}{2 \cdot N_0} = \frac{10^{-8}}{2 \cdot 1,275 \cdot 10^{-18} \cdot 622 \cdot 10^6} \approx 6,305$$

$$10^{-8} \geq \frac{M}{4} \operatorname{erfc}\left(\sqrt{6,305 \cdot \log_2 M}\right)$$

$$\text{Con } M = 2: P_b \approx \frac{2}{4} \operatorname{erfc}\left(\sqrt{6,305 \cdot 1}\right) \approx 1,919 \cdot 10^{-4} \text{ (No cumple)}$$

$$\text{Con } M = 4: P_b \approx \frac{4}{4} \operatorname{erfc}\left(\sqrt{6,305 \cdot 2}\right) \approx 5,117 \cdot 10^{-7} \text{ (No cumple)}$$

$$\text{Con } M = 8: P_b \approx \frac{8}{4} \operatorname{erfc}\left(\sqrt{6,305 \cdot 3}\right) \approx 1,545 \cdot 10^{-9} \text{ (Sí cumple)}$$

Con M mayor el ancho de banda crece. Luego $M = 8$ cumple los requisitos con ancho de banda mínimo. Y el ancho de banda (coherente) ocupado por la 8FSK es:

$$\Delta f = \frac{1}{2T} = \frac{R_s}{2} = \frac{622(M)}{3 \cdot 2} = 103,6 \text{ MHz}$$

$$B_{FSK} = (M - 1)\Delta f + R_s = 933 \text{ MHz}$$

Comentario: en FSK al aumentar M mejora la calidad, a costa de aumentar mucho el ancho de banda.

Problema 9.40 (Septiembre de 2007)

Potencia media transmitida:

$$p_T = \frac{5}{9} PEP = 55,5 \text{ W}$$

Régimen simbólico:

$$R_s = \frac{R_b}{k} = 60 \text{ Mbaudios}$$

Energía por símbolo en recepción:

$$E_s = \frac{p_T/a_t}{R_s} = \frac{55,5/10^{11,4}}{60 \cdot 10^6} = 3,686 \cdot 10^{-18} \text{ J}$$

Densidad de ruido:

$$T_e = 300(10^{1,2} - 1) = 4454,7 \text{ K}$$

$$N_0 = k(T_{in} + T_e) = 6,633 \cdot 10^{-20} \text{ W/Hz}$$

Relación E_s/N_0 :

$$\frac{E_s}{N_0} = 55,57 \text{ v.p.} \rightarrow 17,4 \text{ dB}$$

Problema 9.41 (Septiembre de 2007)

1. Tiempo de trama:

$$f_m = 1,2 \cdot 2 \cdot 20(\text{k}) = 48 \text{ kHz}$$

$$T_T = T_m = \frac{1}{f_m} = 20,8\hat{3} \text{ } \mu\text{s}$$

Tiempo de bit:

$$N_T = 18 \cdot 2 \cdot 16 + 8 \cdot 2 = 592 \text{ bits/trama}$$

$$R_b = N_T \cdot f_m = 28,416 \cdot 10^6 \text{ bits/s}$$

$$T_b = \frac{1}{R_b} \approx 35,19 \text{ ns}$$

2. Ancho de banda en banda base:

$$M = 2 \rightarrow k = 1$$

$$B = \frac{R_s}{2} = \frac{R_b}{2} = 14,208 \text{ MHz}$$

3. Ancho de banda en paso banda:

$$k = 6$$

$$B = R_s = \frac{R_b}{k} = 4,736 \text{ MHz}$$

Problema 9.42 (Septiembre de 2007)

1. El receptor óptimo tendrá cuatro ramas, para las cuatro frecuencias. Si elegimos la configuración de correladores, en cada rama aparecerá un multiplicador que mezcla la entrada con la señal ideal recuperada (a la frecuencia correspondiente) y un integrador de 0 a T . Las cuatro salidas de las ramas se comparan y se decide a favor de la rama con mayor parecido (salida).

Calculamos el régimen simbólico, la separación mínima de ortogonalidad, y las frecuencias:

$$M = 4 = 2^2 \Rightarrow k = 2 \text{ bits/símbolo}$$

$$R_s = \frac{R_b}{k} = \frac{200(\text{M})}{2} = 100 \text{ Mbaudios}$$

$$\Delta f = \frac{1}{2T} = \frac{R_s}{2} = 50 \text{ MHz}$$

$$f_1 = 2325 \text{ MHz ; } f_2 = 2375 \text{ MHz ; } f_3 = 2425 \text{ MHz ; } f_4 = 2475 \text{ MHz}$$

Las portadoras recuperadas (señales ideales que se mezclan con las entradas) son:

$$c_1(t) = A' \cos(2\pi \cdot f_1 \cdot t)$$

$$c_2(t) = A' \cos(2\pi \cdot f_2 \cdot t)$$

$$c_3(t) = A' \cos(2\pi \cdot f_3 \cdot t)$$

$$c_4(t) = A' \cos(2\pi \cdot f_4 \cdot t)$$

(El valor de la amplitud A' es desconocido.)

- 2.** El ancho de banda de predetección es el de la señal modulada:

$$B_{BB} = W(1 + \alpha) = \frac{R_s}{2}(1 + \alpha)$$

$$B = 3 \cdot \Delta f + 2 \cdot B_{BB} = 3 \cdot 50(\text{M}) + 2 \cdot \frac{100(\text{M})}{2} \cdot 1,5 = 300 \text{ MHz}$$

- 3.** Calculamos la amplitud recibida:

$$p_{TX} = 10 \text{ W}$$

$$p_{RX} = \frac{p_{TX}}{a_t} = \frac{10}{10^9} = 10^{-8} \text{ W}$$

$$10^{-8}(\text{W}) = \frac{A^2}{2R} = \frac{A^2}{2 \cdot 50} \Rightarrow A = 10^{-3} \text{ V}$$

Las señales son:

$$s_1(t) = 10^{-3} \cos(2\pi \cdot f_1 \cdot t)$$

$$s_2(t) = 10^{-3} \cos(2\pi \cdot f_2 \cdot t)$$

$$s_3(t) = 10^{-3} \cos(2\pi \cdot f_3 \cdot t)$$

$$s_4(t) = 10^{-3} \cos(2\pi \cdot f_4 \cdot t)$$

- 4.** La señal r_1 está 50 MHz por debajo de f_1 , de manera que es ortogonal a todas las frecuencias f_i . Los correladores devuelven todos un parecido nulo, y la decisión es impredecible.

La señal r_2 está a f_3 . Los correladores de f_1 , f_2 y f_4 devuelven parecido nulo, mientras que el correlador de f_3 entrega la energía de r_2 (con una corrección por la amplitud A' y la carga R .) El decisor, obviamente, opta por f_3 .

- 5.** Calculamos la relaciones de energía a densidad espectral de ruido:

$$E_s = \frac{p_{RX}}{R_s} = \frac{10^{-8}}{100 \cdot 10^6} = 100 \cdot 10^{-18} \text{ J}$$

$$\frac{E_s}{N_0} = \frac{100 \cdot 10^{-18}}{3,972 \cdot 10^{-18}} \approx 25,176(\text{veces de potencia}) \rightarrow 14 \text{ dB}$$

Como $T_s = 2T_b$, la energía de bit es la mitad que la de símbolo, y la relación está 3 dB por debajo:

$$\frac{E_b}{N_0} = \frac{E_s}{N_0} - 3(\text{dB}) = 11 \text{ dB}$$

Consultamos en las gráficas, y obtenemos:

$$P_s \approx 8 \cdot 10^{-7}$$

$$P_b \approx 5 \cdot 10^{-7}$$

Como comprobación, podemos relacionar las dos probabilidades mediante la fórmula:

$$P_b = \frac{M}{2(M-1)} P_s$$

$$5 \approx \frac{4}{2(4-1)} 8$$

Queda demostrado que cumple el requisito de calidad.

Problema 9.43 (Febrero de 2008)

Régimen binario:

$$R_b = (41 \cdot 2 + 2) \cdot 20 \cdot 48(\text{k}) = 80,64 \text{ Mb/s}$$

El ancho de banda disponible implica ciertos valores de k :

$$B = 27(\text{M}) = \frac{R_b}{k} (1 + \alpha) = \frac{80,64(\text{M})}{k} 1,25$$

$$k \geq 3,725 \quad \rightarrow \quad k \leq 4$$

Esto descarta la QPSK. De las restantes, la de menor M ofrece mejor calidad. Por lo tanto, seleccionamos la 16QAM.

Calculamos la densidad espectral de ruido:

$$T_e = T_0 (f - 1) = 300 (2 - 1) = 300 \text{ K}$$

$$N_0 = k (T_i + T_e) = 1,3806 \cdot 10^{-23} \cdot 900 = 1,24254 \cdot 10^{-20} \text{ W/Hz}$$

Calculamos la potencia media transmitida:

$$p_T = \frac{5}{9} PEP = \frac{5}{9} 16 = 8,8 \text{ W}$$

Calculamos la energía recibida por bit:

$$E_b = \frac{p_T/a_t}{R_b} = \frac{8,8/10^{11,4}}{80,64 \cdot 10^6} = 4,38831 \cdot 10^{-19} \text{ J}$$

La relación E_b/N_0 es:

$$\frac{E_b}{N_0} = 35,32 \text{ v.p.} \rightarrow 15,5 \text{ dB}$$

Consultando en la gráfica, leemos la probabilidad de símbolo erróneo:

$$P_s \approx 7 \cdot 10^{-8}$$

Y la BER es:

$$P_b \approx \frac{P_s}{k} = \frac{P_s}{4} = 1,75 \cdot 10^{-8}$$

Problema 9.44 (Junio de 2008)

1. Calculamos el régimen simbólico y la energía de símbolo en recepción:

$$P_R = P_T - A_t = -70 \text{ dBm} \rightarrow p_R = 10^{-10} \text{ W}$$

$$k = \log_2(8) = 3$$

$$R_s = \frac{R_b}{k} = 100 \text{ Mbaudios}$$

$$E_s = p_R \cdot T_s = \frac{10^{-10}}{100 \cdot 10^6} = 10^{-18} \text{ J}$$

Los ejes ortonormales son:

$$\Psi_1 = \sqrt{\frac{2R}{T}} \cos(\omega_c t)$$

$$\Psi_2 = -\sqrt{\frac{2R}{T}} \sin(\omega_c t)$$

Donde:

$$\omega_c = 2\pi \cdot 10 \cdot 10^9$$

$$\sqrt{\frac{2R}{T}} = \sqrt{2 \cdot 50 \cdot 100 \cdot 10^6} = 10^5$$

Las señales recibidas están en el plano I-Q anteriormente definido. Llamando A a la mitad de la distancia entre símbolos contiguos, las distancias al origen de los símbolos de energía alta (d_a) y baja (d_b) son (ver figura 9.47):

$$d_b = \sqrt{A^2 + A^2} = A\sqrt{2}$$

$$d_a = A + A\sqrt{3}$$

Calculamos A a partir de la energía media recibida por símbolo:

$$E_s = 10^{-18} = \frac{E_a + E_b}{2} = \frac{d_a^2 + d_b^2}{2} = \frac{(1 + \sqrt{3})^2 A^2 + 2A^2}{2} \approx 4,732 A^2$$

$$A \approx 4,597 \cdot 10^{-10}$$

Luego las coordenadas son:

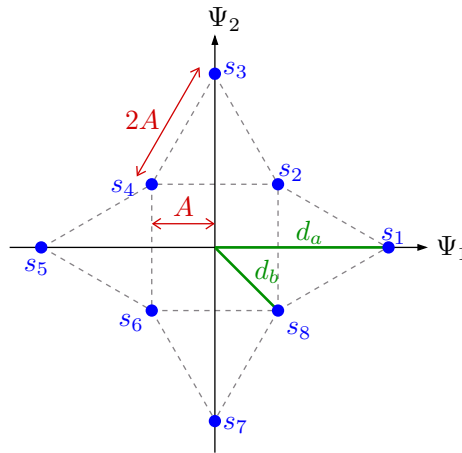


Figura 9.47: Constelación 8APK óptima. (Ejes ortonormales.)

Señal	Ψ_1	Ψ_2
s_1	$A(1 + \sqrt{3})$	0
s_2	A	A
s_3	0	$A(1 + \sqrt{3})$
s_4	$-A$	A
s_5	$-A(1 + \sqrt{3})$	0
s_6	$-A$	$-A$
s_7	0	$-A(1 + \sqrt{3})$
s_8	A	$-A$

2. Es imposible realizar una asignación de Gray porque algunos símbolos tienen 4 contiguos (por ejemplo: s_2), y cada símbolo sólo dispone de 3 bits.
3. La probabilidad de símbolo erróneo está acotada por:

$$\frac{1}{M} \operatorname{erfc}\left(\frac{d_{\min}}{2\sqrt{N_0}}\right) \leq P_s \leq \frac{M-1}{2} \operatorname{erfc}\left(\frac{d_{\min}}{2\sqrt{N_0}}\right)$$

La distancia mínima (raíz de la energía entre símbolos contiguos) es el doble de A , de manera que el argumento de la *erfc* es:

$$\frac{d_{\min}}{2\sqrt{N_0}} = \frac{2A}{2\sqrt{N_0}} \approx 4,04$$

La *erfc* de 4,04 es aproximadamente $1,1 \cdot 10^{-8}$, y las cotas quedan:

$$\frac{1}{8} \cdot 1,1 \cdot 10^{-8} \leq P_s \leq \frac{7}{2} \cdot 1,1 \cdot 10^{-8}$$

4. En la figura 9.48 se observan la regiones de decisión.

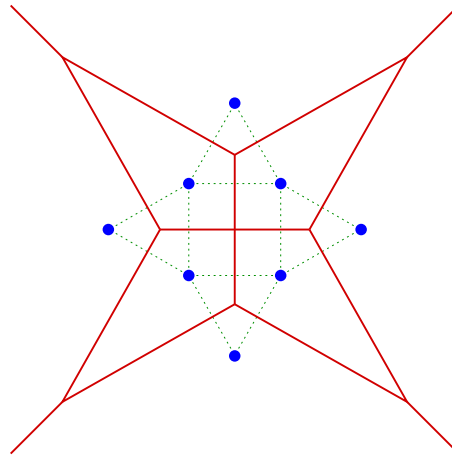


Figura 9.48: Regiones de decisión de una 8APK óptima.

Problema 9.45 (Septiembre de 2008)

Cálculos de ruido:

$$T_e = T_0 (f - 1) = 300 (4 - 1) = 900 \text{ K}$$

$$N_0 = k (T_{in} + T_e) = 1,38 \cdot 10^{-23} (300 + 900) = 1,656 \cdot 10^{-20} \text{ W/Hz}$$

En la figura 9.49 vemos el primer cuadrante de la constelación 64QAM, sobre ejes normalizador en energía. Relacionamos la energía de pico (E_p) con la media (E_s):

$$E_p = E_{10} = (7 A)^2 + (7 A)^2 = 98 A^2$$

$$E_9 = (5 A)^2 + (7 A)^2 = 74 A^2$$

$$E_8 = (5 A)^2 + (5 A)^2 = 50 A^2$$

$$E_7 = (7 A)^2 + (3 A)^2 = 58 A^2$$

$$E_6 = (5 A)^2 + (3 A)^2 = 34 A^2$$

$$E_5 = (3 A)^2 + (3 A)^2 = 18 A^2$$

$$E_4 = (7 A)^2 + A^2 = 50 A^2$$

$$E_3 = (5 A)^2 + A^2 = 26 A^2$$

$$E_2 = (3 A)^2 + A^2 = 10 A^2$$

$$E_1 = A^2 + A^2 = 2 A^2$$

$$E_s = \frac{1}{8} \left[\frac{E_{10} + E_8 + E_5 + E_1}{2} + E_9 + E_7 + E_6 + E_4 + E_3 + E_2 \right] = 42 A^2$$

$$\frac{E_p}{E_s} = \frac{98}{42} = \frac{7}{3} = \frac{PEP}{p}$$

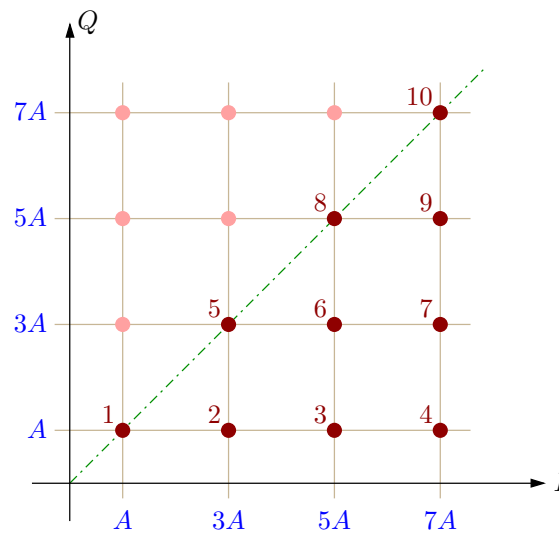


Figura 9.49: Estudio de la constelación. (Ejes ortonormales.)

De la potencia de pico sacamos la media transmitida, y calculamos la energía por bit recibida:

$$p_T = \frac{3}{7} PEP = 16,97 \text{ W}$$

$$E_b = \frac{p_T/a_t}{R_b} = \frac{16,97/10^{10}}{384 \cdot 10^6} = 4,42 \cdot 10^{-18} \text{ J}$$

Y la relación buscada es:

$$\frac{E_b}{N_0} = 266,9 \text{ v.p.} \rightarrow 24,3 \text{ dB}$$

Problema 9.46 (Septiembre de 2008)

Cálculos previos:

$$22 \cdot 2 = 44 \text{ canales de música}$$

$$44 + 2 = 46 \text{ canales/trama}$$

$$f_m = 1,25 \cdot 2 \cdot W = 50 \text{ kHz}$$

$$N_T = 46 \cdot 18 = 828 \text{ bits/trama}$$

$$T_T = \frac{1}{f_m} = 2 \cdot 10^{-5} \text{ s}$$

$$T_b = \frac{T_T}{N_T} = 2,415459 \cdot 10^{-8} \text{ s}$$

$$R_b = \frac{1}{T_b} = 41,4 \text{ Mbps}$$

Ancho de banda en BB:

$$M = 2 \rightarrow R_s = R_b$$

$$B = \frac{R_s}{2} = 20,7 \text{ MHz}$$

Ancho de banda con 16QAM:

$$B = R_s = \frac{R_b}{k} = 10,35 \text{ MHz}$$

Problema 9.47 (Septiembre de 2008)

1. En los ejercicios breves se demuestra que, para una 16QAM:

$$p_T = \frac{5}{9} PEP = 10 \text{ W}$$

Calculamos la E_b en recepción:

$$E_b = \frac{p_T/a_t}{R_b} = \frac{10/10^{10,36}}{384 \cdot 10^6} = 1,13676 \cdot 10^{-18} \text{ J}$$

Densidad de ruido:

$$T_e = 300(8 - 1) = 2100 \text{ K}$$

$$N_0 = k(T_{in} + T_e) = 1,3806 \cdot 10^{-23} \cdot 2350 = 3,24441 \cdot 10^{-20} \text{ W/Hz}$$

Relación E_b/N_0 :

$$\frac{E_b}{N_0} = 35,0375 \text{ v.p.}$$

Con la fórmulas de calidad de QAM calculamos las probabilidades de error:

$$p = \frac{3}{4} \operatorname{erfc} \left(\frac{3 \cdot 4}{2 \cdot 15} 35,0375 \right)$$

$$p = \frac{3}{4} 1,1945 \cdot 10^{-7} = 8,9587 \cdot 10^{-8}$$

$$P_s \approx 2p = 1,7917 \cdot 10^{-7}$$

$$P_b \approx \frac{P_s}{k} \approx 4,5 \cdot 10^{-8}$$

2. Como queremos una calidad mejor, tenemos que aumentar la potencia. Partimos de la nueva calidad:

$$P_b = 10^{-10}$$

$$P_s \approx k P_b = 4 \cdot 10^{-10}$$

$$p \approx \frac{P_s}{2} = 2 \cdot 10^{-10}$$

$$2 \cdot 10^{-10} = \frac{3}{4} \operatorname{erfc}(x')$$

$$x' = 4,4668$$

El argumento de la *erfc* es raíz de energía. Para comparar potencias basta con comparar valores de x^2 :

$$\Delta p = \left(\frac{x'}{x} \right)^2 = \left(\frac{4,4668}{3,7437} \right)^2 = 1,4236 \text{ v.p.}$$

$$\Delta P \approx 1,5 \text{ dB}$$

Problema 9.48 (Enero de 2009)

Relacionamos s/n con E_b/N_0 :

$$E_b = s \cdot T_b = \frac{s}{R_b}$$

$$B = R_s = \frac{R_b}{k}$$

$$N_0 = \frac{n}{B} = \frac{k \cdot n}{R_b}$$

$$\frac{E_b}{N_0} = \frac{s/R_b}{k n/R_b} = \frac{1}{k} \frac{s}{n}$$

Calculamos E_b/N_0 :

$$\frac{s}{n} = 10^{2,15} = 141,254 \text{ v.p.}$$

$$\frac{E_b}{N_0} = \frac{1}{4} 141,254 = 35,3134 \text{ v.p.}$$

Calculamos P_s (se ha evaluado la *erfc* con MATLAB):

$$p = \left(\frac{\sqrt{16} - 1}{\sqrt{16}} \right) \operatorname{erfc} \left[\sqrt{\frac{3 \log_2(16)}{2(16 - 1)} \cdot \frac{E_b}{N_0}} \right]$$

$$p = \frac{3}{4} \operatorname{erfc}[3,758] = \frac{3}{4} 1,0657 \cdot 10^{-7} = 7,9930 \cdot 10^{-8}$$

$$P_s = 1 - (1 - p)^2 \approx 2p = 1,5986 \cdot 10^{-7}$$

Y, como la codificación es de Gray:

$$P_b \approx \frac{P_s}{k} \approx 4 \cdot 10^{-8}$$

Problema 9.49 (Enero de 2009)

1. Régimen simbólico:

$$R_b = 40 \cdot 20 \cdot 48(\text{k}) = 38,4 \text{ Mb/s}$$

$$R_s = \frac{R_b}{k} = \frac{38,4(\text{M})}{3} = 12,8 \text{ Mbaudios}$$

Ancho de banda:

$$B = R_s (1 + \alpha) = 38,4(\text{M}) (1 + 0,5) = 19,2 \text{ MHz}$$

2. En una PSK la potencia de pico es igual a la potencia media. Energía recibida por símbolo:

$$E_s = p_R T_s = \frac{p_T/a_t}{R_s} = \frac{80/10^{8,7}}{12,8 \cdot 10^6} = 1,247 \cdot 10^{-14} \text{ J}$$

Problema 9.50 (Junio de 2009)

1. En el diagrama de ojos en I tenemos 4 niveles equiespaciados; en Q dos. Por lo tanto, la modulación es 8-QAM. Evidentemente, hay 8 símbolos.
2. Como $M = 8 = 2^3$, hay $k = 3$ bits por símbolo. El régimen simbólico se mide en cualquiera de los dos diagramas de ojos: entre instantes consecutivos de muestreo hay $T_s = 50 \text{ ns}$.

$$R_s = \frac{1}{T_s} = \frac{1}{50 \cdot 10^{-9}} = 20 \text{ Mbaudios}$$

$$R_b = k \cdot R_s = 3 \cdot 20 \cdot 10^6 = 60 \text{ Mbps}$$

3. Ancho de banda de la modulación lineal:

$$W = \frac{1}{2T_s} = \frac{R_s}{2}$$

$$B_{BB} = W(1 + \alpha)$$

$$B_{QAM} = 2 \cdot B_{BB} = R_s(1 + \alpha) = 20 \cdot 10^6(1 + 0,5) = 30 \text{ MHz}$$

4. A partir de la potencia media transmitida, calculamos la energía media por símbolo a la salida del transmisor (punto A):

$$E_{s \text{ TX}} = p_{TX} \cdot T_s = \frac{540 \cdot 10^{-3}}{20 \cdot 10^6} = 2,7 \cdot 10^{-8} \text{ J}$$

Llevamos la energía al receptor, pasando por el medio:

$$E_{s \text{ RX}} = \frac{E_{s \text{ TX}}}{a} = \frac{2,7 \cdot 10^{-8}}{10^6} = 2,7 \cdot 10^{-14} \text{ J}$$

Observando la constelación 8-QAM, relacionamos la energía media por símbolo en el receptor, con la distancia entre símbolos contiguos (d):

$$E_1 = d_1^2 = (d/2)^2 + (d/2)^2 = d^2/2$$

$$E_2 = d_2^2 = (3d/2)^2 + (d/2)^2 = 5d^2/2$$

$$E_{sRX} = \frac{E_1 + E_2}{2} = \frac{3d^2}{2} = 2,7 \cdot 10^{-14}$$

$$d \approx 1,3416 \cdot 10^{-7}$$

$$d/2 \approx 6,7082 \cdot 10^{-8}$$

Los ejes son:

$$I = \sqrt{\frac{2}{T_s}} \cos(\omega_c t)$$

$$Q = -\sqrt{\frac{2}{T_s}} \sin(\omega_c t)$$

$$\sqrt{\frac{2}{T_s}} = \sqrt{2R_s} \approx 6,3256 \cdot 10^3$$

$$\omega_c = 2\pi \cdot 2,4 \cdot 10^9$$

Las coordenadas y la asignación de Gray se dejan a cargo del lector. En la figura 9.50 se observa la constelación recibida.

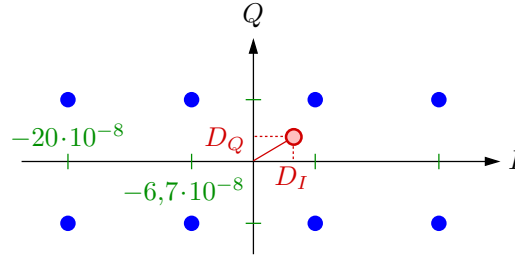


Figura 9.50: Constelación recibida.

- De forma general, hay que proyectar la señal recibida (s) sobre las portadoras recuperadas (ψ_1 y ψ_2), mediante el producto escalar. Es decir:

$$D_I = \langle s(t), \psi_1(t) \rangle$$

$$D_Q = \langle s(t), \psi_2(t) \rangle$$

Pero gracias a la representación geométrica, basta con proyectar sobre I y Q el vector de $s(t)$. La amplitud del vector es la raíz de la energía de la señal, y su desfase sobre el eje horizontal es $\pi/6$.

$$A = \sqrt{E} \sqrt{2/T}$$

$$3,162277 \cdot 10^{-4} = \sqrt{E} \sqrt{2R_s}$$

$$\sqrt{E} \approx 5 \cdot 10^{-8}$$

$$D_I = \sqrt{E} \cos(\pi/6) \approx 4,33 \cdot 10^{-8}$$

$$D_Q = \sqrt{E} \sin(\pi/6) = 2,50 \cdot 10^{-8}$$

La decisión se ve claramente en la figura.

6. La calidad de una 8-QAM tiene la siguiente cota superior:

$$P_s < 2 \operatorname{erfc} \left[\sqrt{\frac{3 \log_2(M)}{2(M-1)}} \frac{E_b}{N_0} \right]$$

Convertimos la energía de símbolo recibido en energía de bit, y la dividimos por la densidad espectral unilateral de ruido:

$$\frac{E_b}{N_0} = \frac{E_s}{k \cdot N_0} = \frac{2,7 \cdot 10^{-14}}{3 \cdot 31 \cdot 10^{-17}} \approx 29,03$$

El argumento de la *erfc* es:

$$\sqrt{\frac{3 \log_2(M)}{2(M-1)}} \frac{E_b}{N_0} = \sqrt{\frac{3 \cdot 3}{2 \cdot 7}} \cdot 29,03 \approx 4,32$$

En los cuadros vemos que $\operatorname{erfc}(4,32) \approx 10^{-9}$. Como la asignación es de Gray, la BER queda:

$$BER = P_b = \frac{P_s}{k} = \frac{2 \cdot 10^{-9}}{3} \approx 6,7 \cdot 10^{-10}$$

Luego el objetivo de calidad se cumple.

Problema 9.51 (Junio de 2009)

1. Calculamos el régimen binario:

$$N_T = (48 \cdot 2 + 2) 16 = 1568 \text{ bits/trama}$$

$$R_b = N_T \cdot f_m = 69,1488 \text{ Mbps}$$

Estudiamos la geometría de la constelación 64QAM de la figura 9.51 para relacionar la potencia media y la de pico:

$$PEP = \frac{1}{2R} A_p^2 = \frac{1}{2R} 98 A^2 = \frac{A^2}{2R} 98$$

$$p = \frac{A^2}{2R} \frac{1}{8} \left[\frac{2}{2} + \frac{18}{2} + \frac{50}{2} + \frac{98}{2} + 10 + 26 + 50 + 34 + 58 + 74 \right] = \frac{A^2}{2R} 42$$

$$p = \frac{42}{98} PEP = \frac{3}{7} PEP$$

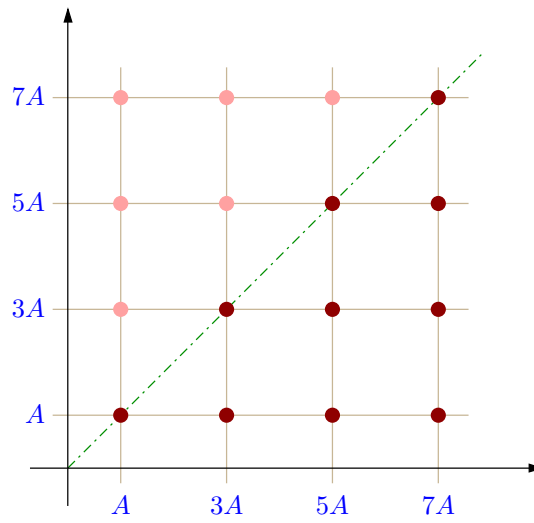


Figura 9.51: Primer cuadrante de la 64QAM.

Calculamos la potencia media transmitida:

$$p_T = \frac{3}{7} PEP = 10,5 \text{ W}$$

Calculamos la energía recibida por bit:

$$E_b = \frac{p_T/a_t}{R_b} = \frac{10,5/10^{11,33}}{69,1488 \cdot 10^6} = 7,1024 \cdot 10^{-19} \text{ J}$$

Calculamos el ruido:

$$T_e = T_0 (f - 1) = 300 (2 - 1) = 300 \text{ K}$$

$$N_0 = k (T_{in} + T_e) = 8,2836 \cdot 10^{-21} \text{ W/Hz}$$

Obtenemos la relación E_b/N_0 :

$$\frac{E_b}{N_0} = 85,74 \text{ v.p.} \rightarrow 19,3 \text{ dB}$$

De las gráficas de calidad:

$$P_s = 7 \cdot 10^{-7}$$

Y como la codificación es de Gray:

$$P_b \approx \frac{P_s}{k} = \frac{7 \cdot 10^{-7}}{6} \approx 1,2 \cdot 10^{-7}$$

2. El desapuntamiento reduce E_b , y por tanto la relación E_b/N_0 , en esos mismos 1,3 dB. Ahora:

$$\frac{E_b}{N_0} = 19,3 - 1,3 = 18 \text{ dB}$$

De las gráficas de calidad:

$$P_s = 2 \cdot 10^{-5}$$

Y como la codificación es de Gray:

$$P_b \approx 3,3 \cdot 10^{-6}$$

3. Tenemos que recuperar los 1,3 dB perdidos por desapuntamiento reduciendo el ruido en la misma cantidad. El método general es:

$$\frac{N_0}{N'_0} = 10^{0,13} = \frac{k(300 + 300)}{k(300 + T'_e)}$$

$$T'_e = 144,79 \text{ K}$$

$$f' = 1 + \frac{T'_e}{T_0} = 1,483 \rightarrow 1,71 \text{ dB}$$

Pero en este caso, como el ruido a la entrada es T_0 , las densidades espectrales de ruido se obtienen multiplicando la entrada por el factor de ruido (en unidades naturales). En unidades logarítmicas basta con restar el desapuntamiento al factor de ruido inicial:

$$F' = F - 1,3 = 3 - 1,3 = 1,7 \text{ dB}$$

4. Una constelación 64QAM se puede ver en las transparencias de la asignatura.

Para hacer una codificación de Gray podemos usar el mismo método estudiado en la 16QAM: cada símbolo tiene 6 bits; tomamos los 3 bits de mayor peso para una codificación de Gray moviéndonos en sentido horizontal; los 3 bits restantes (de menor peso) se codifican según Gray moviéndonos en vertical. La codificación resultante es obligatoriamente de Gray, pues en horizontal sólo cambia un bit al moverse a la derecha o a la izquierda (de los de mayor peso), y sólo cambia un bit al moverse hacia arriba o hacia abajo (de los de menor peso).

Problema 9.52 (Junio de 2009)

1. Calculamos el régimen binario que entrega el sistema MIC:

$$R_b = (10 \cdot 2 + 4) \cdot 10 \cdot 35(\text{k}) = 8,4 \text{ Mbps}$$

Del ancho de banda disponible, sacamos el k mínimo:

$$B = R_s(1 + \alpha) = \frac{R_b}{k} \cdot 1,5$$

$$5 \cdot 10^6 = \frac{8,4 \cdot 10^6}{k} \cdot 1,5$$

$$k = 2,52 \Rightarrow k \geq 3$$

Luego k debe ser al menos 3, de manera que cumplen con los requisitos las modulaciones 8-PSK, 16-PSK, 32-PSK, etc.

2. Basta con seleccionar la PSK con menor M: 8-PSK.
3. Calculamos el ancho de banda ocupado por la 8-PSK:

$$B = \frac{8,4 \cdot 10^6}{3} \cdot 1,5 = 4,2 \text{ MHz}$$

Problema 9.53 (Septiembre de 2009)

Modulaciones lineales:

$$B = R_s (1 + \alpha) = \frac{R_b}{k} (1 + \alpha) = \frac{232,5 \cdot 10^6}{k}$$

$$B(\text{BPSK}) = 232,5 \text{ MHz}$$

$$B(\text{QPSK}) = 116,25 \text{ MHz}$$

$$B(16\text{QAM}) = 58,125 \text{ MHz}$$

Modulaciones no lineales:

$$\Delta f = \frac{R_s}{2}$$

$$B = (M - 1) \Delta f + R_s (1 + \alpha) = \frac{155 \cdot 10^6}{k} (0,5 \cdot M + 1)$$

$$B(2\text{FSK}) = 310 \text{ MHz}$$

$$B(8\text{FSK}) = 258,3 \text{ MHz}$$

Problema 9.54 (Septiembre de 2009)

Calculamos el ruido:

$$T_e = T_0 (f - 1) = 300 (4 - 1) = 900 \text{ K}$$

$$N_0 = k (T_{in} + T_e) = 1,3806 \cdot 10^{-23} (300 + 900) = 1,65672 \cdot 10^{-20} \text{ W/Hz}$$

De la calidad sacamos E_b :

$$10^{-8} = \frac{1}{2} \exp \left(-\frac{E_b}{N_0} \right)$$

$$\frac{E_b}{N_0} = 17,7275 \text{ v.p.}$$

$$E_b = 2,93696 \cdot 10^{-19}$$

Calculamos la potencia recibida:

$$p_R = E_b R_b = 7,04869 \cdot 10^{-16} \text{ W} \rightarrow -121,5 \text{ dBm}$$

La atenuación será la diferencia entre la potencia transmitida y la recibida:

$$A_t = P_T - P_R = 3 - (-121,5) = 124,5 \text{ dBm}$$

Problema 9.55 (Enero de 2010)

El desfase θ gira la señal recibida respecto al eje sobre el que se proyecta. De ese modo la proyección de la señal se reduce en amplitud, degradándose la calidad (aumenta la probabilidad de error).

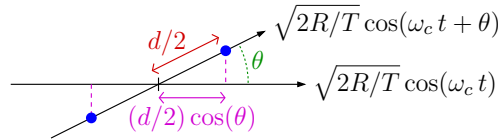


Figura 9.52: Representación geométrica de las señales sobre un eje desfasado.

En la figura 9.52 observamos la situación. Las señales de amplitud $\pm A$, tendrán proyecciones $Z(T) = \pm d/2$ sobre la portadora sin desfase. Si, por el error de recuperación, se proyectan sobre el eje $\sqrt{2R/T} \cos(\omega_c t)$ sufrirán una reducción $\cos(\theta)$ en sus coordenadas. Como la energía es el cuadrado de las distancias, la variación de (E_b/N_0) vendrá dada por la relación entre distancias al cuadrado.

$$M = 2 \Rightarrow E_b = E_s$$

$$\frac{[E_b(0^\circ)/N_0]}{[E_b(\theta^\circ)/N_0]} = \frac{E_b(0^\circ)}{E_b(\theta^\circ)} = \frac{(d/2)^2}{(d/2)^2 \cos^2(\theta)} = 2 \text{ (v.p.)}$$

$$\cos(\theta) = \frac{1}{\sqrt{2}} \Rightarrow \theta = 45^\circ$$

Problema 9.56 (Enero de 2010)

Calculamos la expresión del ancho de banda de la 4FSK, igualamos al valor del enunciado, y obtenemos el régimen simbólico que puede soportar el canal:

$$B = 3 \Delta f + 2 \frac{1}{2T}$$

$$B = 3 \frac{R_s}{2} + 2 \frac{R_s}{2} = \frac{5R_s}{2} = 12(\text{M})$$

$$R_s = 4,8 \text{ Mbaudios}$$

En una 4-FSK, con dos bits por símbolo, R_s conlleva un régimen binario:

$$R_b = 2R_s = 9,6 \text{ Mbps}$$

Con el Teorema del Muestreo, y formando la trama MIC, calculamos la expresión del régimen binario entregado:

$$N_T = (60 + 2 + 2)10 = 640 \text{ bits/trama}$$

$$f_m = 1,25 f_{Nyq} = 1,25 \cdot 2 \cdot W = 2,5 \cdot W$$

$$R_b = N_T f_m = 1600 \cdot W = 9,6 \text{ Mbps}$$

$$W = 6000 \text{ kHz}$$

Efectivamente, la voz se transmite con gran calidad.

Problema 9.57 (Enero de 2010)

1. Régimen binario:

$$N_T = (25 \cdot 2 + 1) 14 = 714 \text{ bits/trama}$$

$$R_b = N_T \cdot f_m = 22,848 \text{ Mbps}$$

Estudio de la constelación: relación entre energía de pico y energía media.

$$E_p \propto (1 + \sqrt{3})^2$$

$$E_s \propto \frac{1}{2} [(\sqrt{2})^2 + (1 + \sqrt{3})^2]$$

$$\frac{E_s}{E_p} = \frac{1}{(1 + \sqrt{3})^2} + \frac{1}{2} \approx 0,6339745962$$

Cálculo de la potencia media transmitida:

$$\frac{p_T}{PEP} = \frac{E_s}{E_p}$$

$$p_T \approx 1,9019 \text{ W}$$

Cálculo de la energía por bit en recepción:

$$E_b = \frac{p_T}{a_t} \frac{1}{R_b} = \frac{1,9019}{10^{11,4}} \frac{1}{22,848 \cdot 10^6} = 3,314 \cdot 10^{-19} \text{ J}$$

Cálculo del ruido:

$$T_e = 300 (4 - 1) = 900 \text{ K}$$

$$N_0 = k (T_{in} + T_e) = 1,65672 \cdot 10^{-20} \text{ W/Hz}$$

Relación E_b/N_0 :

$$\frac{E_b}{N_0} \approx 20 \text{ v.p.}$$

Probabilidad de bit erróneo:

$$P_b \approx \frac{7}{4} \operatorname{erfc} \left(\sqrt{\frac{3}{2 + \sqrt{3}}} 20 \right) = \frac{7}{4} \operatorname{erfc}(4,01) = \frac{7}{4} 1,4197 \cdot 10^{-8}$$

$$P_b \approx 2,5 \cdot 10^{-8}$$

2. En la figura 9.53 se observa la constelación 8APK óptima en transmisión, sobre unos ejes normalizados en voltios (de pico de senoide). Calculamos la distancia entre símbolos contiguos d :

$$PEP = \frac{A_p^2}{2R}$$

$$3 = \frac{A_p^2}{2 \cdot 50}$$

$$A_p = \sqrt{300} \text{ V}$$

$$d = A_p \frac{2}{1 + \sqrt{3}} \approx 12,68 \text{ V}$$

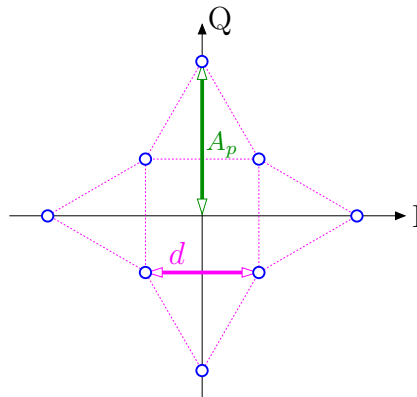


Figura 9.53: Constelación 8APK óptima en transmisión.

No es posible realizar una codificación de Gray: cada uno de los cuatro símbolos de energía mínima está rodeado por otros cuatro contiguos (y cada símbolo se codifica con $k = 3$ bits).

Ancho de banda mínimo por el criterio de Nyquist:

$$B = R_s = \frac{R_b}{k} = \frac{22,848(\text{M})}{3} = 7,616 \text{ MHz}$$

Problema 9.58 (Junio de 2010)

1. Vamos a resolver este apartado por 2 caminos diferentes. Para apreciar mejor la similitud en el resultado, tomaremos más decimales de lo habitual.

Primer camino: para una constelación cualquiera (sea banda base o modulada) la calidad viene fijada fundamentalmente por la distancia mínima entre símbolos. Como consecuencia de ello, es posible calcular, de forma aproximada, la probabilidad de símbolo erróneo fijándonos únicamente en 2 símbolos contiguos. Tomamos la fórmula

binaria que trabaja con la energía de la señal diferencia (señal diferencia entre 2 símbolos contiguos).

$$P_s \approx \frac{1}{2} \operatorname{erfc} \left(\frac{1}{2} \sqrt{\frac{E_d}{N_0}} \right) = 5 \cdot 10^{-8}$$

$$\operatorname{erfc}(x) = 10^{-7}$$

$$x = 3,7665626 \text{ (calculado con MATLAB)}$$

$$\frac{E_d}{N_0} = 56,747975$$

$$T_e = 300 (10^{0,5} - 1) = 648,683 \text{ K}$$

$$N_0 = k (T_{in} + T_e) = 1,309752 \cdot 10^{-20} \text{ W/Hz}$$

$$E_d = 7,432528 \cdot 10^{-19} \text{ J}$$

La señal diferencia (en TX) es un pulso de $3 + 3 = 6 \text{ V}$

$$E_d = \frac{p_T}{a_t} \cdot T = \frac{6^2}{75 a_t} \frac{1}{100 \cdot 10^6}$$

$$a_t = 6,458055 \cdot 10^9 \text{ v.p.} \rightarrow 98,10 \text{ dB}$$

$$A(\text{dB}) = \alpha(\text{dB/km}) \cdot L(\text{km})$$

$$98,10 = 90 \cdot L$$

$$L = 1090 \text{ m}$$

Segundo camino: desde el punto de vista geométrico es indiferente que la señal esté en banda base o modulada. Así, la fórmula de calidad de una 4ASK es perfectamente aplicable a una constelación BB de pulsos equidistantes y en una única dimensión.

$$P_s = \frac{4-1}{4} \cdot \operatorname{erfc} \left(\sqrt{\frac{3}{16-1} \cdot \frac{E_s}{N_0}} \right)$$

$$\operatorname{erfc}(x) = \frac{20}{3} \cdot 10^{-8}$$

$$x = 3,81832757 \text{ (calculado con MATLAB)}$$

$$\frac{E_s}{N_0} = 72,898127325$$

$$E_s = 9,547847 \cdot 10^{-19} \text{ J}$$

$$E_s = \frac{1}{75} \frac{3^2 + 9^2}{2 a_t} \frac{1}{100 \cdot 10^6}$$

$$a_t = 6,284139 \cdot 10^9 \text{ v.p.} \rightarrow 97,98 \text{ dB}$$

$$L = 1089 \text{ m}$$

Y se corrobora que es muy pequeña la diferencia entre los resultados obtenidos por ambos caminos.

2. La codificación es de Gray:

$$P_b \approx \frac{P_s}{k} = 2,5 \cdot 10^{-8}$$

3. Estamos en banda base:

$$B = \frac{R_s}{2} = 50 \text{ MHz}$$

Problema 9.59 (Junio de 2010)

1. Como hay $M = 4$ símbolos, el número de bits por símbolo es $k = \log_2(4) = 2$. Por lo tanto:

$$R_s = R_b/k = 50 \text{ Mbaudios}$$

2. La limitación viene impuesta por el criterio de Nyquist. El ancho de banda de una modulación lineal con filtrado en coseno alzado es:

$$B = R_s (1 + \alpha) = 50(\text{M}) (1 + 0,5) = 75 \text{ MHz}$$

3. Potencia recibida:

$$P_{RX} = P_{TX} - A_t = 20 - 60 = -40 \text{ dBm} \Rightarrow p_{RX} = 10^{-7} \text{ W}$$

Energía media por símbolo recibido:

$$E_s = p_{RX}/R_s = 10^{-7}/(50 \cdot 10^{-6}) = 2 \cdot 10^{-15} \text{ J}$$

4. En recepción, energía media por símbolo respecto a densidad espectral de ruido:

$$\frac{E_s}{N_0} = \frac{2 \cdot 10^{-15}}{2,144 \cdot 10^{-17}} \approx 93,284 \text{ veces de pot.}$$

Pasamos a energía media por bit:

$$\frac{E_b}{N_0} = \frac{1}{k} \cdot \frac{E_s}{N_0} \approx 46,642 \text{ veces de pot.}$$

5. Probabilidad de símbolo erróneo:

$$P_s = \frac{4-1}{4} \cdot \text{erfc}\left(\sqrt{\frac{3}{16-1}} \cdot 93,284\right) = \frac{3}{4} \cdot \text{erfc}(4,32)$$

La función erfc en 4,32 vale 10^{-9} . Sustituyendo:

$$P_s = (3/4) \cdot 10^{-9}$$

Con asignación de Gray:

$$P_b \approx \frac{P_s}{k} = (3/8) \cdot 10^{-9}$$

6. En ASK la constelación tiene una única dimensión, de manera que el eje Q es totalmente innecesario. El eje (I) de señal normalizada es:

$$\psi = \sqrt{\frac{2}{T_s}} \cdot \cos(\omega_c t) = \sqrt{2R_s} \cdot \cos(\omega_c t) = 10000 \cdot \cos(\omega_c t)$$

En la figura 9.54 se aprecia la constelación de 4 símbolos equiespaciados en el eje coseno, con una codificación binaria de Gray. La distancia d la calculamos a partir de la energía media por símbolo. Como la representación está normalizada en energía, las distancias al cuadrado son energías.

$$E_s = \frac{d^2 + (3d)^2}{2} = 5d^2 = 2 \cdot 10^{-15} \Rightarrow d = 2 \cdot 10^{-8}$$

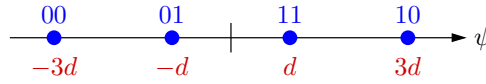


Figura 9.54: Constelación 4ASK.

7. Los umbrales son equidistantes de cada pareja de símbolos contiguos. Luego hay 3 umbrales que valen $-2d$, 0 y $2d$; es decir: $-4 \cdot 10^{-8}$, 0 y $4 \cdot 10^{-8}$.
8. Para representar geoméricamente la señal recibida, calculamos su raíz de energía a partir de la amplitud:

$$A_r = \sqrt{2R_s} \cdot \sqrt{E_r}$$

$$6 \cdot 10^{-4} = \sqrt{2 \cdot 50 \cdot 10^6} \cdot \sqrt{E_r} \Rightarrow \sqrt{E_r} = 6 \cdot 10^{-8}$$

Proyectamos la amplitud de la representación (raíz de energía) sobre el eje I. (La proyección sobre el Q es indiferente para la decisión.)

$$D_I = \sqrt{E_r} \cdot \cos\left(\frac{4\pi}{3}\right) = -3 \cdot 10^{-8}$$

Comparando con los umbrales, es evidente que el detector decidirá 01 (2º símbolo empezando por la izquierda).

Problema 9.60 (Julio de 2010)

1. Como la eficiencia espectral es mayor que la unidad, descartamos las FSK:

$$\frac{R_b}{B} = \frac{55}{30} \approx 1,83 > 1$$

(El alumno puede comprobar esto calculando el ancho de banda de las FSK, coherentes que ocupan menos, con $M = 2, 4$ y 8 .)

El ancho de banda de una modulación lineal se relaciona con el régimen simbólico mediante el Criterio de Nyquist para un filtro en coseno alzado:

$$B = R_s (1 + \alpha)$$

$$30(\text{M}) = R_s (1 + 0,5) \Rightarrow R_s = 20 \text{ Mbaudios}$$

Que es el máximo régimen simbólico que se puede transmitir por el canal.

2. Comparando el régimen binario (dato) con el régimen simbólico del apartado anterior, obtenemos el número de bits por símbolo:

$$\frac{R_b}{R_s} = \frac{55}{20} = 2,75 \Rightarrow k \geq 3$$

Para que R_b se pueda transmitir por el canal, k ha de ser al menos 3. El mínimo número de símbolos de la modulación es:

$$M = 2^k = 8 \Rightarrow M \geq 8$$

3. Relación E_b/N_0 :

$$\frac{E_b}{N_0} = \frac{p_{RX}/R_b}{N_0} = \frac{7,1 \cdot 10^{-9}}{4,1 \cdot 10^{-18} \cdot 55 \cdot 10^6} = 31,486 \text{ v.p.}$$

$$\frac{E_b}{N_0} = 15,0 \text{ dB}$$

4. Con $M = 16$ (o mayor) es evidente que ninguna modulación cumple con la BER. Para 8 símbolos imponemos el requisito de calidad:

$$k = 3$$

$$P_s \approx k \cdot P_b = 3 \cdot 10^{-8}$$

Y la 8-QAM es la única que cumple simultáneamente con las limitaciones de ancho de banda y calidad/potencia.

Problema 9.61 (Julio de 2010)

1. A partir de la PEP sacamos el valor de D en la constelación transmitida. (Por conveniencia, calculamos D^2 .)

$$PEP = \frac{(5D)^2}{2R}$$

$$2 \cdot 10^{-3} = \frac{25 D^2}{2 \cdot 600}$$

$$D^2 = 0,096$$

Ahora calculamos la potencia media transmitida:

$$p_T = \frac{1}{2 \cdot 600} \frac{0,096}{4} [3^2 + 5^2 + (\sqrt{2})^2 + (3\sqrt{2})^2]^2$$

$$p_T = 1,08 \cdot 10^{-3} \text{ W} \rightarrow -29,67 \text{ dBW}$$

Por último, pasamos a potencia media recibida:

$$P_R = P_T - A_t = -130,07 \text{ dBW}$$

2. De la potencia recibida sacamos E_b :

$$E_b = P_R - 10 \log(R_b) = -130,37 - 10 \log(9600) = -169,89 \text{ dBJ}$$

Calculamos el ruido:

$$T_e = 300 (10^{1,5} - 1) = 9186,8 \text{ K}$$

$$N_0 = k (T_{in} + T_e) = 1,3167 \cdot 10^{-19} \text{ W/Hz} \rightarrow -188,81 \text{ dBW/Hz}$$

Y formamos la relación E_b/N_0 :

$$\frac{E_b}{N_0} = -169,89 - (-188,81) = 18,91 \text{ dB}$$

3. La distancia mínima entre símbolos contiguos es $2D$. La energía (en recepción) de la señal diferencia mínima es:

$$E_{dmin} = p \cdot T = \frac{2^2 D^2}{2R} \frac{1}{a_t} \frac{k}{R_b} = \frac{4 \cdot 0,096}{2 \cdot 600} \frac{1}{10^{10,04}} \frac{4}{9600} = 1,2160 \cdot 10^{-17} \text{ J}$$

Calculamos P_s :

$$P_s \leq \frac{16-1}{2} \operatorname{erfc} \left(\frac{1}{2} \sqrt{\frac{1,2160 \cdot 10^{-17}}{1,3167 \cdot 10^{-19}}} \right)$$

$$P_s = \frac{15}{2} \operatorname{erfc}(4,805) \approx 8,1 \cdot 10^{-11}$$

4. En una modulación que no sea ortogonal es típico tomar siempre $P_b \approx P_s/k$. Sin embargo, ésta aproximación se fundamenta en que la codificación sea de Gray. Por lo tanto, podemos replantear la pregunta en los siguientes términos: ¿es posible realizar una codificación de Gray en la constelación bajo estudio?

Un análisis aproximado de la situación nos lleva a una respuesta negativa, pues cada uno de los 4 símbolos de menor energía están rodeados por 5 contiguos, mientras que $k = 4$ bits/símbolo.

Sin embargo, haciendo cálculos trigonométricos, es inmediato darse cuenta de que la distancia a los 5 vecinos contiguos no es constante: son solo 2 los contiguos a distancia mínima ($2D$). De manera que cabría la posibilidad de buscar una asignación de Gray.

5. En la fórmula del ancho de banda de una modulación lineal, imponemos el ancho de banda de la línea, y despejamos el factor de redondeo:

$$B = R_s (1 + \alpha)$$

$$3100 = \frac{9600}{4} (1 + \alpha)$$

$$\alpha \approx 0,3$$

Problema 9.62 (Diciembre de 2010)

A partir de la relación S/N sacamos E_b/N_0 :

$$B = R_s = \frac{R_b}{k}$$

$$\frac{s}{n} \approx 400 \text{ v.p.}$$

$$\frac{E_b}{N_0} = \frac{s/R_b}{n/B} = \frac{1}{k} \frac{s}{n}$$

$$\frac{E_b}{N_0} = \frac{1}{6} 400 = 66.\widehat{6} \text{ v.p.}$$

Calculamos la P_s :

$$p = \frac{8-1}{8} \operatorname{erfc} \left[\sqrt{\frac{3 \cdot 6}{2 \cdot 63}} 66.\widehat{6} \right] = \frac{7}{8} \operatorname{erfc}[3,09] = \frac{7}{8} 1,243 \cdot 10^{-5} = 1,09 \cdot 10^{-5}$$

$$P_s = 1 - (1-p)^2 = 1 - 1 + 2p - p^2 \approx 2p = 2,18 \cdot 10^{-5}$$

Y la BER vale:

$$P_b \approx \frac{P_s}{k} = 3,6 \cdot 10^{-6}$$

Problema 9.63 (Diciembre de 2010)

Modulaciones lineales:

$$B = R_s (1 + \alpha) = \frac{R_b}{k} (1 + \alpha) = \frac{842,2 \cdot 10^6}{k}$$

$$B(2PSK) = 842,4 \text{ MHz}$$

$$B(8PSK) = 280,8 \text{ MHz}$$

$$B(64QAM) = 140,4 \text{ MHz}$$

Modulaciones no lineales:

$$\Delta f = \frac{R_s}{2}$$

$$B = (M-1) \Delta f + R_s (1 + \alpha) = \frac{624 \cdot 10^6}{k} (0,5 \cdot M + 0,85)$$

$$B(2FSK) = 1154,4 \text{ MHz}$$

$$B(4FSK) = 889,2 \text{ MHz}$$

Problema 9.64 (Diciembre de 2010)

1. En el medio tenemos el mismo régimen binario que entrega el MIC:

$$R_b = N_T \cdot f_m = 32 \cdot 8 \cdot 8(\text{k}) = 2048 \text{ kbps}$$

Como hay 8 símbolos:

$$M = 8 = 2^k = 2^3$$

$$R_s = \frac{R_b}{k} = 682.6 \text{ kbaudios}$$

2. La restricción impone la interferencia intersimbólica. Aplicamos el Criterio de Nyquist al ancho de banda:

$$B = R_s(1 + \alpha) = 1.5 \cdot R_s = 1024 \text{ kHz}$$

3. La amplitud de las señales (sinusoidales) en D es:

$$A_D = d_0 \sqrt{\frac{2}{T}} = 100 \cdot 10^{-6} \cdot \sqrt{2 \cdot 682.6 \cdot 10^3} = 0.116847 \text{ V}$$

Luego la potencia en D es:

$$p_D = \frac{A_D^2}{2R} = 1.3653 \cdot 10^{-4} \text{ W}$$

Pasamos al punto E:

$$p_E = p_D \cdot g_A = 1.3653 \text{ W}$$

$$P_E \approx 31.4 \text{ dBm}$$

4. Calculamos la amplitud de los símbolos:

$$p_G = \frac{p_E}{a_t} = 1.3653 \cdot 10^{-10} \text{ W}$$

$$p_G = \frac{A_G^2}{2R} \Rightarrow A_G \approx 1.1685 \cdot 10^{-4} \text{ V}$$

El primer símbolo (000) tiene un desfase de $+22.5^\circ$, y el segundo (110) $180 + 22.5 = 202.5^\circ$.

5. Si la relación (E_b/N_0) es grande:

$$P_s \approx \text{erfc} \left[\sqrt{\frac{E_s}{N_0}} \sin \left(\frac{\pi}{M} \right) \right]$$

Sustituimos valores:

$$E_s = \frac{p_G}{R_s} = 2 \cdot 10^{-16} \text{ J}$$

$$P_s \approx \operatorname{erfc}[4,32] \approx 10^{-9}$$

Como la codificación es de Gray:

$$P_b \approx \frac{P_s}{k} = \frac{P_s}{3} \approx 3,33 \cdot 10^{-10}$$

Por último, verificamos la condición de partida:

$$\frac{E_b}{N_0} = \frac{E_s}{k \cdot N_0} = \frac{2 \cdot 10^{-16}}{3 \cdot 1,57 \cdot 10^{-18}} \approx 42,5 \gg 1 \text{ (se cumple)}$$

Problema 9.65 (Mayo de 2011)

En una 16QAM la relación entre potencia media y de pico es:

$$p = \frac{5}{9} PEP$$

Calculamos la potencia media transmitida, la pasamos al receptor, y hallamos la energía por bit:

$$p_T = \frac{5}{9} 400 = 222,2 \text{ W}$$

$$p_R = \frac{p_T}{a_t} = 2,7976 \cdot 10^{-10} \text{ W}$$

$$E_b = p_R \cdot T_b = 6,9940 \cdot 10^{-19} \text{ J}$$

Calculamos la densidad de ruido:

$$T_e = T_0 (f - 1) = 300 (4 - 1) = 900 \text{ K}$$

$$N_0 = k (T_{in} + T_e) = 1,65672 \cdot 10^{-20} \text{ W/Hz}$$

La relación E_b/N_0 es:

$$\frac{E_b}{N_0} = 42,22 \text{ v.p.} \rightarrow 16,3 \text{ dB}$$

Problema 9.66 (Mayo de 2011)

Sustituimos la eficiencia espectral en la fórmula del límite de capacidad de Shannon, y despejamos E_b/N_0 :

$$\frac{C}{B} = \log_2 \left(1 + \frac{C}{B} \frac{E_b}{N_0} \right)$$

$$\frac{1}{3} = \log_2 \left(1 + \frac{1}{3} \frac{E_b}{N_0} \right)$$

$$\frac{E_b}{N_0} = 3 (2^{1/3} - 1) = 0,779763 \text{ v.p.} \rightarrow -1,08 \text{ dB}$$

Comentarios:

- Es un valor muy bajo, incluso es un valor negativo. Pero está por encima de la asíntota vertical de $E_b/N_0 = -1,6$ dB, que marca el límite absoluto de lo que se puede conseguir.
- De acuerdo con el teorema de Shannon, es posible transmitir con eficiencia espectral $1/3$ para una $E_b/N_0 = -1,08$ dB, a costa de complicar mucho el procesado. No es posible transmitir más deprisa. Los sistemas prácticos, reales, tienen que conformarse con un régimen binario menor (para ese valor de E_b/N_0).

Problema 9.67 (Mayo de 2011)

1. La multiplexación de portadoras ortogonales moduladas linealmente se denomina OFDM. Como las portadoras llevan información (que modificará su fase) es necesario implementar la separación de ortogonalidad no coherente. El espectro tiene la misma forma (mismos nulos) que una MFSK no coherente. Por lo tanto, el ancho de banda será:

$$B = (M - 1) \Delta f + 2 \frac{R_s}{2}$$

$$\Delta f = \frac{1}{T} = R_s$$

$$B = M R_s$$

Donde R_s es el régimen simbólico de cada portadora. El ancho de banda disponible permite un régimen simbólico por portadora:

$$800(k) = 4 R_s$$

$$R_s = 200 \text{ Mbaudios}$$

Y como cada portadora lleva una 16QAM:

$$R_b = k R_s = 800 \text{ kbps}$$

El sistema en conjunto consta de 4 modulaciones 16QAM en paralelo:

$$R_{bT} = 4 R_b = 32 \text{ Mbps}$$

2. Realizamos los cálculos para una portadora cualquiera. Del requisito de BER sacamos la P_s :

$$P_b = 3,375 \cdot 10^{-8}$$

$$P_s \approx k P_b = 1,35 \cdot 10^{-7}$$

Trabajando con la fórmula de calidad de 16QAM, despejamos E_b/N_0 :

$$P_s = 1 - (1 - p)^2 \approx 2p$$

$$p = 6,75 \cdot 10^{-8}$$

$$p = \left(\frac{\sqrt{M} - 1}{\sqrt{M}} \right) \operatorname{erfc} \left[\sqrt{\frac{3 \log_2(M)}{2(M-1)} \cdot \frac{E_b}{N_0}} \right] = \frac{3}{4} \operatorname{erfc} \left[\sqrt{\frac{2}{5} \cdot \frac{E_b}{N_0}} \right] = 6,75 \cdot 10^{-8}$$

$$\operatorname{erfc} \left[\sqrt{\frac{2}{5} \cdot \frac{E_b}{N_0}} \right] = 9 \cdot 10^{-8}$$

$$\sqrt{\frac{2}{5} \cdot \frac{E_b}{N_0}} \approx 3,78$$

$$\frac{E_b}{N_0} = 35,721 \text{ v.p.}$$

Calculamos el ruido, y despejamos E_b :

$$T_{in} = 400 \text{ K}$$

$$T_e = 300 \text{ K}$$

$$N_0 = k (T_{in} + T_e) = 9,6642 \cdot 10^{-21} \text{ W/Hz}$$

$$E_b = 3,4521 \cdot 10^{-19} \text{ J}$$

Calculamos la potencia recibida, la transmitida y la PEP:

$$p_R = E_b \cdot R_b = 2,7617 \cdot 10^{-13} \text{ W}$$

$$p_T = p_R \cdot a_t = 0,011047 \text{ W}$$

$$PEP = \frac{9}{5} p_T = 0,019884 \approx 0,02 \text{ W} \rightarrow 13 \text{ dBm}$$

Problema 9.68 (Junio de 2011)

Hay que calcular 3 puntos (2ASK, 4ASK y 8ASK).

Empezamos con la eficiencia espectral:

$$R_b = \log_2(M) \cdot R_s = k \cdot R_s$$

$$B = R_s$$

$$\frac{R_b}{B} = k$$

$$2\text{ASK: } \frac{R_b}{B} = 1\text{bps/Hz}$$

$$4\text{ASK: } \frac{R_b}{B} = 2\text{bps/Hz}$$

$$8\text{ASK: } \frac{R_b}{B} = 3\text{bps/Hz}$$

Ahora calculamos la relación E_b/N_0 de cada modulación para $P_s = 10^{-5}$:

$$P_s = \frac{M-1}{M} \operatorname{erfc} \left(\sqrt{\frac{3}{M^2-1} \frac{k \cdot E_b}{N_0}} \right)$$

$$2\text{ASK: } 10^{-5} = \frac{1}{2} \operatorname{erfc}(x)$$

$$x = 3,0157332 \text{ (valor obtenido con MATLAB)}$$

$$\frac{3}{2^2-1} \cdot 1 \cdot \frac{E_b}{N_0} = 3,0157332^2$$

$$\frac{E_b}{N_0} \approx 9,59 \text{ dB}$$

$$4\text{ASK: } 10^{-5} = \frac{3}{4} \operatorname{erfc}(x)$$

$$x = 3,0791402 \text{ (valor obtenido con MATLAB)}$$

$$\frac{E_b}{N_0} \approx 13,75 \text{ dB}$$

$$8\text{ASK: } 10^{-5} = \frac{7}{8} \operatorname{erfc}(x)$$

$$x = 3,1029353 \text{ (valor obtenido con MATLAB)}$$

$$\frac{E_b}{N_0} \approx 18,29 \text{ dB}$$

Comentario: ASK tiene igual eficiencia espectral que el resto de las modulaciones lineales, pero peor E_b/N_0 porque su constelación está distribuida en una recta.

Problema 9.69 (Junio de 2011)

1. Régimen simbólico que soporta un canal paso banda en coseno alzado de 750 kHz:

$$B = R_s(1 + \alpha)$$

$$750(\text{k}) = R_s \cdot 1,5 \Rightarrow R_s = 500 \text{ kbaudios}$$

2. Régimen binario máximo (el correspondiente al R_s del apartado anterior):

$$k = \log_2(M) = 4$$

$$R_b = k \cdot R_s = 2 \text{ Mbps}$$

3. Para nuestro sistema MIC:

$$f_m = 1,2 \cdot f_{Nyq} = 1,2 \cdot 2 \cdot W$$

$$R_b = N_T \cdot f_m$$

$$N_T = (30 + 2)8$$

$$R_b = 2(\text{M}) = 614,4 \cdot W \Rightarrow W = 3255,208 \text{ Hz}$$

Problema 9.70 (Junio de 2011)

1. Para FSK coherente:

$$\Delta f = 1/(2T) = R_s/2 \Rightarrow R_s = 200 \text{ Mbaudios}$$

$$M = 4 \Rightarrow k = 2 \text{ bits/símbolo}$$

$$R_b = k R_s = 400 \text{ Mbps}$$

2. Ancho de banda:

$$B = (M - 1) \Delta f + 2 \frac{1}{2T} (1 + \alpha)$$

$$B = (4 - 1) \frac{R_s}{2} + 1,5 R_s = 600 \text{ MHz}$$

3. Potencia recibida:

$$P_{RX} = P_{TX} - At = 26 - 78 = -52 \text{ dBm} \rightarrow p_{RX} = 6,31 \cdot 10^{-9} \text{ W}$$

Energía por bit:

$$E_b = p_{RX} \frac{1}{R_b} = 15,77 \cdot 10^{-18} \text{ J}$$

Relación E_b/N_0 :

$$\frac{E_b}{N_0} = \frac{15,77 \cdot 10^{-18}}{10^{-18}} = 15,77 \rightarrow 12 \text{ dB}$$

De la gráfica obtenemos:

$$P_b = 2 \cdot 10^{-8}$$

Usando la relación que liga las calidades de bit y de símbolo:

$$P_s = \frac{2(M - 1)}{M} P_b = 3 \cdot 10^{-8}$$

Podemos comprobar que:

$$\frac{E_s}{N_0} = \frac{E_b}{N_0} + 3(\text{dB}) = 15 \text{ dB}$$

Y en la gráfica correspondiente se lee (no con mucha precisión) el mismo resultado para P_s .

4. Frecuencias nominales:

$$f_1 = f_c - (3/2)\Delta f = 9,85 \text{ GHz}$$

$$f_2 = f_c - (1/2)\Delta f = 9,95 \text{ GHz}$$

$$f_3 = f_c + (1/2)\Delta f = 10,05 \text{ GHz}$$

$$f_4 = f_c + (3/2)\Delta f = 10,15 \text{ GHz}$$

5. a) Para la señal s_a : su frecuencia ($f_a = 9,75$ GHz) es ortogonal a todas las frecuencias nominales de la 4-FSK; por lo tanto, la decisión es impredecible.
 b) Para la señal s_b : la frecuencia nominal más próxima a f_b es f_3 ; por lo tanto, la decisión debería ser s_3 .
6. a) Para s_a : por la ortogonalidad, todas las contribuciones son nulas (y todos los valores son igual de significativos).

$$\langle s_a, s_1 \rangle = 0$$

$$\langle s_a, s_2 \rangle = 0$$

$$\langle s_a, s_3 \rangle = 0$$

$$\langle s_a, s_4 \rangle = 0$$

- a) Para s_b : calculamos los productos escalares.

$$|f_b + f_2| = 20010 \text{ MHz}$$

$$|f_b - f_2| = 110 \text{ MHz}$$

$$|f_b + f_3| = 20110 \text{ MHz}$$

$$|f_b - f_3| = 10 \text{ MHz}$$

$$\begin{aligned} \langle s_b, s_2 \rangle &= \frac{B}{2} \cdot \frac{1}{2\pi \cdot 20010 \cdot 10^6} \cdot \text{sen} \left(2\pi \cdot 20010 \cdot 10^6 \cdot \frac{1}{200 \cdot 10^6} \right) + \\ &\quad + \frac{B}{2} \cdot \frac{1}{2\pi \cdot 110 \cdot 10^6} \cdot \text{sen} \left(2\pi \cdot 110 \cdot 10^6 \cdot \frac{1}{200 \cdot 10^6} \right) \\ &\approx -2,24 \cdot 10^{-10} \cdot B \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \langle s_b, s_3 \rangle &= \frac{B}{2} \cdot \frac{1}{2\pi \cdot 20110 \cdot 10^6} \cdot \text{sen} \left(2\pi \cdot 20110 \cdot 10^6 \cdot \frac{1}{200 \cdot 10^6} \right) + \\ &\quad + \frac{B}{2} \cdot \frac{1}{2\pi \cdot 10 \cdot 10^6} \cdot \text{sen} \left(2\pi \cdot 10 \cdot 10^6 \cdot \frac{1}{200 \cdot 10^6} \right) \\ &\approx 2,46 \cdot 10^{-9} \cdot B \end{aligned}$$

Como era de esperar, el parecido mayor se da con f_3 .

Problema 9.71 (Julio de 2011)

Tomamos como portadora la frecuencia central del canal: $f_c = 2,4$ GHz.

Ahora, pasamos a estudiar los requisitos de régimen binario y ancho de banda: como tenemos un régimen binario (140 Mbps) mayor que el ancho de banda (120 MHz), no nos sirven las modulaciones no lineales. Se puede comprobar calculando el ancho de banda (coherente por ejemplo) que necesitan diferentes FSK (en función de M):

$$k = \log_2(M)$$

$$B_{MFSK} = (M-1) \cdot \Delta f + 2 \cdot \frac{R_s}{2} \cdot (1+\alpha) = (M-1) \cdot \frac{R_b}{2 \cdot k} + \frac{R_b}{2 \cdot k} \cdot 3 = \frac{R_b}{2 \cdot k} \cdot (M+2)$$

$$B_{2FSK} = \frac{140(\text{M})}{2 \cdot 1} \cdot (2+2) = 280 \text{ MHz}$$

$$B_{4FSK} = \frac{140(\text{M})}{2 \cdot 2} \cdot (4+2) = 210 \text{ MHz}$$

$$B_{8FSK} = \frac{140(\text{M})}{2 \cdot 3} \cdot (8+2) = 233.\hat{3} \text{ MHz}$$

$$B_{16FSK} = \frac{140(\text{M})}{2 \cdot 4} \cdot (16+2) = 315 \text{ MHz}$$

Luego usaremos una modulación lineal.

Calculamos el régimen simbólico que soporta el canal con el Criterio de Nyquist:

$$B_{LIN} = 2 \cdot B_{BB} = 2 \cdot W(1+\alpha) = 2 \frac{R_s}{2} (1+\alpha) = R_s(1+\alpha)$$

$$120(\text{M}) = R_s(1+0,5)$$

$$R_s = 80 \text{ Mbaudios}$$

Comparamos el régimen binario exigido con el régimen simbólico soportado por el canal, despejamos el número de bits por símbolo (k) y hallamos M :

$$R_s(\text{canal}) \geq \frac{R_b(\text{exigido})}{k}$$

$$80(\text{M}) \geq \frac{140(\text{M})}{k}$$

$$k \geq \frac{140}{80} = 1,75$$

Luego k debe ser al menos 2, y $M = 2^k$ debe ser al menos 4.

Comenzamos con el caso límite $M = 4$; tenemos dos modulaciones: 4ASK y QPSK (= 4QAM). Como tenemos problemas de distorsión, descartamos 4ASK, de manera que nuestra elección es QPSK.

Calculamos el régimen simbólico y el ancho de banda que realmente se transmiten:

$$R_s = \frac{R_b}{k} = \frac{140(\text{M})}{2} = 70 \text{ Mbaudios}$$

$$B_{LIN} = R_s(1+\alpha) = 70(\text{M}) \cdot 1,5 = 105 \text{ MHz}$$

Nos sobra un poco de espacio en el canal para bandas de guarda.

Calculamos la potencia recibida (en PSK la PEP es potencia media):

$$p_{RX} = \frac{p_{TX}}{a} = \frac{100}{10^{10}} = 10^{-8} \text{ W}$$

Calculamos la energía por bit recibida:

$$E_b = \frac{p_{RX}}{R_b} = \frac{10^{-8}}{140 \cdot 10^6} \approx 7,143 \cdot 10^{-17} \text{ J}$$

Y sacamos la relación E_b/N_0 (dB):

$$\frac{E_b}{N_0}(\text{dB}) = 10 \log \left[\frac{7,143 \cdot 10^{-17}}{4,507 \cdot 10^{-18}} \right] \approx 12 \text{ dB}$$

En las gráficas (figura 9.55) vemos que con $E_b/N_0 = 12 \text{ dB}$, para QPSK, se obtiene una $P_s = 2 \cdot 10^{-8}$. Con asignación de Gray:

$$BER \approx P_s/2 = 10^{-8}$$

Esto evidentemente cumple con los requisitos.

Si imponemos el valor límite $BER = 10^{-7}$ en QPSK, $P_s \approx 2 \cdot 10^{-7}$, y en la gráfica obtenemos $E_b/N_0 = 11,3 \text{ dB}$, lo que nos da un margen favorable de unos 0,7 dB.

Con los 12 dB de E_b/N_0 que tenemos, la QPSK ofrece $P_s \approx 2 \cdot 10^{-8}$, y estamos trabajando con calidad $BER \approx 10^{-8}$.

Con todo lo dicho, queda claro que QPSK cumple todos los requisitos exigidos.

Respecto al resto de modulaciones, FSK ya quedó descartada, y otras modulaciones lineales no dan suficiente calidad con 12 dB de E_b/N_0 (la más cercana a QPSK es 8QAM, que requeriría rehacer los cálculos de potencia media, y está con $P_s > 10^{-5}$).

En cuanto a distorsión, QPSK es una modulación adecuada, porque la información no se envía en la amplitud (constelación en una circunferencia).

Problema 9.72 (Julio de 2011)

1. Calculamos el ancho de banda de una M-FSK coherente en función de M y k:

$$B = (M - 1) \cdot \Delta f + 2 \cdot \frac{R_s}{2} \cdot (1 + \alpha)$$

$$\Delta f = \frac{1}{2T} = \frac{R_s}{2} = \frac{R_b}{2 \cdot k}$$

$$B = (M - 1) \cdot \frac{R_b}{2 \cdot k} + 3 \cdot \frac{R_b}{2 \cdot k} = (M + 2) \cdot \frac{R_b}{2 \cdot k}$$

Probamos con M = 2, 4, 8, 16 ...

$$B_2 = (2 + 2) \cdot \frac{140(M)}{2 \cdot 1} = 280 \text{ MHz (no sirve)}$$

$$B_4 = (4 + 2) \cdot \frac{140(M)}{2 \cdot 2} = 210 \text{ MHz (sí sirve)}$$

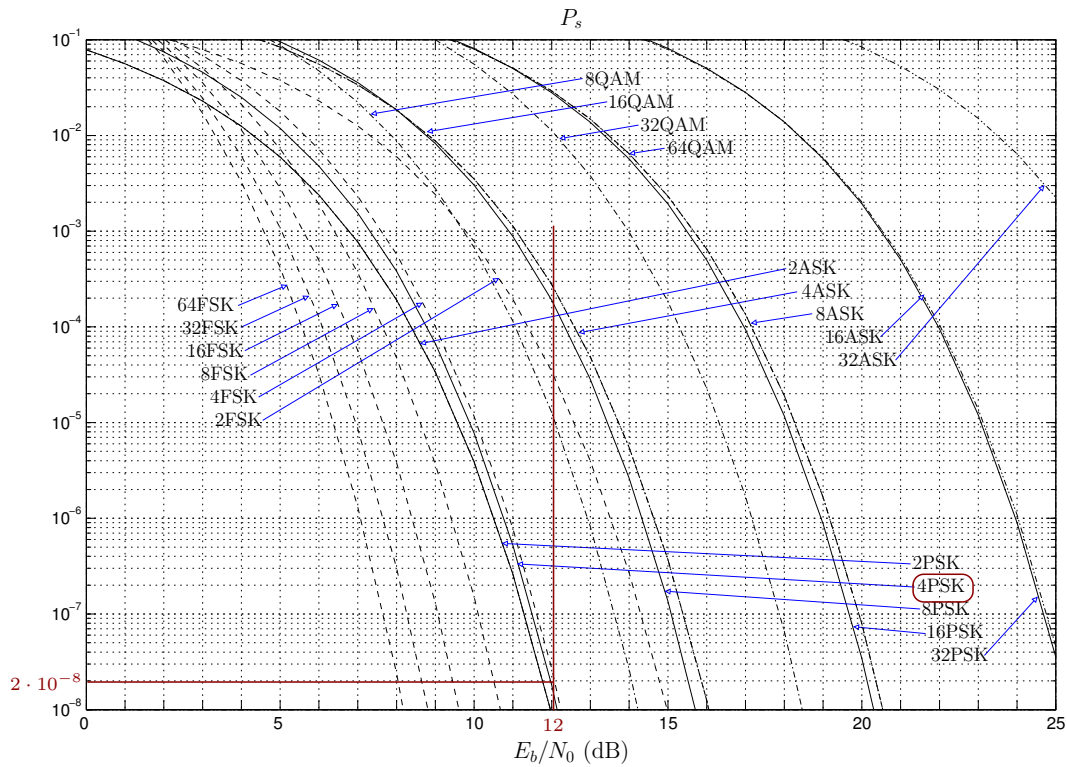


Figura 9.55: Estudio de la calidad.

$$B_8 = (8 + 2) \cdot \frac{140(\text{M})}{2 \cdot 3} = 233.3 \text{ MHz (sí sirve)}$$

$$B_{16} = (16 + 2) \cdot \frac{140(\text{M})}{2 \cdot 4} = 315 \text{ MHz (no sirve)}$$

$$B_{32} = (32 + 2) \cdot \frac{140(\text{M})}{2 \cdot 5} = 476 \text{ MHz (no sirve)}$$

$$B_{64} = (64 + 2) \cdot \frac{140(\text{M})}{2 \cdot 6} = 770 \text{ MHz (no sirve)}$$

Luego, por restricciones de ancho de banda, sólo podemos usar 4-FSK y 8-FSK. Como buscamos la mejor BER posible, nos quedaremos con 8-FSK.

2. Calculamos la relación E_b/N_0 :

$$E_b = p_{RX} \cdot \frac{1}{R_b} = 1,4 \cdot 10^{-9} \cdot \frac{1}{140 \cdot 10^6} = 10^{-17} \text{ J}$$

$$E_b/N_0 = \frac{10^{-17}}{10^{-18}} = 10 \text{ (veces de pot.)} \rightarrow 10 \text{ dB}$$

Para 8-FSK y 10 dB, obtenemos en las gráficas del problema 2: $P_s \approx 1,5 \cdot 10^{-7}$. Por último, calculamos la BER:

$$P_b = \frac{M}{2(M-1)} P_s = \frac{8}{2(8-1)} P_s \approx 8,6 \cdot 10^{-8}$$

(Para 4-FSK sale P_s un poco mayor que $1 \cdot 10^{-5}$, y P_b aproximadamente $6,7 \cdot 10^{-6}$.)

Problema 9.73 (Julio de 2011)**1. Régimen binario:**

$$f_m = 1,2 \cdot 2 \cdot 20(\text{k}) = 48 \text{ kHz}$$

$$N_T = (31 \cdot 2 + 2) 20 = 1280 \text{ bits/trama}$$

$$R_b = N_T \cdot f_m = 61,44 \text{ Mbps}$$

Estudiamos las FSK. Optamos por coherente, pues ocupa menos espectro. Calculamos el ancho de banda y comprobamos si cabe en el canal disponible (30 MHz):

$$B = (M - 1) \Delta f + R_s (1 + \alpha) = (M - 1) \frac{R_b/k}{2} + \frac{R_b}{k} (1,4) = \frac{R_b}{2k} (M + 1,8)$$

$$2\text{FSK: } B = \frac{61,44(\text{M})}{2 \cdot 1} (2 + 1,8) = 116,736 \text{ MHz (no sirve)}$$

$$4\text{FSK: } B = \frac{61,44(\text{M})}{2 \cdot 2} (4 + 1,8) = 89,088 \text{ MHz (no sirve)}$$

$$8\text{FSK: } B = \frac{61,44(\text{M})}{2 \cdot 3} (8 + 1,8) = 100,352 \text{ MHz (no sirve)}$$

Estudiamos las modulaciones lineales. Calculamos el valor necesario de k para poder enviar R_b por B :

$$B = \frac{R_b}{k} (1 + \alpha)$$

$$30(\text{M}) = \frac{61,44(\text{M})}{k} 1,4$$

$$k \geq 2,8672$$

Luego sólo sirven la 16QAM y la 64QAM. Elegimos la 16QAM porque, a igualdad de potencia transmitida, ofrece más calidad.

2. Densidad de ruido:

$$T_e = T_0 (f - 1) = 300 (10^{0,4} - 1) \approx 453,566 \text{ K}$$

$$N_0 = k (T_{in} + T_e) = 1,1784 \cdot 10^{-20} \text{ W/Hz}$$

Imponemos el requisito de calidad, y sacamos la energía entre símbolos contiguos en el receptor:

$$P_s \approx k \cdot P_b = 3 \cdot 5 \cdot 10^{-9} = 1,5 \cdot 10^{-8}$$

$$1,5 \cdot 10^{-8} = 4 \operatorname{erfc}(x)$$

$$3,75 \cdot 10^{-9} = \operatorname{erfc}(x)$$

$$x \approx 4,1683 \text{ (calculado con MATLAB)}$$

$$x = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{E_{dmin}}{N_0}}$$

$$\frac{E_{dmin}}{N_0} = 69,499 \text{ v.p.}$$

$$E_{dmin} = 8,1900 \cdot 10^{-19} \text{ J}$$

Observando la constelación (con ejes normalizados en energía), calculamos la amplitud de pico en el receptor, A , y la llevamos al transmisor:

$$\frac{A}{\sqrt{2}} = \sqrt{E_{dmin}}$$

$$A = 1,2798 \cdot 10^{-9}$$

$$A_{TX} = A \cdot a_t = 1,2798 \cdot 10^{-9} \cdot 10^{116/20} = 8,0753 \cdot 10^{-4}$$

Por último, calculamos la energía de pico en el transmisor, y de ella sacamos la PEP:

$$E_p = A_{TX}^2$$

$$PEP = \frac{E_p}{T} = A_{TX}^2 \frac{R_b}{k} = 13,355 \text{ W} \rightarrow 41,3 \text{ dBm}$$

3. En la figura 9.56 se observa una posible codificación de Gray, y las fronteras de decisión.

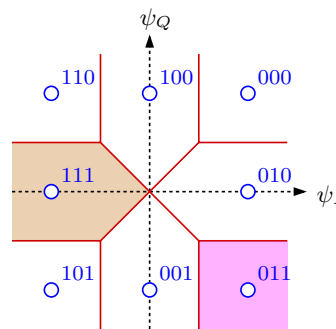


Figura 9.56: Codificación de Gray y fronteras de decisión. Para mayor claridad se han coloreado 2 regiones de decisión.

Problema 9.74 (Julio de 2011)

En la constelación transmitida calculamos la relación entre la potencia media y la de pico:

$$PEP = \frac{A^2}{2R}$$

$$p = \frac{1}{2R} \left[\frac{A^2 + (A/\sqrt{2})^2}{2} \right] = \frac{A^2}{2R} \frac{3}{4}$$

$$p = PEP \frac{3}{4} = 75 \text{ W}$$

Sacamos la potencia recibida y la energía por bit:

$$p_R = \frac{p}{a_t} = 1,8839 \cdot 10^{-9} \text{ W}$$

$$E_b = p_R T_b = \frac{1,8839 \cdot 10^{-9}}{600 \cdot 10^6} = 3,1399 \cdot 10^{-18} \text{ J}$$

Calculamos el ancho de banda:

$$B = R_s (1 + \alpha) = \frac{R_b}{k} (1 + \alpha) = \frac{600(\text{M})}{3} 1,4 = 280 \text{ MHz}$$

Calculamos la densidad espectral de ruido y el ruido:

$$T_e = T_0 (f - 1) = 300 (10^{0,7} - 1) = 1203,56 \text{ K}$$

$$N_0 = k (T_{in} + T_e) = 2,3519 \cdot 10^{-20} \text{ W/Hz}$$

$$n = N_0 B = 6,5853 \cdot 10^{-12} \text{ W}$$

Por último, formamos las relaciones pedidas:

$$\frac{E_b}{N_0} = 133,50 \text{ v.p.} \rightarrow 21,3 \text{ dB}$$

$$\frac{s}{n} = 286,08 \text{ v.p.} \rightarrow 24,6 \text{ dB}$$

Problema 9.75 (Enero de 2012)

1. Régimen binario del MIC-MDT:

$$N_T = 30 \cdot 8 + 2 \cdot 10 = 260 \text{ bits/trama}$$

$$f_m = 1,5 \cdot 2 \cdot 4(\text{k}) = 12 \text{ kHz}$$

$$R_b = N_T \cdot f_m = 3,12 \text{ Mb/s}$$

Ancho de banda ocupado por la señal 16QAM:

$$k = \log_2(16) = 4 \text{ bits/símbolo}$$

$$R_s = \frac{R_b}{k} = 780 \text{ kbaudios}$$

$$B = R_s (1 + \alpha) = 1,014 \text{ MHz}$$

2. Calculamos la energía media por símbolo. Por simetrías, trabajamos sólo con la mitad del primer cuadrante. Hemos asignado subíndices a los 4 símbolos del cuadrante siguiendo el orden: izquierda-derecha, abajo-arriba.

$$A_1^2 = a_0^2 + a_0^2 = 2 a_0^2$$

$$A_2^2 = 9 a_0^2 + a_0^2 = 10 a_0^2$$

$$A_4^2 = 9a_0^2 + 9a_0^2 = 18a_0^2$$

$$A^2 = \frac{A_1^2 + A_4^2 + 2A_2^2}{4} = 10a_0^2$$

$$E_s = p \cdot T_s = \frac{A^2}{2R_s} = 6,41026 \cdot 10^{-6} \cdot a_0^2 \text{ J}$$

3. Resolvemos el primer símbolo. Se recibe la información 1101. En la constelación se observa inmediatamente que el ángulo es:

$$\theta = 3\pi/4$$

La amplitud la sacamos por Pitágoras:

$$A = \sqrt{a_0^2 + a_0^2} = a_0\sqrt{2}$$

Por lo tanto, el primer símbolo es:

$$s(t) = a_0\sqrt{2} \cos(2\pi 10^9 t + 3\pi/4)$$

Las amplitudes PAM en las ramas I y Q son las proyecciones sobre la base (está normalizada en amplitud). En la figura 9.57 se observan los pulsos PAM correspondientes.

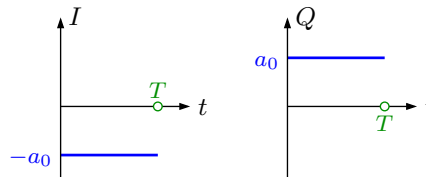


Figura 9.57: Señales PAM en los ejes IQ para el primer símbolo 16QAM (1101).

4. Energía por bit en el receptor:

$$p_T = 4 \text{ W}$$

$$p_R = \frac{p_T}{a_t} = \frac{4}{10^{12,4}} = 1,5924 \cdot 10^{-12} \text{ W}$$

$$E_b = p_R T_b = 5,1039 \cdot 10^{-19} \text{ J}$$

Densidad espectral de ruido:

$$T_{in} = 300 \text{ K}$$

$$T_{e1} = 300 (10^{0,15} - 1) \approx 123,8 \text{ K}$$

$$T_{e2} = 300 (10^{0,8} - 1) \approx 1592,9 \text{ K}$$

$$T_{e3} = 300 (2 - 1) = 300 \text{ K}$$

$$T_{e4} = 300 (10^{0,2} - 1) \approx 175,5 \text{ K}$$

$$T_e = 123,8 + 1592,9 \cdot 10^{0,15} + 300 \frac{10^{0,15}}{100} + 175,5 \frac{10^{0,15}}{100} = 2380,5 \text{ K}$$

Como se esperaba: $T_e \approx 123,8 + 1592,9 \cdot 10^{0,15}$

$$N_0 = k (T_{in} + T_e) = 3,7007 \cdot 10^{-20} \text{ W/Hz}$$

Relación E_b/N_0 :

$$\frac{E_b}{N_0} = 13,79 \text{ v.p.} \rightarrow 11,4 \text{ dB}$$

De la gráfica sacamos P_s y pasamos a P_b :

$$P_s \approx 6,7 \cdot 10^{-4}$$

$$P_b \approx \frac{P_s}{k} = 1,7 \cdot 10^{-4}$$

5. Si la potencia transmitida sube 8 dB, la relación E_b/N_0 crece la misma cantidad. Puesto que el nuevo valor se sale de la gráfica, lo único que podemos hacer es tomar el valor límite leído como cota:

$$P_s \ll 10^{-8}$$

Que es una calidad excelente.

Problema 9.76 (Junio de 2012)

Relación entre la energía media por símbolo y la energía de pico en una 32QAM (ver figura 9.58):

$$E_1 = \left(\frac{d}{2}\right)^2 + \left(\frac{d}{2}\right)^2 = 0,5 d^2$$

$$E_2 = \left(\frac{3d}{2}\right)^2 + \left(\frac{d}{2}\right)^2 = 2,5 d^2$$

$$E_3 = \left(\frac{5d}{2}\right)^2 + \left(\frac{d}{2}\right)^2 = 6,5 d^2$$

$$E_4 = \left(\frac{3d}{2}\right)^2 + \left(\frac{3d}{2}\right)^2 = 4,5 d^2$$

$$E_5 = \left(\frac{5d}{2}\right)^2 + \left(\frac{3d}{2}\right)^2 = 8,5 d^2$$

$$E_s = \frac{E_1 + E_4 + 2 E_2 + 2 E_3 + 2 E_5}{8} = 5 d^2$$

$$E_p = E_5 = 8,5 d^2$$

$$\frac{E_p}{E_s} = \frac{8,5}{5}$$

Energía de bit recibida:

$$\frac{PEP}{p_T} = \frac{E_p}{E_s} = \frac{8,5}{5}$$

$$p_T = \frac{5}{8,5} 100 \text{ W}$$

$$p_R = \frac{p_T}{a_t} = 7,4054 \cdot 10^{-10} \text{ W}$$

$$E_b = p_R / R_b = 1,2342 \cdot 10^{-18} \text{ J}$$

Densidad de ruido:

$$T_e = T_0 (f - 1) \approx 1200 \text{ K}$$

$$N_0 = k (T_{in} + T_e) = 2,34702 \cdot 10^{-20} \text{ W/Hz}$$

Relación E_b/N_0 :

$$\frac{E_b}{N_0} = 52,586 \text{ v.p.} \rightarrow 17,2 \text{ dB}$$

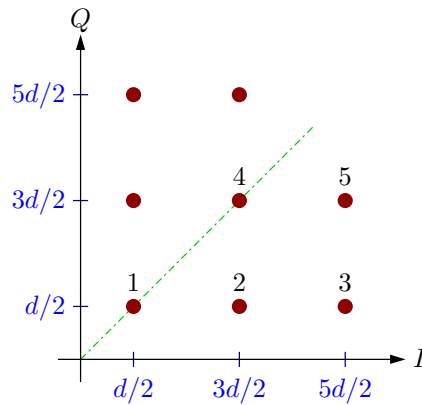


Figura 9.58: Primer cuadrante de la constelación 32QAM sobre ejes ortonormales.

Problema 9.77 (Junio de 2012)

1. Energía media del símbolo 1010 en transmisión:

$$E_{1010}(TX) = \left(\frac{3d}{2}\right)^2 + \left(\frac{3d}{2}\right)^2 = \frac{9d^2}{2} = 1,8 \cdot 10^{-5} \text{ J}$$

2. Energía media por símbolo:

$$E_{1010} = \frac{9d^2}{2}$$

$$E_{1111} = \left(\frac{d}{2}\right)^2 + \left(\frac{d}{2}\right)^2 = \frac{d^2}{2}$$

$$E_{1110} = \left(\frac{d}{2}\right)^2 + \left(\frac{3d}{2}\right)^2 = \frac{5d^2}{2}$$

$$E_s = \frac{E_{1010} + E_{1111} + 2 E_{1110}}{4} = \frac{5d^2}{2}$$

$$E_s(TX) = 10^{-5} \text{ J}$$

Potencia media transmitida:

$$p_{TX} = E_s(TX) \cdot R_s = 20 \text{ W}$$

3. Símbolo transmitido 1010:

$$\sqrt{2/T} = \sqrt{2 R_s} = 2000$$

$$\psi_1 = 2000 \cos(2\pi 10^9 t)$$

$$\psi_2 = -2000 \sin(2\pi 10^9 t)$$

$$s_{1010}(t) = \frac{3d}{2} \psi_1 + \frac{3d}{2} \psi_2$$

$$3d/2 = 3 \cdot 10^{-3}$$

$$s_{1010}(t) = 6 \psi_1 - 6 \psi_2$$

También se puede poner en polares:

$$s_{1010}(t) = 6\sqrt{2} \cos(2\pi 10^9 t + \pi/4)$$

4. Símbolo recibido 1010:

$$a_t = 10^{80/20} = 10^4 \text{ v.s.}$$

$$s_{1010}(t) = 6 \cdot 10^{-4} \psi_1 - 6 \cdot 10^{-4} \psi_2$$

$$s_{1010}(t) = 6\sqrt{2} \cdot 10^{-4} \cos(2\pi 10^9 t + \pi/4)$$

5. Es una codificación de Gray, pues los símbolos contiguos sólo tienen una variación de 1 bit. Se puede observar que los 2 bits de mayor peso son constantes en cada fila, mientras que los 2 de menor peso no cambian en cada columna. Dentro de cada fila y dentro de cada columna los 2 bits restantes, que sí varían, siguen una codificación de Gray. El conjunto de 4 bits es Gray ya que, tanto en vertical como en horizontal sólo se cambia un bit al pasar al símbolo contiguo.

6. Calculamos E_b/N_0 :

$$a_t = 10^{80/10} = 10^8 \text{ v.p.}$$

$$E_s(RX) = \frac{E_s(TX)}{a_t} = 10^{-13} \text{ J}$$

$$E_b = E_s/k = 2,5 \cdot 10^{-14} \text{ J}$$

$$E_b/N_0 = 25 \text{ v.p.} \rightarrow 14 \text{ dB}$$

Calculamos las probabilidades de error:

$$\text{De la gráfica: } P_s \approx 5 \cdot 10^{-6}$$

$$P_b \approx P_s/k = 1,25 \cdot 10^{-6}$$

7. Proyectamos la señal recibida sobre una base $\{\phi_1 = \cos(\omega_c t), \phi_2 = -\sin(\omega_c t)\}$. La proyección horizontal se obtiene multiplicando por $\cos(2\pi/3)$, la vertical multiplicando por $\sin(2\pi/3)$:

$$s_r(t) = 1,8 \cdot 10^{-4} \cos(\omega_c t + 2\pi/3) = -9 \cdot 10^{-5} \phi_1 + 1,56 \cdot 10^{-4} \phi_2$$

Ahora pasamos a nuestra base ortonormal:

$$s_r = -4,5 \cdot 10^{-8} \psi_1 + 7,8 \cdot 10^{-8} \psi_2$$

En la figura 9.59, dibujamos s_r sobre la constelación recibida, con $d = 2 \cdot 10^{-7}$:

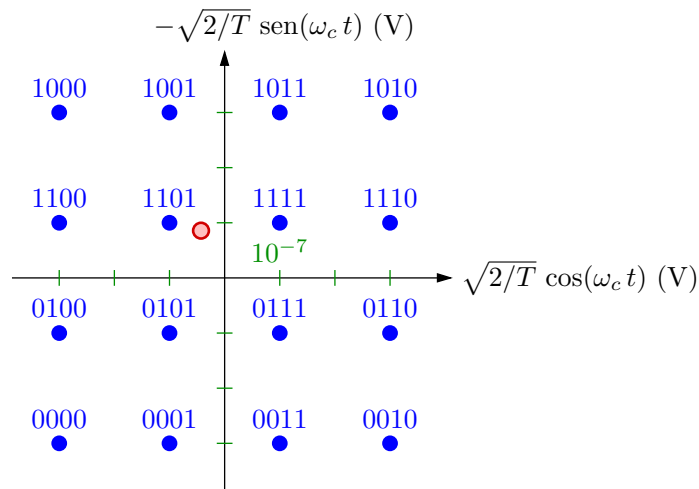


Figura 9.59: Constelación recibida, con la señal ruidosa s_r en rojo.

Y resulta obvio que la decisión será 1101.

Problema 9.78 (Julio de 2012)

1. Régimen binario que entrega la parte MIC:

$$N_c = 37 \cdot 2 + 2 = 76 \text{ canales}$$

$$N_T = N_c \cdot n = 76 \cdot 18 = 1368 \text{ bits/trama}$$

$$f_m = 1,25 \cdot 2 \cdot W = 50 \text{ kHz}$$

$$R_b = N_T \cdot f_m = 68,4 \text{ Mbps}$$

Régimen simbólico y ancho de banda ocupado:

$$k = \log_2(16) = 4 \text{ bits/símbolo}$$

$$R_s = R_b/k = 17,1 \text{ Mbaudios}$$

$$B = R_s (1 + \alpha) = 21,375 \text{ MHz}$$

2. De la calidad BER sacamos P_s ; y de P_s obtenemos el argumento de la $erfc$:

$$P_s \approx k \cdot P_b = 4 \cdot 10^{-8}$$

$$P_s = 1 - (1 - p)^2 \approx 2p \rightarrow p \approx 2 \cdot 10^{-8}$$

$$2 \cdot 10^{-8} = \frac{4 - 1}{4} \operatorname{erfc}(x)$$

$$\operatorname{erfc}(x) = 2.6 \cdot 10^{-8}$$

$$x \approx 3,9329 \quad (\text{valor obtenido con MATLAB})$$

Calculamos el ruido y despejamos la energía por bit:

$$T_e = T_0 (f - 1) = 300 (4 - 1) = 900 \text{ K}$$

$$N_0 = k (T_{in} + T_e) = 1,3806 \cdot 10^{-23} (400 + 900) = 1,79478 \cdot 10^{-20} \text{ W/Hz}$$

$$x = \sqrt{\frac{3 \cdot 4}{2 \cdot 15} \frac{E_b}{N_0}} = 3,9329$$

$$\frac{E_b}{N_0} = 38,670 \text{ v.p.}$$

$$E_b = 6,9404 \cdot 10^{-19} \text{ J}$$

Movemos la energía de bit al transmisor y la convertimos en potencia media. Por último, pasamos a PEP:

$$E_b(TX) = E_b \cdot a_t = 6,9404 \cdot 10^{-19} \cdot 10^{11,9} = 5,5130 \cdot 10^{-7} \text{ J}$$

$$p = E_b(TX) \cdot R_b = 37,709 \text{ W}$$

$$PEP = \frac{9}{5} p = 67,876 \text{ W} \rightarrow 48,3 \text{ dBm}$$

3. En la figura 9.60 se observa una posible solución.

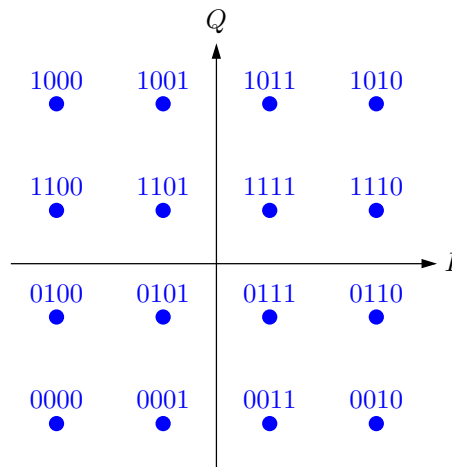


Figura 9.60: Codificación de Gray sobre la constelación 16QAM.

Problema 9.79 (Enero de 2013)

1. La constelación se encuentra normalizada en energía. El símbolo 1101 tiene una expresión analítica:

$$s_{1101}(t) = \sqrt{\frac{2 E_1}{T}} \cos(\omega_c t + \theta_{1101})$$

E_1 es la energía correspondiente a los símbolos contenidos en el radio menor:

$$\sqrt{E_1} = 2 \cdot 10^{-5}$$

T es el tiempo de símbolo:

$$k = \log_2(16) = 4 \text{ bits/símbolo}$$

$$R_s = \frac{R_b}{4}$$

$$T = \frac{4}{2 \cdot 10^6} = 2 \text{ } \mu\text{s}$$

Es inmediato comprobar que el ángulo es:

$$\theta_{1101} = 315^\circ = \frac{7\pi}{4} \text{ rad}$$

Luego en emisión (en voltios para t en segundos):

$$s_{1101}(t) = \sqrt{\frac{2}{2 \cdot 10^{-6}}} \cdot 2 \cdot 10^{-5} \cdot \cos\left(2\pi 10^9 t + \frac{7\pi}{4}\right)$$

2. Energías en transmisión:

$$\sqrt{E_1} = 2 \cdot 10^{-5} \rightarrow E_{1 \text{ TX}} = 0,4 \cdot 10^{-9} \text{ J}$$

$$\sqrt{E_2} = 5,5 \cdot 10^{-5} \rightarrow E_{2 \text{ TX}} = 3,025 \cdot 10^{-9} \text{ J}$$

Pasamos a recepción, atenuando $A = 20 \text{ dB}$ ($a = 100$ veces de potencia):

$$E_{1 \text{ RX}} = \frac{E_{1 \text{ TX}}}{a} = 4 \cdot 10^{-12} \text{ J}$$

$$E_{2 \text{ RX}} = \frac{E_{2 \text{ TX}}}{a} = 30,25 \cdot 10^{-12} \text{ J}$$

Y promediamos las energías:

$$E_{\text{RX}} = \frac{4 E_{1 \text{ RX}} + 12 E_{2 \text{ RX}}}{16} = 23,68 \cdot 10^{-12} \text{ J}$$

3. Hay 2000 ciclos de portadora por símbolo.

Problema 9.80 (Abril de 2013)

1. Régimen simbólico:

$$k = \log_2(16) = 4 \text{ bits/símbolo}$$

$$R_s = R_b/k = 100 \text{ Mbaudios}$$

Potencia de pico recibida:

$$PEP(RX) = \frac{PEP}{a_t} = \frac{80}{10^{11,2}} = 5,0477 \cdot 10^{-10} \text{ W}$$

Energía de pico (de cualquiera de los símbolos en la circunferencia de radio R):

$$E_p = PEP(RX) \frac{1}{R_s} = 5,0477 \cdot 10^{-18} \text{ J}$$

Relación entre la energía de pico, E_p , y la energía media, E_s . Suponemos ejes normalizados en energía:

$$E_p = R^2$$

$$E_1 = (R/2)^2 = R^2/4$$

$$E_2 = R^2$$

$$E_s = \frac{8 E_1 + 8 E_2}{16} = \frac{5}{8} R^2$$

$$E_s = \frac{5}{8} E_p$$

Calculamos la energía media por símbolo, y la energía por bit:

$$E_s = \frac{5}{8} E_p = 3,1548 \cdot 10^{-18} \text{ J}$$

$$E_b = E_s/k = 7,8870 \cdot 10^{-19} \text{ J}$$

Calculamos la densidad espectral de ruido:

$$T_e = T_0 (f - 1) = 300 (10^{0,7} - 1) = 1203,6 \text{ K}$$

$$N_0 = k (T_{in} + T_e) = 2,0758 \cdot 10^{-20} \text{ W/Hz}$$

Y la relación pedida es:

$$\frac{E_b}{N_0} = 37,995 \text{ v.p.} \rightarrow 15,8 \text{ dB}$$

2. En la figura 9.61 se aprecian las fronteras de decisión. No son las óptimas para la constelación, pero se aproximan bastante, y el detector será más sencillo de implementar.

Se puede desarrollar una codificación de Gray por separado en cada 8PSK. No es posible hacerlo para la 16APK en conjunto, aunque sí para los símbolos contiguos de menor distancia.

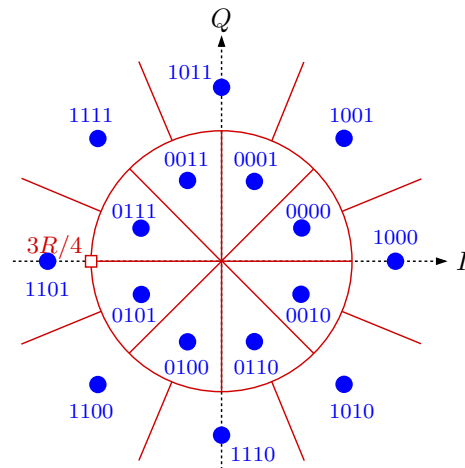


Figura 9.61: Constelación 16APK.

Problema 9.81 (Abril de 2013)

1. Régimen binario:

$$f_m = 1,25 \cdot f_{Nyq} = 1,25 \cdot 2 \cdot 20(\text{k}) = 50 \text{ kHz}$$

$$N_T = (32 \cdot 2 + 2) 14 = 924 \text{ bits/trama}$$

$$R_b = N_T f_m = 46,2 \text{ Mbps}$$

Ancho de banda:

$$k = \log_2(16) = 4 \text{ bits/símbolo}$$

$$R_s = R_b/k = 11,55 \text{ Mbaudios}$$

$$B = R_s (1 + \alpha) = 17,325 \text{ MHz}$$

2. A partir de la BER calculamos la energía entre símbolos contiguos, E_d :

$$T_e = 300 (4 - 1) = 900 \text{ K}$$

$$N_0 = k (T_{in} + T_e) = 1,760265 \cdot 10^{-20} \text{ W/Hz}$$

$$P_s \approx k P_b = 1,6 \cdot 10^{-7}$$

$$1,6 \cdot 10^{-7} = \frac{16 - 1}{2} \operatorname{erfc}\left(\frac{\sqrt{E_d}}{2\sqrt{N_0}}\right)$$

$$\operatorname{erfc}\left(\frac{\sqrt{E_d}}{2\sqrt{N_0}}\right) = 2,13 \cdot 10^{-8}$$

$$\frac{\sqrt{E_d}}{2\sqrt{N_0}} \approx 3,96 \quad (\text{con MATLAB } 3,960382)$$

$$E_d = 1,1044 \cdot 10^{-18} \text{ J}$$

Relacionamos la energía entre símbolos contiguos, E_d , con la energía de pico, E_p . Suponemos ejes normalizados en energía:

$$\sin(\pi/8) = \frac{d/2}{R/2} = \frac{d}{R}$$

$$E_p = R^2$$

$$E_d = d^2 = R^2 \sin^2(\pi/8) = E_p \sin^2(\pi/8)$$

Calculamos la energía de pico en recepción y en transmisión. A partir de ella sacamos la PEP:

$$E_p(RX) = \frac{E_d}{\sin^2(\pi/8)} = 7,5413 \cdot 10^{-18} \text{ J}$$

$$E_p(TX) = E_p(RX) \cdot a_t = 3,0023 \cdot 10^{-6} \text{ J}$$

$$E_p(TX) = PEP \cdot T_s$$

$$PEP = E_p(TX) \cdot R_s = 34,7 \text{ W} \rightarrow 45,4 \text{ dBm}$$

Problema 9.82 (Junio de 2013)

1. En el diagrama de ojos tanto en I como en Q tenemos 2 niveles. Por lo tanto, la modulación es 4-QAM (o QPSK). Evidentemente, hay 4 símbolos.
2. Como $M = 4 = 2^2$, hay $k = 2$ bits por símbolo. El régimen simbólico se mide en cualquiera de los dos diagramas de ojos: entre instantes consecutivos de muestreo hay $T_s = 50 \text{ ns}$.

$$R_s = \frac{1}{T_s} = \frac{1}{50 \cdot 10^{-9}} = 20 \text{ Mbaudios}$$

$$R_b = k \cdot R_s = 2 \cdot 20 \cdot 10^6 = 40 \text{ Mbps}$$

3. Ancho de banda de la modulación lineal:

$$W = \frac{1}{2T_s} = \frac{R_s}{2}$$

$$B_{BB} = W(1 + \alpha)$$

$$B_{QAM} = 2 \cdot B_{BB} = R_s(1 + \alpha) = 20 \cdot 10^6(1 + 0,2) = 24 \text{ MHz}$$

4. A partir de la potencia media transmitida, calculamos la energía media por símbolo a la salida del transmisor (punto A):

$$E_A = p_{TX} \cdot T_s = \frac{540 \cdot 10^{-3}}{20 \cdot 10^{-6}} = 27 \cdot 10^{-9} \text{ J}$$

Llevamos la energía al receptor, pasando por el medio:

$$E_B = \frac{E_A}{a} = \frac{27 \cdot 10^{-9}}{10^6} = 27 \cdot 10^{-15} \text{ J}$$

En 4-QAM la energía media, E_s , es la energía de cualquier símbolo, E_B . Relacionamos la energía media por símbolo en el receptor, con la distancia entre símbolos contiguos (d):

$$E_s = (d/2)^2 + (d/2)^2 = d^2/2$$

$$d = \sqrt{2E_s} \approx 23,24 \cdot 10^{-8}$$

$$d/2 \approx 11,62 \cdot 10^{-8}$$

Los ejes son:

$$I = \sqrt{\frac{2R}{T_s}} \cos(\omega_c t)$$

$$Q = -\sqrt{\frac{2R}{T_s}} \sin(\omega_c t)$$

$$\sqrt{\frac{2R}{T_s}} = \sqrt{2 \cdot R \cdot R_s} \approx 44,72 \cdot 10^3$$

$$\omega_c = 2\pi \cdot 2,4 \cdot 10^9$$

Coordenadas y ejemplo de asignación (s_a a 45° , s_b a 135° , s_c a 225° , y s_d a 315°):

$$s_a = (+d/2, +d/2) \rightarrow 00$$

$$s_b = (-d/2, +d/2) \rightarrow 01$$

$$s_c = (-d/2, -d/2) \rightarrow 11$$

$$s_d = (+d/2, -d/2) \rightarrow 10$$

5. De forma general, hay que proyectar la señal recibida (s) sobre las portadoras recuperadas (ψ_1 y ψ_2), mediante el producto escalar. Es decir:

$$D_I = \langle s(t), \psi_1(t) \rangle / R$$

$$D_Q = \langle s(t), \psi_2(t) \rangle / R$$

Pero en este caso basta con ver en qué cuadrante está el ángulo: Para s_1 tenemos $\pi/6$ y estamos en el primer cuadrante, luego se decide s_a . Para s_2 , con $5\pi/8$, pasamos al segundo cuadrante, s_b .

6. Como k es par, tenemos una fórmula cerrada. Calculamos el parámetro intermedio p :

$$p = \left(\frac{\sqrt{M} - 1}{\sqrt{M}} \right) \operatorname{erfc} \left[\sqrt{\frac{3 \log_2(M)}{2(M-1)}} \frac{E_b}{N_0} \right]$$

$$p = \left(\frac{\sqrt{4} - 1}{\sqrt{4}} \right) \operatorname{erfc} \left[\sqrt{\frac{3 \cdot 2}{2(4-1)}} \frac{E_s}{k \cdot N_0} \right]$$

$$p = \left(\frac{1}{2} \right) \operatorname{erfc} \left[\sqrt{\frac{27 \cdot 10^{-15}}{2 \cdot 7,8 \cdot 10^{-16}}} \right]$$

$$p \approx \left(\frac{1}{2}\right) \operatorname{erfc}[4,16]$$

$$p \approx \left(\frac{1}{2}\right) 4 \cdot 10^{-9}$$

$$p \approx 2 \cdot 10^{-9}$$

Ahora calculamos la P_s :

$$P_s = 1 - (1 - p)^2 \approx 2 \cdot p = 4 \cdot 10^{-9}$$

Como la asignación es de Gray, la BER queda:

$$BER = P_b = \frac{P_s}{k} = \frac{4 \cdot 10^{-9}}{2} = 2 \cdot 10^{-9}$$

Luego no se cumple el objetivo de calidad (por poco).

Problema 9.83 (Junio de 2013)

1. Empezamos con el enlace ascendente. Pérdidas:

$$L_{ea} = 92,442 + 20 \log(30) + 20 \log(36500) - 50 - 40 = 123,23 \text{ dB}$$

Potencia recibida a la entrada del demodulador:

$$P_{RXsD} = P_{TXNodo} - L_{ea} + G_{a1s} - L_{f1s} + G_{m1s}$$

$$P_{RXsD} = 21,76(\text{dBW}) - 123,23 + 30 - 3 - 6 = -80,47 \text{ dBW}$$

Régimen binario:

$$R_{bNodo} = N_{ET} \cdot R_{bi} = 68 \cdot 512(\text{k}) = 34,816 \text{ Mbps}$$

Energía:

$$E_{bsD} = p_{RXsD} / R_{bNodo} = 2,578 \cdot 10^{-16} \text{ J}$$

$$E_{bsD} = -80,47 - 10 \log(34,816 \cdot 10^6) = -155,89 \text{ dBJ}$$

Enlace descendente. Pérdidas:

$$L_{ed} = 92,442 + 20 \log(20) + 20 \log(36500) - 40 - 40 = 129,71 \text{ dB}$$

Potencia recibida a la entrada del demodulador:

$$P_{RXETD} = 0(\text{dBW}) - 129,71 + 30 - 3 - 10 = -112,71 \text{ dBW}$$

Régimen binario:

$$R_{bET} = R_{bi} = 512 \text{ kbps}$$

Energía:

$$E_{bETD} = 1,046 \cdot 10^{-17} \text{ J}$$

$$E_{bETD} = -112,71 - 10 \log(512 \cdot 10^3) = -169,80 \text{ dBJ}$$

2. Enlace ascendente. Temperatura de cada elemento:

$$T_{1s} = 300 \text{ K}$$

$$T_{ea1s} = 300 (10^{0,8} - 1) = 1592,9 \text{ K}$$

$$T_{ef1s} = 100 (2 - 1) = 100 \text{ K}$$

$$T_{em1s} = 300 (32 - 1) = 9300 \text{ K}$$

Temperatura total a la entrada del RX:

$$T_{TRX} = 300 + 1592,9 + \frac{100}{1000} + \frac{9300 \cdot 2}{1000} = 1911,6 \text{ K}$$

Temperatura total a la entrada del demodulador del satélite:

$$T_{TD} = 1911,6 \frac{1000}{2 \cdot 4} = 238950 \text{ K}$$

Densidad espectral unilateral total a la entrada del demodulador:

$$N_{0s} = k \cdot T_{TD} = 3,299 \cdot 10^{-18} \text{ W/Hz} \rightarrow -174,82 \text{ dBW/Hz}$$

Enlace descendente. Temperatura de cada elemento:

$$T_{ET} = 150 \text{ K}$$

$$T_{eaET} = 300 (10^{0,8} - 1) = 1592,9 \text{ K}$$

$$T_{efET} = 70 (2 - 1) = 70 \text{ K}$$

$$T_{emET} = 300 (10 - 1) = 2700 \text{ K}$$

Temperatura total a la entrada del RX:

$$T_{TET} = 150 + 1592,9 + \frac{70}{1000} + \frac{2700 \cdot 2}{1000} = 1748,4 \text{ K}$$

Temperatura total a la entrada del demodulador de la estación terrena:

$$T_{TD} = 1748,4 \frac{1000}{2 \cdot 10} = 87420 \text{ K}$$

Densidad espectral unilateral total a la entrada del demodulador:

$$N_{0ET} = k \cdot T_{TD} = 1,207 \cdot 10^{-18} \text{ W/Hz} \rightarrow -179,18 \text{ dBW/Hz}$$

3. Relaciones E_b/N_0 para los enlaces ascendente (ea) y descendente (ed):

$$(E_b/N_0)_{ea} = -155,89 + 174,82 = 18,9 \text{ dB}$$

$$(E_b/N_0)_{ed} = -169,80 + 179,18 = 9,4 \text{ dB}$$

En ambos enlaces necesitamos $P_b > 10^{-4}$. Para las 5 modulaciones candidatas calculamos la P_s necesaria en el cuadro 9.1:

Ahora podemos trabajar de 2 formas:

modulación	k	EA	ED
BPSK	1	10^{-4}	10^{-4}
QPSK	2	$2 \cdot 10^{-4}$	$2 \cdot 10^{-4}$
8PSK	3	$3 \cdot 10^{-4}$	$3 \cdot 10^{-4}$
16PSK	4	$4 \cdot 10^{-4}$	$4 \cdot 10^{-4}$
32PSK	5	$5 \cdot 10^{-4}$	$5 \cdot 10^{-4}$
$E_b/N_0(\text{dB})$		18,9	9,4

Cuadro 9.1: Probabilidad de símbolo necesaria (P_s) en cada modulación, para los enlaces ascendente (EA) y descendente (ED).

a) Llevamos a la gráfica de calidad la P_s de la modulación bajo estudio, y comprobamos si la E_b/N_0 es menor o igual que el valor límite. Por ejemplo, para 16PSK en el EA: $P_s = 4 \cdot 10^{-4}$, que en la curva de la modulación da una $E_b/N_0 < 18,9$ dB. Es fácil comprobar que la 32PSK en el EA no cumple.

b) Llevamos a la gráfica de calidad la E_b/N_0 del sistema, y comprobamos si la P_s cumple con el requisito. Por ejemplo, para 8PSK y el ED: $E_b/N_0 = 9,4$ dB, que en la curva de la modulación da una calidad claramente peor que $3 \cdot 10^{-4}$. Es fácil comprobar que la QPSK en el ED sí cumple.

Trabajando así con las 5 modulaciones se llega al cuadro 9.2, donde se ha incluido si la modulación cumple o no con el requisito de calidad. La modulación que cumple con mayor M se ha enmarcado.

modulación	k	EA	ED
BPSK	1	10^{-4} SÍ	10^{-4} SÍ
QPSK	2	$2 \cdot 10^{-4}$ SÍ	$2 \cdot 10^{-4}$ (SÍ)
8PSK	3	$3 \cdot 10^{-4}$ SÍ	$3 \cdot 10^{-4}$ NO
16PSK	4	$4 \cdot 10^{-4}$ (SÍ)	$4 \cdot 10^{-4}$ NO
32PSK	5	$5 \cdot 10^{-4}$ NO	$5 \cdot 10^{-4}$ NO
$E_b/N_0(\text{dB})$		18,9	9,4

Cuadro 9.2: Resultados del estudio respecto al requisito de calidad. **SÍ** = cumple; **NO** = no cumple.

Por lo tanto, seleccionamos 16PSK para el enlace ascendente y QPSK para el descendente.

4. Enlace ascendente. Se dispone de:

$$B = 27 \text{ MHz}$$

Y el ancho de banda ocupado es (16PSK):

$$R_b = 34,816 \text{ Mbps}$$

$$R_s = R_b/k = 34,816(\text{M})/4 = 8,704 \text{ Mbaudios}$$

$$B = R_s (1 + \alpha) = 13,056 \text{ MHz}$$

Luego no hay ningún problema.

Enlace descendente. Se dispone de:

$$B = 27(\text{M})/68 \approx 397,06 \text{ kHz}$$

Y el ancho de banda ocupado es (QPSK):

$$R_b = 512 \text{ kHz}$$

$$R_s = R_b/k = 512(\text{k})/2 = 256 \text{ kbaudios}$$

$$B = R_s (1 + \alpha) = 384 \text{ kHz}$$

Tampoco hay ningún problema.

Problema 9.84 (Julio de 2013)

1. Régimen binario del MIC:

$$N_T = 22 \cdot 12 + 2 \cdot 8 = 280 \text{ bits/trama}$$

$$f_m = f_{Nyq} = 2W = 8 \text{ kHz}$$

$$R_b = N_T \cdot f_m = 2240 \text{ kbps}$$

2. Gracias a la ganancia de compansión, se pueden ahorrar bits:

$$G_c \approx 24 \text{ dB} \rightarrow \text{que equivale a 4 bits menos}$$

El nuevo régimen binario es:

$$R_b = (22 \cdot 8 + 2 \cdot 8) 8(\text{k}) = 1536 \text{ kbps}$$

3. Calculamos el régimen simbólico máximo usando el Criterio de Nyquist y el ancho de banda de un coseno alzado:

$$B = R_s(1 + \alpha)$$

$$1228,8(\text{k}) = R_s \cdot 1,2 \rightarrow R_s = 1024 \text{ kbaudios}$$

Comparamos el régimen binario que hay que transmitir con el régimen simbólico que cabe por el canal:

$$k = \log_2(M) \geq \frac{R_b}{R_s} 1,5 \rightarrow k = 2 \text{ bits/símbolo} \rightarrow M = 4 \text{ símbolos}$$

De manera que optamos por una QPSK. Y el régimen simbólico que realmente se transmite es (no se ocupa todo el canal):

$$R_s = \frac{R_b}{k} = 768 \text{ kbaudios}$$

4. Como no se ha realizado aún ningún filtrado, salen ojos ideales (cuadrados). Por ser QPSK, aparecen 2 niveles, con valores $+A$ y $-A$ en voltios. El margen contra el ruido es $A(V)$ (100 %), y el margen contra errores en el muestreo es $T_s/2(s)$ (100 %).
5. Es una constelación QPSK. Las fronteras de decisión son los ejes I y Q .
6. Supongamos que las coordenadas de los símbolos, en los ejes I - Q ortonormales, son:

$$s_1 = (c, c) \quad \text{símbolo del primer cuadrante}$$

$$s_2 = (-c, c) \quad \text{símbolo del segundo cuadrante}$$

$$s_3 = (-c, -c) \quad \text{símbolo del tercer cuadrante}$$

$$s_4 = (c, -c) \quad \text{símbolo del cuarto cuadrante}$$

La energía media por símbolo coincide con la energía de cualquier símbolo. Gracias a la normalización de energía:

$$E_s = c^2 + c^2 = 2c^2$$

Eficiencia espectral:

$$\frac{R_b}{B} = \frac{k \cdot R_s}{R_s(1 + \alpha)} = 1,6 \text{ bps/Hz}$$

7. El diagrama de bloques del demodulador se puede encontrar en las transparencias de la asignatura.
8. Calculamos la relación E_b/N_0 trabajando con unidades logarítmicas:

$$\frac{E_b}{N_0} = \frac{E_s/k}{N_0} = \frac{\frac{1}{k} p_{RX} \frac{1}{R_s}}{N_0} = \frac{p_{RX}/R_b}{N_0}$$

$$E_b/N_0 = (-70 - 30) - (-171,86) - 10 \log(1536 \cdot 10^3) \approx 10 \text{ dB}$$

Con $E_b/N_0 = 10 \text{ dB}$, en la curva de la QPSK obtenemos:

$$P_s \approx 8 \cdot 10^{-6}$$

$$P_b \approx \frac{P_s}{k} = 4 \cdot 10^{-6}$$

9. Forzamos una eficiencia de al menos 4 bps/Hz:

$$4 \leq \frac{k}{1 + \alpha} = \frac{k}{1,2}$$

$$k \geq 4,8 \rightarrow k = 5 \text{ bits/símbolo}$$

Luego es necesario pasar a una 32PSK. Manteniendo P_b la nueva P_s es:

$$P_s = k \cdot P_b = 5 \cdot 4 \cdot 10^{-6} = 2 \cdot 10^{-5}$$

En la curva de la 32PSK, la P_s nos da:

$$E_b/N_0 \approx 22,8 \text{ dB}$$

Lo que supone un incremento en E_b/N_0 de:

$$\Delta(E_b/N_0) = 22,8 - 10 = 12,8 \text{ dB}$$

Como el resto de los parámetros en juego no han cambiado, la variación de E_b/N_0 se refleja directamente en la potencia recibida. Por lo tanto:

$$P_{RX} = -70 + 12,8 = -57,2 \text{ dBm}$$

Parte IV

APÉNDICES



Usted es libre de:

Compartir — copiar y redistribuir el material en cualquier medio o formato

Adaptar — remezclar, transformar y crear a partir del material

El licenciador no puede revocar estas libertades mientras cumpla con los términos de la licencia.

Bajo las condiciones siguientes:



Reconocimiento — You must give appropriate credit, provide a link to the license, and indicate if changes were made. You may do so in any reasonable manner, but not in any way that suggests the licensor endorses you or your use.



NoComercial — No puede utilizar el material para una finalidad comercial.

No hay restricciones adicionales — No puede aplicar términos legales o medidas tecnológicas que legalmente restrinjan realizar aquello que la licencia permite.

Apéndice A

CONSTANTES, GLOSARIO Y SÍMBOLOS

A.1. Constantes

Se adjuntan las constantes físicas y de ingeniería empleadas en este libro. En el cuadro A.1 aparecen valores aproximados adecuados para la asignatura; el lector interesado encontrará información más detallada en las observaciones del siguiente párrafo.

Constante	Símbolo	Valor (unidades)
Velocidad de la luz en el vacío	c	$3 \cdot 10^8$ m/s
Constante de Boltzmann	k	$1,3806 \cdot 10^{-23}$ J/K
Conversión centígrado/kelvin	$^{\circ}C \rightarrow K$	$^{\circ}C + 273 = K$
Temperatura ambiente	T_0	300 K
Densidad espectral ambiente	$k T_0$	-174 dBm/Hz

Cuadro A.1: Constantes notables.

Observaciones:

1. Velocidad de la luz en el vacío: el valor exacto (debido a una redefinición del *metro*) es $2,997\,924\,58 \cdot 10^8$ m/s.
2. Constante de Boltzmann: un valor más preciso es $1,380\,648\,8(13) \cdot 10^{-23}$ J/K.
3. Conversión centígrado/kelvin: un valor más preciso del sumando corrector es 273,15.
4. Temperatura ambiente: tomaremos 300 K como valor estándar, pero son admisibles otros valores próximos (sobre todo en condiciones ambientales anómalas).
5. Densidad espectral ambiente: densidad espectral de ruido unilateral a temperatura ambiente. Es un valor aproximado. El lector puede calcular un valor más exacto.

A.2. Glosario

En la siguiente lista aparecen parámetros y abreviaturas empleados en este libro, ordenados alfabéticamente. Cuando proceda, se adjuntará la unidad en que suele medirse la magnitud en cuestión. Es posible que en alguna ocasión la correspondencia con el libro no sea exacta, bien porque aparezcan mayúsculas donde se esperaban minúsculas (o viceversa), bien porque se añadan (o quiten) letras a un acrónimo, bien porque se incluyan o no paréntesis, bien porque se modifiquen letras.

Con carácter general, se escriben los parámetros en mayúsculas cuando se miden en unidades logarítmicas, mientras que se reservan las minúsculas para las unidades naturales. Así, por ejemplo: P_x puede ser la potencia de la señal x en dBm, y p_x la misma potencia expresada en vatios. Esta regla no se sigue estrictamente: parámetros que siempre suelen denotarse en mayúsculas (como la energía $-E$, en dBJ o en Julios— o el ancho de banda $-B$, usualmente en Hz—) conservan su grafía típica.

A

AM: Modulación de Amplitud.

APK: modulación digital híbrida de amplitud y fase (Amplitude Phase Keying).

ASK: modulación digital de amplitud (Amplitude Shift Keying).

A_t , *ATN*: atenuación (dB).

AWGN: ruido blanco gaussiano aditivo (Additive White Gaussian Noise).

a : atenuación (veces de señal o de potencia).

B

B : ancho de banda (Hz).

BB: Banda Base (espectro paso bajo).

B_{BB} : ancho de banda en banda base (usualmente en un filtro en coseno alzado).

BER: probabilidad de bit erróneo (sinónimo de P_b).

B_{eq} : ancho de banda equivalente de ruido.

BLR: BLU con un Residuo de la banda eliminada.

BLU: modulación en Banda Lateral Única.

BLU_i : BLU Inferior (sólo la banda lateral superior).

BLU_s : BLU Superior (sólo la banda lateral superior).

BLV: BLU con un Vestigio de la banda eliminada (sinónimo de BLR).

BPSK: PSK binaria (de dos símbolos).

C

$C(x)$: compresor.

CAD: Conversor Analógico/Digital.

(C/N) : relación de potencia de señal modulada, C , a potencia de ruido, (dB).

COD, *CODIF*: codificador de símbolos.

D

DBL: modulación en Doble Banda Lateral.

DEC, *DECOD*: decodificador.

DEM: demodulador.

DEMUX: demultiplexor.

DPSK: PSK diferencial.

E

E : energía (media) por símbolo (J).

E_b : energía (media) por bit (J).

E_s : energía (media) por símbolo (sinónimo de E) (J).

F

F : factor o figura de ruido (dB).

FDM : Frequency Division Multiplexing, véase MDF.

FPB : Filtro Paso Bajo o Paso Banda .

FSK : modulación digital en frecuencia (Frequency Shift Keying).

f : factor o figura de ruido (veces de potencia).

f_0 : frecuencia central de un filtro (Hz).

f_c : frecuencia de portadora (Hz).

f_{cc} : frecuencia de corte de un filtro (Hz).

f_d : constante de desviación de un modulador FM (Hz).

f_m : frecuencia de muestreo (Hz).

f_{Nyq} : frecuencia de Nyquist (Hz).

f_{OL} : frecuencia de un oscilador local (Hz).

G

G : ganancia de un amplificador (dB).

G_n : densidad espectral de potencia de ruido (W/Hz, dBm/Hz).

g : ganancia de un amplificador (veces de señal o de potencia).

H

HPA : amplificador de alta potencia (High Power Amplifier).

I

$IP3$: punto de intermodulación (o intersección) de tercer orden.

K

k : constante de Boltzmann.

k : número de bits por símbolo.

L

LIN : línea de transmisión.

LNA : amplificador de bajo nivel de ruido (Low Noise Amplifier).

ln : logaritmo neperiano: .

log : logaritmo decimal (excepto cuando se indique expresamente otra base).

M

M : número de símbolos de una modulación.

M : número de repetidores o secciones.

MDF : Múltiplex por División en Frecuencia.

MDT : Múltiplex por División en el Tiempo.

MED : medio de transmisión.

MIC : Modulación por Impulsos Codificados.

MOD : modulador.

MUX : multiplexor.

$máx$: máximo.

$mín$: mínimo.

N

N : potencia de ruido (W).

N : número de repetidores o secciones.

N_0 : densidad espectral de potencia de ruido (W/Hz, dBm/Hz).

NB : banda estrecha, en una modulación (Narrow Band).

NRZ: código de línea No Retorno a Cero (Zero).

n : potencia de ruido (W).

n : número de bits por muestra.

O

OOK: modulación digital de amplitud on/off (On Off Keying).

P

P : potencia (dBm).

P : probabilidad de símbolo erróneo.

PAM: codificación en línea con pulsos de diferente amplitud.

P_b : probabilidad de bit erróneo (sinónimo de BER).

PCM: Pulse Code Modulation, véase MIC.

PEP: Potencia Equivalente de Pico (W, dBm).

PSK: modulación digital de fase (Phase Shift Keying).

P_s : probabilidad de símbolo erróneo (sinónimo de P).

p : potencia (W).

Q

$Q(x)$: cuantificador (uniforme).

QAM: ciertas modulaciones de amplitud y fase (Quadrature Amplitude Modulation).

QPSK: modulación digital de 4 fases (QuadriPhase Shift Keying).

R

R : resistencia (Ω).

R, R_s : régimen simbólico (baudios).

R_b : régimen binario (b/s).

RC : constante de tiempo de un filtro (resistencia·capacidad).

RF : radio frecuencia (por oposición a Frecuencia Intermedia u otras).

RX : receptor.

RZ: código de línea Retorno a Cero (Zero).

S

(S/I) : relación de potencia de señal potencia de interferencia, I (dB).

(S/N) : relación Señal a Ruido (dB).

$(S/N)_e$: relación (S/N) a la entrada del demodulador (dB).

$(S/N)_q$ relación (S/N) donde el ruido es de cuantificación (dB).

$(S/N)_s$: relación (S/N) a la salida del demodulador (dB).

(s/n) : relación de potencia de Señal a potencia de Ruido (veces de potencia).

T

T_0 : temperatura ambiente (K).

T_0 : período (s).

T_b : tiempo de bit (s).

TDM: Time Division Multiplexing, véase MDT.

T_e : temperatura equivalente de ruido interno (K).

T_{in} : temperatura de ruido a la entrada (no es ruido interno) (K).

T_s : tiempo de símbolo (s).

TV: televisión.

TX: transmisor.

W

W : ancho de banda de una información en banda base (Hz).

X

$\langle x^2(t) \rangle$: valor cuadrático medio de la señal $x(t)$.

Z

Z : impedancia.

Griego

α : atenuación por unidad de longitud (dB/km).

β : índice de modulación (FM modulando con un tono).

Δf : desviación máxima de frecuencia en FM analógica (Hz).

Δf : separación entre frecuencia contiguas de FSK (Hz).

$\phi(t)$: señales de una base ortogonal.

$\psi(t)$: señales de una base ortonormal.

A.3. Símbolos

A continuación, se muestra una lista de símbolos utilizados en las figuras de este libro. En ciertos casos se pueden encontrar pequeñas variaciones en la forma o el estilo.



Filtro paso bajo.



Filtro paso banda.



Amplificador.



Antena.



Mezclador.



Multiplicador por N .



Divisor entre N .



Oscilador local.



Diodo rectificador o detector de envolvente.



Sumador.



Muestreador o conmutador.



Desfasador que suma X grados.

Apéndice B

GRÁFICAS, CUADROS Y FÓRMULAS

B.1. Relaciones trigonométricas

En el cuadro B.1 se muestran las relaciones trigonométricas de mayor relevancia para la asignatura.

$\text{sen}^2(a) + \cos^2(a) = 1$
$\text{sen}(a \pm b) = \text{sen}(a) \cdot \cos(b) \pm \cos(a) \cdot \text{sen}(b)$
$\cos(a \pm b) = \cos(a) \cdot \cos(b) \mp \text{sen}(a) \cdot \text{sen}(b)$
$\text{sen}^2(a) = \frac{1}{2} [1 - \cos(2a)]$
$\cos^2(a) = \frac{1}{2} [1 + \cos(2a)]$
$\text{sen}(a) \cdot \text{sen}(b) = \frac{1}{2} [\cos(a - b) - \cos(a + b)]$
$\cos(a) \cdot \cos(b) = \frac{1}{2} [\cos(a - b) + \cos(a + b)]$
$\text{sen}(a) \cdot \cos(b) = \frac{1}{2} [\text{sen}(a - b) + \text{sen}(a + b)]$

Cuadro B.1: Relaciones trigonométricas.

B.2. Propiedades de la transformada de Fourier, en f

En el cuadro B.2 se muestran las propiedades más notables de la transformada de Fourier. Por conveniencia, el dominio transformado está en f , y no en ω .

Operación	$x(t)$	$X(f)$
escalado	$x(at)$	$\frac{1}{ a } \cdot X\left(\frac{f}{a}\right)$
desplazamiento en t	$x(t - t_0)$	$X(f) \cdot \exp(-j 2\pi f t_0)$
desplazamiento en f	$x(t) \cdot \exp(j 2\pi f_0 t)$	$X(f - f_0)$
convolución en t	$x_1(t) * x_2(t)$	$X_1(f) \cdot X_2(f)$
convolución en f	$x_1(t) \cdot x_2(t)$	$X_1(f) * X_2(f)$

Cuadro B.2: Propiedades de la transformada de Fourier.

B.3. Pares transformados de Fourier, en f

En el cuadro B.3 se muestran los pares transformados que se van a utilizar en la asignatura. Por conveniencia, el dominio transformado está en f , y no en ω .

$x(t)$	$X(f)$
$\delta(t)$	1
1	$\delta(f)$
$\cos(2\pi f_0 t)$	$\frac{1}{2} [\delta(f - f_0) + \delta(f + f_0)]$
$\text{sen}(2\pi f_0 t)$	$\frac{1}{2j} [\delta(f - f_0) - \delta(f + f_0)]$
$\delta(t - t_0)$	$\exp(-j 2\pi f t_0)$
$\exp(j 2\pi f_0 t)$	$\delta(f - f_0)$
$\text{rect}(\frac{t}{T})$	$T \cdot \text{sinc}(Tf)$
$W \cdot \text{sinc}(Wt)$	$\text{rect}(\frac{f}{W})$
$\sum_{m=-\infty}^{\infty} \delta(t - m T_0)$	$\frac{1}{T_0} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(f - \frac{n}{T_0})$

Cuadro B.3: Pares transformado de Fourier.

B.4. Distorsión no lineal

Un cuadripolo no lineal se caracteriza mediante un polinomio que da la señal a la salida, $y(t)$, en función de la señal a la entrada, $x(t)$. Tomamos un polinomio de tercer grado:

$$y(t) = a_0 + a_1 x(t) + a_2 x^2(t) + a_3 x^3(t)$$

B.4.1. Armónicos

Cuando la entrada del polinomio descrito es un tono de amplitud A y frecuencia f_0 :

$$x(t) = A \cos(\omega_0 t)$$

a la salida del cuadripolo se obtienen componentes de distorsión a las frecuencias $f = nf_0$ (siendo $n = 0, 1, 2, 3$):

$$\begin{aligned} y(t) = & \left(a_0 + \frac{1}{2} a_2 A^2 \right) + \left(a_1 A + \frac{3}{4} a_3 A^3 \right) \cos(\omega_0 t) \\ & + \left(\frac{1}{2} a_2 A^2 \right) \cos(2\omega_0 t) + \left(\frac{1}{4} a_3 A^3 \right) \cos(3\omega_0 t) \end{aligned}$$

Donde:

- El primer sumando es un término de continua ($f = 0$).
- El segundo es la salida a la frecuencia fundamental ($f = f_0$).
- El tercero es la distorsión de segundo orden ($f = 2f_0$).
- El cuarto es la distorsión de tercer orden ($f = 3f_0$).

Para pequeña señal —entrada $x(t)$ pequeña— el término cuadrático y el cúbico del polinomio son despreciables, y el cuadripolo presenta un comportamiento lineal. La ganancia en estas condiciones es a_1 , en veces de señal. Pasando a decibelios:

$$G_0(\text{dB}) \approx 20 \log(a_1)$$

B.4.2. Intermodulación

Cuando la entrada del polinomio descrito está compuesta por dos tonos de igual amplitud (A) y diferentes frecuencias (f_1 y f_2):

$$x(t) = A \cos(\omega_1 t) + A \cos(\omega_2 t)$$

a la salida del cuadripolo se obtienen componentes de distorsión y productos de intermodulación a las frecuencias $f = \pm m f_1 \pm n f_2$ ($m, n = 0, 1, 2, 3, m + n \leq 3$):

$$\begin{aligned}
 y(t) = & (a_0 + a_2 A^2) \\
 & + \left(a_1 A + \frac{9}{4} a_3 A^3\right) \cos(\omega_1 t) + \left(a_1 A + \frac{9}{4} a_3 A^3\right) \cos(\omega_2 t) \\
 & + \left(\frac{1}{2} a_2 A^2\right) \cos(2 \omega_1 t) + \left(\frac{1}{2} a_2 A^2\right) \cos(2 \omega_2 t) \\
 & + \left(\frac{1}{4} a_3 A^3\right) \cos(3 \omega_1 t) + \left(\frac{1}{4} a_3 A^3\right) \cos(3 \omega_2 t) \\
 & + (a_2 A^2) \cos[(\omega_2 + \omega_1) t] + (a_2 A^2) \cos[(\omega_2 - \omega_1) t] \\
 & + \left(\frac{3}{4} a_3 A^3\right) \cos[(2 \omega_1 + \omega_2) t] + \left(\frac{3}{4} a_3 A^3\right) \cos[(2 \omega_1 - \omega_2) t] \\
 & + \left(\frac{3}{4} a_3 A^3\right) \cos[(2 \omega_2 + \omega_1) t] + \left(\frac{3}{4} a_3 A^3\right) \cos[(2 \omega_2 - \omega_1) t]
 \end{aligned}$$

Donde:

- El sumando de la primera línea es una componente de continua ($f = 0$).
- Los dos sumandos de la segunda línea son componentes de salida a las dos frecuencias fundamentales ($f = f_1, f_2$).
- Los dos sumandos de la tercera línea son componentes de distorsión de segundo orden ($f = 2f_1, 2f_2$).
- Los dos sumandos de la cuarta línea son componentes de distorsión de tercer orden ($f = 3f_1, 3f_2$).
- Los dos sumandos de la quinta línea son productos de intermodulación de segundo orden ($f = \pm m f_1 \pm n f_2, m + n = 2$).
- Los cuatro sumandos de las líneas sexta y séptima son productos de intermodulación de tercer orden ($f = \pm m f_1 \pm n f_2, m + n = 3$).

B.5. Funciones de Bessel

Las funciones de Bessel de primera especie, $J_n(\beta)$, dependen de dos parámetros: el orden, n , que toma valores enteros, y el argumento, β , que toma valores reales no negativos.

En cuadros y gráficas sólo aparecen las funciones de Bessel de primera especie con órdenes no negativos. Para calcular los valores de los órdenes negativos basta con aplicar la siguiente relación:

$$J_{-n}(\beta) = (-1)^n J_n(\beta)$$

Se pueden consultar los valores de las funciones de Bessel de primera especie, $J_n(\beta)$, en la gráfica de la figura B.1 y en el cuadro B.4.

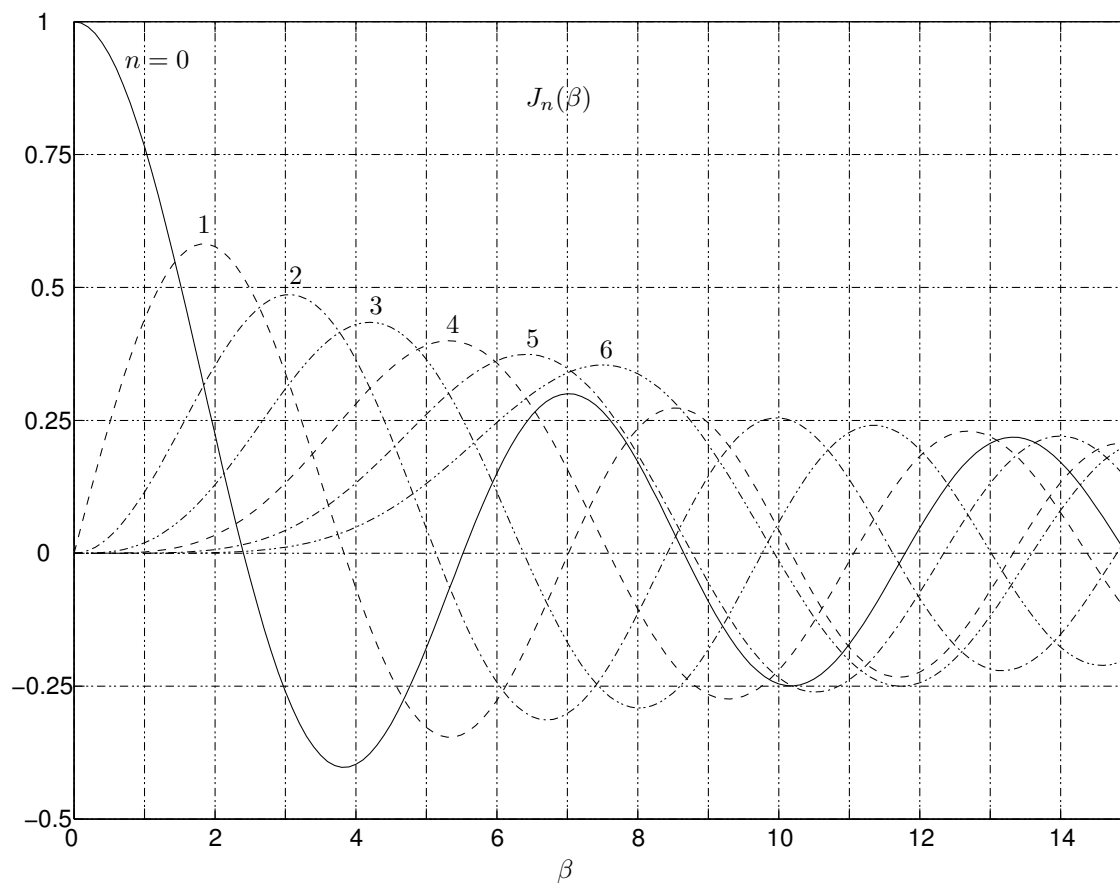


Figura B.1: Funciones de Bessel de primera especie en función del orden (n) y el argumento (β).

n	$J_n(0, 01)$	$J_n(0, 1)$	$J_n(0, 2)$	$J_n(0, 3)$	$J_n(0, 4)$	$J_n(0, 5)$	$J_n(0, 6)$	$J_n(0, 7)$	$J_n(0, 8)$	$J_n(0, 9)$
0	9,9998e-01	9,9750e-01	9,9002e-01	9,7763e-01	9,6040e-01	9,3847e-01	9,1200e-01	8,8120e-01	8,4629e-01	8,0752e-01
1	4,9999e-03	4,9938e-02	9,9501e-02	1,4832e-01	1,9603e-01	2,4227e-01	2,8670e-01	3,2900e-01	3,6884e-01	4,0595e-01
2	1,2500e-05	1,2490e-03	4,9834e-03	1,1166e-02	1,9735e-02	3,0604e-02	4,3665e-02	5,8787e-02	7,5818e-02	9,4586e-02
3	2,0833e-08	2,0820e-05	1,6625e-04	5,5934e-04	1,3201e-03	2,5637e-03	4,3997e-03	6,9297e-03	1,0247e-02	1,4434e-02
4	2,6042e-11	2,6029e-07	4,1583e-06	2,0999e-05	6,6135e-05	1,6074e-04	3,3147e-04	6,1010e-04	1,0330e-03	1,6406e-03
5	2,6042e-14	2,6031e-09	8,3195e-08	6,3044e-07	2,6489e-06	8,0536e-06	1,9948e-05	4,2882e-05	8,3084e-05	1,4866e-04
6	2,1701e-17	2,1694e-11	1,3869e-09	1,5770e-08	8,8382e-08	3,3607e-07	9,9956e-07	2,5088e-06	5,5601e-06	1,1204e-05
7	1,5501e-20	1,5496e-13	1,9816e-11	3,3805e-10	2,5270e-09	1,2016e-08	4,2907e-08	1,2572e-07	3,1864e-07	7,2285e-07
8	9,6881e-24	9,6854e-16	2,4774e-13	6,3405e-12	6,3210e-11	3,7582e-10	1,6110e-09	5,5095e-09	1,5967e-08	4,0775e-08
9	5,3823e-27	5,3809e-18	2,7530e-15	1,0570e-13	1,4053e-12	1,0447e-11	5,3755e-11	2,1455e-10	7,1092e-10	2,0434e-09
10	2,6911e-30	2,6905e-20	2,7532e-17	1,5858e-15	2,8116e-14	2,6132e-13	1,6140e-12	7,5176e-12	2,8478e-11	9,2121e-11

n	$J_n(1)$	$J_n(2)$	$J_n(3)$	$J_n(4)$	$J_n(5)$	$J_n(6)$	$J_n(7)$	$J_n(8)$	$J_n(9)$	$J_n(10)$
0	7,6520e-01	2,2389e-01	-2,6005e-01	-3,9715e-01	-1,7760e-01	1,5065e-01	3,0008e-01	1,7165e-01	-9,0334e-02	-2,4594e-01
1	4,4005e-01	5,7672e-01	3,3906e-01	-6,6043e-02	-3,2758e-01	-2,7668e-01	-4,6828e-03	2,3464e-01	2,4531e-01	4,3473e-02
2	1,1490e-01	3,5283e-01	4,8609e-01	3,6413e-01	4,6565e-02	-2,4287e-01	-3,0142e-01	-1,1299e-01	1,4485e-01	2,5463e-01
3	1,9563e-02	1,2894e-01	3,0906e-01	4,3017e-01	3,6483e-01	1,1477e-01	-1,6756e-01	-2,9113e-01	-1,8094e-01	5,8379e-02
4	2,4766e-03	3,3996e-02	1,3203e-01	2,8113e-01	3,9123e-01	3,5764e-01	1,5780e-01	-1,0536e-01	-2,6547e-01	-2,1960e-01
5	2,4976e-04	7,0396e-03	4,3028e-02	1,3209e-01	2,6114e-01	3,6209e-01	3,4790e-01	1,8577e-01	-5,5039e-02	-2,3406e-01
6	2,0938e-05	1,2024e-03	1,1394e-02	4,9088e-02	1,3105e-01	2,4584e-01	3,3920e-01	3,3758e-01	2,0432e-01	-1,4459e-02
7	1,5023e-06	1,7494e-04	2,5473e-03	1,5176e-02	5,3376e-02	1,2959e-01	2,3358e-01	3,2059e-01	3,2746e-01	2,1671e-01
8	9,4223e-08	2,2180e-05	4,9344e-04	4,0287e-03	1,8405e-02	5,6532e-02	1,2797e-01	2,2345e-01	3,0507e-01	3,1785e-01
9	5,2493e-09	2,4923e-06	8,4395e-05	9,3860e-04	5,5203e-03	2,1165e-02	5,8921e-02	1,2632e-01	2,1488e-01	2,9186e-01
10	2,6306e-10	2,5154e-07	1,2928e-05	1,9504e-04	1,4678e-03	6,9640e-03	2,3539e-02	6,0767e-02	1,2469e-01	2,0749e-01

Cuadro B.4: Funciones de Bessel de primera especie, orden n y argumento β : $J_n(\beta)$.

B.6. Modulaciones analógicas

En el cuadro B.5 se ofrece un resumen de las fórmulas más importantes de las modulaciones analógicas. Todos los parámetros están en unidades naturales.

Parámetro	AM	DBL	BLU	FM
p_y	$\frac{A^2}{2} [1 + m^2 \langle x_n^2 \rangle]$	$\frac{A_t^2}{2} \langle x_n^2 \rangle$	$\frac{A_t^2}{4} \langle x_n^2 \rangle$	$\frac{A^2}{2}$
PEP	$\frac{A^2}{2} (1 + m)^2$	$\frac{A_t^2}{2}$	$f(x_n^2, \tilde{x}_n^2)$	$\frac{A^2}{2}$
η	$\frac{m^2 \langle x_n^2 \rangle}{1 + m^2 \langle x_n^2 \rangle}$	—	—	—
B	$2W$	$2W$	W	$2(\Delta f + W)$
$(s/n)_E$	$z/2$	$z/2$	z	$\frac{z}{2(D+1)}$
$(s/n)_S$	ηz	z	z	$3D^2 \langle x_n^2 \rangle z M$
g_D	2η	2	1	$6D^2 (D+1) \langle x_n^2 \rangle M$

Cuadro B.5: Resumen de las modulaciones analógicas.

Donde:

- AM, DBL BLU y FM son las modulaciones de amplitud, doble banda lateral, banda lateral única y frecuencia, respectivamente.
- p_y es la potencia media de la señal modulada $y(t)$.
- PEP es la potencia equivalente de pico transmitida por la modulación.
- η es la eficiencia de potencia respecto a la portadora.
- B es el ancho de banda ocupado por la modulación.
- $(s/n)_E$ es la relación señal a ruido equivalente a la entrada del demodulador.
- $(s/n)_S$ es la relación señal a ruido a la salida del demodulador.
- g_D es la ganancia de demodulación.
- m es el índice de modulación de AM.
- $\langle x_n^2 \rangle$ es el valor cuadrático medio de la señal moduladora normalizada.
- W es el ancho de banda ocupado por la señal moduladora.
- z es la calidad equivalente normalizada a la entrada del demodulador.
- Δf es la desviación máxima de frecuencia en FM.
- D es la relación de desviación en FM.
- M es el factor de mejora por pre-deénfasis en FM.

Observaciones:

Potencias: Todas las potencias están expresadas para una resistencia $R = 1 \Omega$. Si la carga tiene otro valor R (y suponiendo que las señales están en voltios), hay que dividir dichas potencias por R .

Calidad a la entrada $(s/n)_E$: El parámetro $(s/n)_E$ es una calidad equivalente a la entrada del demodulador. No representa la calidad que se mediría en ese punto, porque incluye el ruido del demodulador (que no está presente a su entrada).

Calidad a la entrada z : El parámetro z es una calidad equivalente a la entrada del demodulador. No representa la calidad que se mediría en ese punto, porque incluye el ruido del demodulador (que no está presente a su entrada) y porque usa el ancho de banda de la moduladora W (cuando la señal a la entrada es modulada y ocupa el ancho de banda de la modulación). La calidad z vale:

$$z = \frac{p_{RX}}{N_0 W}$$

Donde p_{RX} es la potencia de señal modulada recibida a la entrada del demodulador; N_0 es la densidad espectral unilateral de potencia de ruido *total* del sistema llevada a la entrada del demodulador; y W es el ancho de banda de la señal de información moduladora.

Resultados en BLU: La calidad a la salida del demodulador de la modulación BLU se ha calculado considerando que la señal se genera filtrando una DBL. La expresión de la *PEP* en BLU no se utiliza en este curso (depende de la señal moduladora y su transformada de Hilbert).

Umbral en FM: La fórmula de la calidad a la salida del demodulador en FM, sólo es aplicable cuando la calidad equivalente a la entrada, z , supera un umbral, z_u . Dos expresiones típicas para calcular dicho umbral, en unidades logarítmicas, son:

$$Z_u(\text{dB}) = 10 \log[20(D+1)]$$

$$Z_u(\text{dB}) = 10 \log[40(D+1)]$$

Donde D es la relación de desviación ($D = \Delta f/W$).

B.7. Función complementaria del error

La función complementaria del error, $\operatorname{erfc}(x)$, depende de un argumento real no negativo, x . Su expresión analítica es:

$$\operatorname{erfc}(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_x^{\infty} \exp(-z^2) dz$$

Se pueden consultar los valores de la función erfc en la gráfica de la figura B.2 y en los cuadros B.6, B.7, B.8, B.9, B.10, B.11, B.12, B.13, B.14 y B.15.

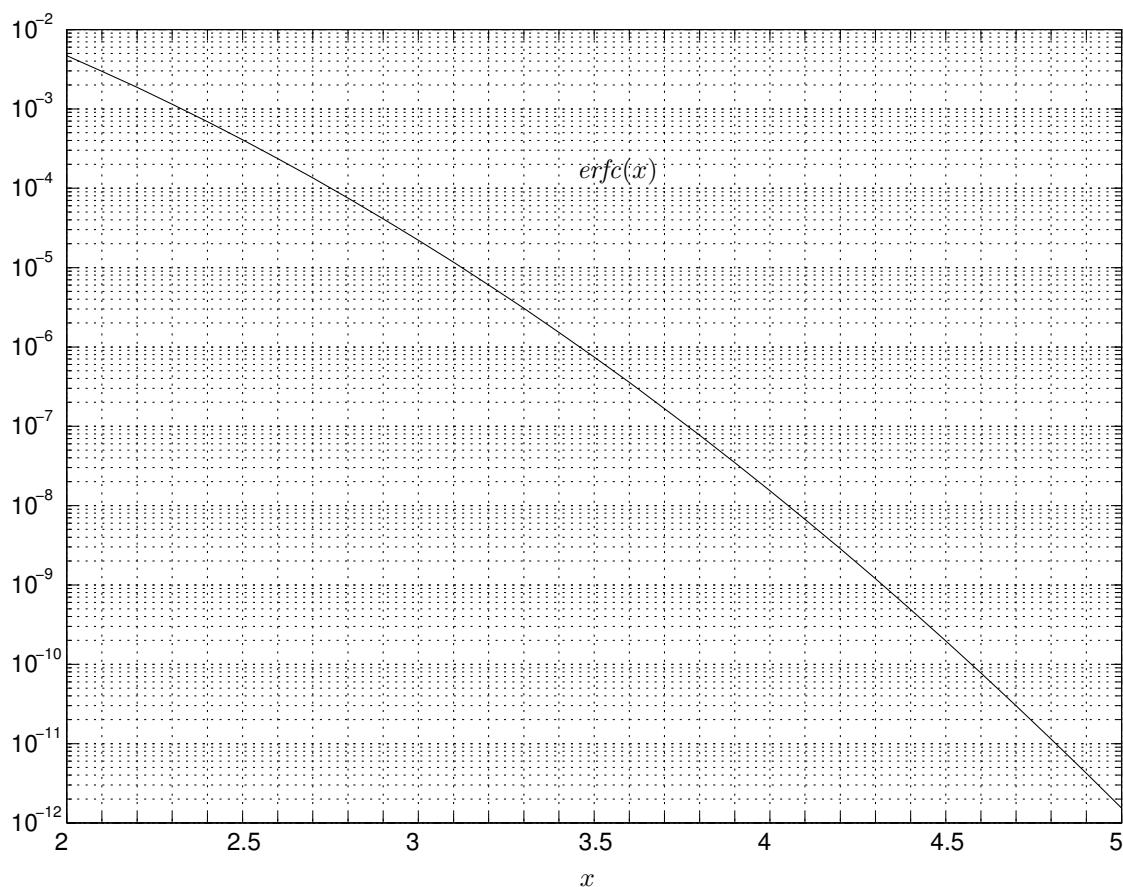


Figura B.2: Función complementaria del error, $\operatorname{erfc}(x)$.

x	$\operatorname{erfc}(x)$	x	$\operatorname{erfc}(x)$	x	$\operatorname{erfc}(x)$	x	$\operatorname{erfc}(x)$
0,000	1,0000e-00	0,250	7,2367e-01	0,500	4,7950e-01	0,750	2,8884e-01
0,005	9,9436e-01	0,255	7,1838e-01	0,505	4,7512e-01	0,755	2,8564e-01
0,010	9,8872e-01	0,260	7,1310e-01	0,510	4,7076e-01	0,760	2,8246e-01
0,015	9,8308e-01	0,265	7,0783e-01	0,515	4,6642e-01	0,765	2,7931e-01
0,020	9,7744e-01	0,270	7,0258e-01	0,520	4,6210e-01	0,770	2,7618e-01
0,025	9,7180e-01	0,275	6,9734e-01	0,525	4,5781e-01	0,775	2,7307e-01
0,030	9,6616e-01	0,280	6,9212e-01	0,530	4,5354e-01	0,780	2,6999e-01
0,035	9,6052e-01	0,285	6,8691e-01	0,535	4,4929e-01	0,785	2,6693e-01
0,040	9,5489e-01	0,290	6,8172e-01	0,540	4,4506e-01	0,790	2,6390e-01
0,045	9,4926e-01	0,295	6,7654e-01	0,545	4,4086e-01	0,795	2,6089e-01
0,050	9,4363e-01	0,300	6,7137e-01	0,550	4,3668e-01	0,800	2,5790e-01
0,055	9,3800e-01	0,305	6,6622e-01	0,555	4,3252e-01	0,805	2,5494e-01
0,060	9,3238e-01	0,310	6,6109e-01	0,560	4,2838e-01	0,810	2,5200e-01
0,065	9,2676e-01	0,315	6,5597e-01	0,565	4,2427e-01	0,815	2,4908e-01
0,070	9,2114e-01	0,320	6,5087e-01	0,570	4,2018e-01	0,820	2,4619e-01
0,075	9,1553e-01	0,325	6,4579e-01	0,575	4,1612e-01	0,825	2,4332e-01
0,080	9,0992e-01	0,330	6,4072e-01	0,580	4,1208e-01	0,830	2,4048e-01
0,085	9,0432e-01	0,335	6,3567e-01	0,585	4,0806e-01	0,835	2,3766e-01
0,090	8,9872e-01	0,340	6,3064e-01	0,590	4,0406e-01	0,840	2,3486e-01
0,095	8,9313e-01	0,345	6,2562e-01	0,595	4,0009e-01	0,845	2,3208e-01
0,100	8,8754e-01	0,350	6,2062e-01	0,600	3,9614e-01	0,850	2,2933e-01
0,105	8,8195e-01	0,355	6,1564e-01	0,605	3,9222e-01	0,855	2,2660e-01
0,110	8,7638e-01	0,360	6,1067e-01	0,610	3,8832e-01	0,860	2,2390e-01
0,115	8,7081e-01	0,365	6,0572e-01	0,615	3,8444e-01	0,865	2,2122e-01
0,120	8,6524e-01	0,370	6,0079e-01	0,620	3,8059e-01	0,870	2,1856e-01
0,125	8,5968e-01	0,375	5,9588e-01	0,625	3,7676e-01	0,875	2,1592e-01
0,130	8,5413e-01	0,380	5,9099e-01	0,630	3,7295e-01	0,880	2,1331e-01
0,135	8,4859e-01	0,385	5,8612e-01	0,635	3,6917e-01	0,885	2,1072e-01
0,140	8,4305e-01	0,390	5,8126e-01	0,640	3,6541e-01	0,890	2,0816e-01
0,145	8,3752e-01	0,395	5,7642e-01	0,645	3,6168e-01	0,895	2,0561e-01
0,150	8,3200e-01	0,400	5,7161e-01	0,650	3,5797e-01	0,900	2,0309e-01
0,155	8,2649e-01	0,405	5,6681e-01	0,655	3,5428e-01	0,905	2,0059e-01
0,160	8,2099e-01	0,410	5,6203e-01	0,660	3,5062e-01	0,910	1,9812e-01
0,165	8,1549e-01	0,415	5,5727e-01	0,665	3,4699e-01	0,915	1,9566e-01
0,170	8,1001e-01	0,420	5,5253e-01	0,670	3,4337e-01	0,920	1,9323e-01
0,175	8,0453e-01	0,425	5,4781e-01	0,675	3,3978e-01	0,925	1,9082e-01
0,180	7,9906e-01	0,430	5,4311e-01	0,680	3,3622e-01	0,930	1,8844e-01
0,185	7,9361e-01	0,435	5,3843e-01	0,685	3,3268e-01	0,935	1,8607e-01
0,190	7,8816e-01	0,440	5,3377e-01	0,690	3,2916e-01	0,940	1,8373e-01
0,195	7,8272e-01	0,445	5,2914e-01	0,695	3,2567e-01	0,945	1,8141e-01
0,200	7,7730e-01	0,450	5,2452e-01	0,700	3,2220e-01	0,950	1,7911e-01
0,205	7,7188e-01	0,455	5,1992e-01	0,705	3,1875e-01	0,955	1,7683e-01
0,210	7,6648e-01	0,460	5,1534e-01	0,710	3,1533e-01	0,960	1,7458e-01
0,215	7,6109e-01	0,465	5,1079e-01	0,715	3,1194e-01	0,965	1,7234e-01
0,220	7,5570e-01	0,470	5,0625e-01	0,720	3,0857e-01	0,970	1,7013e-01
0,225	7,5033e-01	0,475	5,0174e-01	0,725	3,0522e-01	0,975	1,6794e-01
0,230	7,4498e-01	0,480	4,9725e-01	0,730	3,0190e-01	0,980	1,6577e-01
0,235	7,3963e-01	0,485	4,9278e-01	0,735	2,9860e-01	0,985	1,6362e-01
0,240	7,3430e-01	0,490	4,8833e-01	0,740	2,9532e-01	0,990	1,6149e-01
0,245	7,2898e-01	0,495	4,8391e-01	0,745	2,9207e-01	0,995	1,5939e-01

Cuadro B.6: Función complementaria del error, $\operatorname{erfc}(x)$. Argumentos de 0,000 a 0,995.

x	$\operatorname{erfc}(x)$	x	$\operatorname{erfc}(x)$	x	$\operatorname{erfc}(x)$	x	$\operatorname{erfc}(x)$
1,000	1,5730e-01	1,250	7,7100e-02	1,500	3,3895e-02	1,750	1,3328e-02
1,005	1,5523e-01	1,255	7,5925e-02	1,505	3,3305e-02	1,755	1,3067e-02
1,010	1,5319e-01	1,260	7,4764e-02	1,510	3,2723e-02	1,760	1,2810e-02
1,015	1,5117e-01	1,265	7,3618e-02	1,515	3,2151e-02	1,765	1,2557e-02
1,020	1,4916e-01	1,270	7,2486e-02	1,520	3,1587e-02	1,770	1,2309e-02
1,025	1,4718e-01	1,275	7,1369e-02	1,525	3,1031e-02	1,775	1,2065e-02
1,030	1,4522e-01	1,280	7,0266e-02	1,530	3,0484e-02	1,780	1,1826e-02
1,035	1,4327e-01	1,285	6,9177e-02	1,535	2,9945e-02	1,785	1,1591e-02
1,040	1,4135e-01	1,290	6,8101e-02	1,540	2,9414e-02	1,790	1,1359e-02
1,045	1,3945e-01	1,295	6,7040e-02	1,545	2,8892e-02	1,795	1,1132e-02
1,050	1,3756e-01	1,300	6,5992e-02	1,550	2,8377e-02	1,800	1,0909e-02
1,055	1,3570e-01	1,305	6,4958e-02	1,555	2,7871e-02	1,805	1,0691e-02
1,060	1,3386e-01	1,310	6,3937e-02	1,560	2,7372e-02	1,810	1,0475e-02
1,065	1,3203e-01	1,315	6,2929e-02	1,565	2,6881e-02	1,815	1,0264e-02
1,070	1,3023e-01	1,320	6,1935e-02	1,570	2,6397e-02	1,820	1,0057e-02
1,075	1,2844e-01	1,325	6,0953e-02	1,575	2,5921e-02	1,825	9,8532e-03
1,080	1,2667e-01	1,330	5,9985e-02	1,580	2,5453e-02	1,830	9,6532e-03
1,085	1,2493e-01	1,335	5,9029e-02	1,585	2,4992e-02	1,835	9,4568e-03
1,090	1,2320e-01	1,340	5,8086e-02	1,590	2,4538e-02	1,840	9,2641e-03
1,095	1,2149e-01	1,345	5,7156e-02	1,595	2,4091e-02	1,845	9,0748e-03
1,100	1,1979e-01	1,350	5,6238e-02	1,600	2,3652e-02	1,850	8,8890e-03
1,105	1,1812e-01	1,355	5,5332e-02	1,605	2,3219e-02	1,855	8,7066e-03
1,110	1,1647e-01	1,360	5,4439e-02	1,610	2,2793e-02	1,860	8,5275e-03
1,115	1,1483e-01	1,365	5,3557e-02	1,615	2,2374e-02	1,865	8,3518e-03
1,120	1,1321e-01	1,370	5,2688e-02	1,620	2,1962e-02	1,870	8,1793e-03
1,125	1,1161e-01	1,375	5,1830e-02	1,625	2,1556e-02	1,875	8,0099e-03
1,130	1,1003e-01	1,380	5,0984e-02	1,630	2,1157e-02	1,880	7,8438e-03
1,135	1,0846e-01	1,385	5,0150e-02	1,635	2,0765e-02	1,885	7,6807e-03
1,140	1,0692e-01	1,390	4,9327e-02	1,640	2,0378e-02	1,890	7,5207e-03
1,145	1,0539e-01	1,395	4,8515e-02	1,645	1,9998e-02	1,895	7,3637e-03
1,150	1,0388e-01	1,400	4,7715e-02	1,650	1,9624e-02	1,900	7,2096e-03
1,155	1,0238e-01	1,405	4,6926e-02	1,655	1,9257e-02	1,905	7,0584e-03
1,160	1,0090e-01	1,410	4,6148e-02	1,660	1,8895e-02	1,910	6,9101e-03
1,165	9,9443e-02	1,415	4,5380e-02	1,665	1,8539e-02	1,915	6,7645e-03
1,170	9,8000e-02	1,420	4,4624e-02	1,670	1,8190e-02	1,920	6,6218e-03
1,175	9,6573e-02	1,425	4,3878e-02	1,675	1,7846e-02	1,925	6,4817e-03
1,180	9,5163e-02	1,430	4,3143e-02	1,680	1,7507e-02	1,930	6,3443e-03
1,185	9,3769e-02	1,435	4,2418e-02	1,685	1,7175e-02	1,935	6,2096e-03
1,190	9,2392e-02	1,440	4,1703e-02	1,690	1,6847e-02	1,940	6,0774e-03
1,195	9,1031e-02	1,445	4,0999e-02	1,695	1,6526e-02	1,945	5,9478e-03
1,200	8,9686e-02	1,450	4,0305e-02	1,700	1,6210e-02	1,950	5,8207e-03
1,205	8,8357e-02	1,455	3,9621e-02	1,705	1,5899e-02	1,955	5,6960e-03
1,210	8,7044e-02	1,460	3,8946e-02	1,710	1,5593e-02	1,960	5,5737e-03
1,215	8,5747e-02	1,465	3,8282e-02	1,715	1,5293e-02	1,965	5,4538e-03
1,220	8,4466e-02	1,470	3,7627e-02	1,720	1,4997e-02	1,970	5,3363e-03
1,225	8,3200e-02	1,475	3,6982e-02	1,725	1,4707e-02	1,975	5,2210e-03
1,230	8,1950e-02	1,480	3,6346e-02	1,730	1,4422e-02	1,980	5,1080e-03
1,235	8,0715e-02	1,485	3,5719e-02	1,735	1,4141e-02	1,985	4,9972e-03
1,240	7,9495e-02	1,490	3,5102e-02	1,740	1,3865e-02	1,990	4,8886e-03
1,245	7,8290e-02	1,495	3,4494e-02	1,745	1,3595e-02	1,995	4,7821e-03

Cuadro B.7: Función complementaria del error, $\operatorname{erfc}(x)$. Argumentos de 1,000 a 1,995.

x	$\operatorname{erfc}(x)$	x	$\operatorname{erfc}(x)$	x	$\operatorname{erfc}(x)$	x	$\operatorname{erfc}(x)$
2,000	4,6777e-03	2,250	1,4627e-03	2,500	4,0695e-04	2,750	1,0062e-04
2,005	4,5754e-03	2,255	1,4274e-03	2,505	3,9620e-04	2,755	9,7730e-05
2,010	4,4752e-03	2,260	1,3929e-03	2,510	3,8571e-04	2,760	9,4918e-05
2,015	4,3769e-03	2,265	1,3591e-03	2,515	3,7548e-04	2,765	9,2181e-05
2,020	4,2805e-03	2,270	1,3261e-03	2,520	3,6550e-04	2,770	8,9520e-05
2,025	4,1862e-03	2,275	1,2939e-03	2,525	3,5577e-04	2,775	8,6931e-05
2,030	4,0937e-03	2,280	1,2623e-03	2,530	3,4629e-04	2,780	8,4413e-05
2,035	4,0030e-03	2,285	1,2315e-03	2,535	3,3704e-04	2,785	8,1964e-05
2,040	3,9142e-03	2,290	1,2014e-03	2,540	3,2802e-04	2,790	7,9582e-05
2,045	3,8272e-03	2,295	1,1720e-03	2,545	3,1923e-04	2,795	7,7266e-05
2,050	3,7419e-03	2,300	1,1432e-03	2,550	3,1066e-04	2,800	7,5013e-05
2,055	3,6584e-03	2,305	1,1151e-03	2,555	3,0231e-04	2,805	7,2823e-05
2,060	3,5765e-03	2,310	1,0876e-03	2,560	2,9416e-04	2,810	7,0693e-05
2,065	3,4964e-03	2,315	1,0607e-03	2,565	2,8623e-04	2,815	6,8623e-05
2,070	3,4178e-03	2,320	1,0345e-03	2,570	2,7849e-04	2,820	6,6610e-05
2,075	3,3409e-03	2,325	1,0089e-03	2,575	2,7095e-04	2,825	6,4652e-05
2,080	3,2656e-03	2,330	9,8380e-04	2,580	2,6360e-04	2,830	6,2750e-05
2,085	3,1918e-03	2,335	9,5934e-04	2,585	2,5644e-04	2,835	6,0900e-05
2,090	3,1195e-03	2,340	9,3543e-04	2,590	2,4946e-04	2,840	5,9102e-05
2,095	3,0488e-03	2,345	9,1208e-04	2,595	2,4266e-04	2,845	5,7355e-05
2,100	2,9795e-03	2,350	8,8927e-04	2,600	2,3603e-04	2,850	5,5656e-05
2,105	2,9116e-03	2,355	8,6699e-04	2,605	2,2958e-04	2,855	5,4005e-05
2,110	2,8452e-03	2,360	8,4522e-04	2,610	2,2329e-04	2,860	5,2401e-05
2,115	2,7801e-03	2,365	8,2397e-04	2,615	2,1716e-04	2,865	5,0842e-05
2,120	2,7164e-03	2,370	8,0321e-04	2,620	2,1119e-04	2,870	4,9327e-05
2,125	2,6540e-03	2,375	7,8294e-04	2,625	2,0538e-04	2,875	4,7855e-05
2,130	2,5930e-03	2,380	7,6314e-04	2,630	1,9971e-04	2,880	4,6424e-05
2,135	2,5332e-03	2,385	7,4381e-04	2,635	1,9419e-04	2,885	4,5035e-05
2,140	2,4747e-03	2,390	7,2494e-04	2,640	1,8882e-04	2,890	4,3684e-05
2,145	2,4174e-03	2,395	7,0651e-04	2,645	1,8359e-04	2,895	4,2372e-05
2,150	2,3614e-03	2,400	6,8851e-04	2,650	1,7849e-04	2,900	4,1098e-05
2,155	2,3065e-03	2,405	6,7095e-04	2,655	1,7352e-04	2,905	3,9860e-05
2,160	2,2528e-03	2,410	6,5380e-04	2,660	1,6869e-04	2,910	3,8657e-05
2,165	2,2003e-03	2,415	6,3706e-04	2,665	1,6398e-04	2,915	3,7489e-05
2,170	2,1489e-03	2,420	6,2072e-04	2,670	1,5940e-04	2,920	3,6355e-05
2,175	2,0986e-03	2,425	6,0477e-04	2,675	1,5494e-04	2,925	3,5253e-05
2,180	2,0494e-03	2,430	5,8920e-04	2,680	1,5059e-04	2,930	3,4183e-05
2,185	2,0012e-03	2,435	5,7400e-04	2,685	1,4636e-04	2,935	3,3144e-05
2,190	1,9541e-03	2,440	5,5917e-04	2,690	1,4224e-04	2,940	3,2134e-05
2,195	1,9080e-03	2,445	5,4470e-04	2,695	1,3823e-04	2,945	3,1155e-05
2,200	1,8628e-03	2,450	5,3058e-04	2,700	1,3433e-04	2,950	3,0203e-05
2,205	1,8187e-03	2,455	5,1680e-04	2,705	1,3053e-04	2,955	2,9279e-05
2,210	1,7756e-03	2,460	5,0335e-04	2,710	1,2684e-04	2,960	2,8382e-05
2,215	1,7333e-03	2,465	4,9023e-04	2,715	1,2324e-04	2,965	2,7512e-05
2,220	1,6921e-03	2,470	4,7743e-04	2,720	1,1974e-04	2,970	2,6666e-05
2,225	1,6517e-03	2,475	4,6495e-04	2,725	1,1633e-04	2,975	2,5846e-05
2,230	1,6122e-03	2,480	4,5276e-04	2,730	1,1301e-04	2,980	2,5049e-05
2,235	1,5735e-03	2,485	4,4088e-04	2,735	1,0979e-04	2,985	2,4276e-05
2,240	1,5358e-03	2,490	4,2929e-04	2,740	1,0665e-04	2,990	2,3526e-05
2,245	1,4988e-03	2,495	4,1798e-04	2,745	1,0359e-04	2,995	2,2797e-05

Cuadro B.8: Función complementaria del error, $\operatorname{erfc}(x)$. Argumentos de 2,000 a 2,995.

x	$\operatorname{erfc}(x)$	x	$\operatorname{erfc}(x)$	x	$\operatorname{erfc}(x)$	x	$\operatorname{erfc}(x)$
3,000	2,2090e-05	3,250	4,3028e-06	3,500	7,4310e-07	3,750	1,1373e-07
3,005	2,1405e-05	3,255	4,1592e-06	3,505	7,1657e-07	3,755	1,0940e-07
3,010	2,0739e-05	3,260	4,0202e-06	3,510	6,9095e-07	3,760	1,0524e-07
3,015	2,0093e-05	3,265	3,8856e-06	3,515	6,6622e-07	3,765	1,0122e-07
3,020	1,9466e-05	3,270	3,7554e-06	3,520	6,4234e-07	3,770	9,7359e-08
3,025	1,8858e-05	3,275	3,6294e-06	3,525	6,1929e-07	3,775	9,3638e-08
3,030	1,8268e-05	3,280	3,5074e-06	3,530	5,9703e-07	3,780	9,0055e-08
3,035	1,7696e-05	3,285	3,3894e-06	3,535	5,7555e-07	3,785	8,6604e-08
3,040	1,7141e-05	3,290	3,2752e-06	3,540	5,5482e-07	3,790	8,3282e-08
3,045	1,6602e-05	3,295	3,1646e-06	3,545	5,3480e-07	3,795	8,0083e-08
3,050	1,6080e-05	3,300	3,0577e-06	3,550	5,1548e-07	3,800	7,7004e-08
3,055	1,5573e-05	3,305	2,9542e-06	3,555	4,9684e-07	3,805	7,4039e-08
3,060	1,5082e-05	3,310	2,8541e-06	3,560	4,7885e-07	3,810	7,1185e-08
3,065	1,4605e-05	3,315	2,7573e-06	3,565	4,6148e-07	3,815	6,8438e-08
3,070	1,4143e-05	3,320	2,6636e-06	3,570	4,4473e-07	3,820	6,5793e-08
3,075	1,3694e-05	3,325	2,5730e-06	3,575	4,2856e-07	3,825	6,3248e-08
3,080	1,3260e-05	3,330	2,4853e-06	3,580	4,1296e-07	3,830	6,0798e-08
3,085	1,2838e-05	3,335	2,4005e-06	3,585	3,9791e-07	3,835	5,8440e-08
3,090	1,2429e-05	3,340	2,3185e-06	3,590	3,8339e-07	3,840	5,6171e-08
3,095	1,2033e-05	3,345	2,2392e-06	3,595	3,6938e-07	3,845	5,3988e-08
3,100	1,1649e-05	3,350	2,1625e-06	3,600	3,5586e-07	3,850	5,1886e-08
3,105	1,1276e-05	3,355	2,0883e-06	3,605	3,4283e-07	3,855	4,9864e-08
3,110	1,0915e-05	3,360	2,0166e-06	3,610	3,3025e-07	3,860	4,7919e-08
3,115	1,0565e-05	3,365	1,9472e-06	3,615	3,1812e-07	3,865	4,6047e-08
3,120	1,0226e-05	3,370	1,8801e-06	3,620	3,0642e-07	3,870	4,4246e-08
3,125	9,8967e-06	3,375	1,8153e-06	3,625	2,9514e-07	3,875	4,2514e-08
3,130	9,5780e-06	3,380	1,7526e-06	3,630	2,8426e-07	3,880	4,0847e-08
3,135	9,2690e-06	3,385	1,6920e-06	3,635	2,7377e-07	3,885	3,9244e-08
3,140	8,9696e-06	3,390	1,6334e-06	3,640	2,6365e-07	3,890	3,7702e-08
3,145	8,6794e-06	3,395	1,5767e-06	3,645	2,5389e-07	3,895	3,6219e-08
3,150	8,3982e-06	3,400	1,5220e-06	3,650	2,4448e-07	3,900	3,4792e-08
3,155	8,1257e-06	3,405	1,4691e-06	3,655	2,3541e-07	3,905	3,3420e-08
3,160	7,8617e-06	3,410	1,4179e-06	3,660	2,2667e-07	3,910	3,2101e-08
3,165	7,6059e-06	3,415	1,3685e-06	3,665	2,1824e-07	3,915	3,0832e-08
3,170	7,3581e-06	3,420	1,3207e-06	3,670	2,1011e-07	3,920	2,9612e-08
3,175	7,1180e-06	3,425	1,2746e-06	3,675	2,0227e-07	3,925	2,8438e-08
3,180	6,8854e-06	3,430	1,2299e-06	3,680	1,9472e-07	3,930	2,7310e-08
3,185	6,6601e-06	3,435	1,1868e-06	3,685	1,8744e-07	3,935	2,6226e-08
3,190	6,4419e-06	3,440	1,1452e-06	3,690	1,8043e-07	3,940	2,5183e-08
3,195	6,2305e-06	3,445	1,1049e-06	3,695	1,7367e-07	3,945	2,4180e-08
3,200	6,0258e-06	3,450	1,0661e-06	3,700	1,6715e-07	3,950	2,3217e-08
3,205	5,8275e-06	3,455	1,0285e-06	3,705	1,6087e-07	3,955	2,2290e-08
3,210	5,6354e-06	3,460	9,9220e-07	3,710	1,5482e-07	3,960	2,1400e-08
3,215	5,4494e-06	3,465	9,5715e-07	3,715	1,4899e-07	3,965	2,0544e-08
3,220	5,2694e-06	3,470	9,2329e-07	3,720	1,4337e-07	3,970	1,9721e-08
3,225	5,0950e-06	3,475	8,9058e-07	3,725	1,3796e-07	3,975	1,8931e-08
3,230	4,9261e-06	3,480	8,5900e-07	3,730	1,3274e-07	3,980	1,8171e-08
3,235	4,7626e-06	3,485	8,2849e-07	3,735	1,2772e-07	3,985	1,7441e-08
3,240	4,6044e-06	3,490	7,9903e-07	3,740	1,2288e-07	3,990	1,6739e-08
3,245	4,4511e-06	3,495	7,7057e-07	3,745	1,1822e-07	3,995	1,6065e-08

Cuadro B.9: Función complementaria del error, $\operatorname{erfc}(x)$. Argumentos de 3,000 a 3,995.

x	$\operatorname{erfc}(x)$	x	$\operatorname{erfc}(x)$	x	$\operatorname{erfc}(x)$	x	$\operatorname{erfc}(x)$
4,000	1,5417e-08	4,250	1,8506e-09	4,500	1,9662e-10	4,750	1,8485e-11
4,005	1,4795e-08	4,255	1,7715e-09	4,505	1,8776e-10	4,755	1,7609e-11
4,010	1,4197e-08	4,260	1,6958e-09	4,510	1,7929e-10	4,760	1,6774e-11
4,015	1,3622e-08	4,265	1,6232e-09	4,515	1,7120e-10	4,765	1,5978e-11
4,020	1,3071e-08	4,270	1,5537e-09	4,520	1,6347e-10	4,770	1,5219e-11
4,025	1,2541e-08	4,275	1,4870e-09	4,525	1,5607e-10	4,775	1,4495e-11
4,030	1,2031e-08	4,280	1,4232e-09	4,530	1,4901e-10	4,780	1,3805e-11
4,035	1,1542e-08	4,285	1,3620e-09	4,535	1,4225e-10	4,785	1,3147e-11
4,040	1,1073e-08	4,290	1,3034e-09	4,540	1,3580e-10	4,790	1,2520e-11
4,045	1,0621e-08	4,295	1,2473e-09	4,545	1,2963e-10	4,795	1,1922e-11
4,050	1,0188e-08	4,300	1,1935e-09	4,550	1,2374e-10	4,800	1,1352e-11
4,055	9,7722e-09	4,305	1,1419e-09	4,555	1,1811e-10	4,805	1,0809e-11
4,060	9,3727e-09	4,310	1,0926e-09	4,560	1,1273e-10	4,810	1,0291e-11
4,065	8,9891e-09	4,315	1,0453e-09	4,565	1,0759e-10	4,815	9,7981e-12
4,070	8,6207e-09	4,320	1,0000e-09	4,570	1,0268e-10	4,820	9,3279e-12
4,075	8,2671e-09	4,325	9,5669e-10	4,575	9,7985e-11	4,825	8,8799e-12
4,080	7,9276e-09	4,330	9,1516e-10	4,580	9,3503e-11	4,830	8,4530e-12
4,085	7,6016e-09	4,335	8,7540e-10	4,585	8,9222e-11	4,835	8,0462e-12
4,090	7,2887e-09	4,340	8,3732e-10	4,590	8,5133e-11	4,840	7,6586e-12
4,095	6,9883e-09	4,345	8,0086e-10	4,595	8,1227e-11	4,845	7,2893e-12
4,100	6,7000e-09	4,350	7,6594e-10	4,600	7,7496e-11	4,850	6,9375e-12
4,105	6,4233e-09	4,355	7,3252e-10	4,605	7,3933e-11	4,855	6,6024e-12
4,110	6,1577e-09	4,360	7,0052e-10	4,610	7,0531e-11	4,860	6,2831e-12
4,115	5,9028e-09	4,365	6,6988e-10	4,615	6,7281e-11	4,865	5,9790e-12
4,120	5,6582e-09	4,370	6,4056e-10	4,620	6,4179e-11	4,870	5,6893e-12
4,125	5,4234e-09	4,375	6,1248e-10	4,625	6,1216e-11	4,875	5,4134e-12
4,130	5,1981e-09	4,380	5,8561e-10	4,630	5,8387e-11	4,880	5,1506e-12
4,135	4,9820e-09	4,385	5,5989e-10	4,635	5,5687e-11	4,885	4,9004e-12
4,140	4,7746e-09	4,390	5,3528e-10	4,640	5,3108e-11	4,890	4,6620e-12
4,145	4,5756e-09	4,395	5,1172e-10	4,645	5,0647e-11	4,895	4,4351e-12
4,150	4,3847e-09	4,400	4,8917e-10	4,650	4,8297e-11	4,900	4,2189e-12
4,155	4,2015e-09	4,405	4,6760e-10	4,655	4,6054e-11	4,905	4,0132e-12
4,160	4,0258e-09	4,410	4,4695e-10	4,660	4,3913e-11	4,910	3,8172e-12
4,165	3,8573e-09	4,415	4,2719e-10	4,665	4,1870e-11	4,915	3,6307e-12
4,170	3,6956e-09	4,420	4,0829e-10	4,670	3,9919e-11	4,920	3,4531e-12
4,175	3,5406e-09	4,425	3,9021e-10	4,675	3,8058e-11	4,925	3,2840e-12
4,180	3,3919e-09	4,430	3,7291e-10	4,680	3,6281e-11	4,930	3,1230e-12
4,185	3,2492e-09	4,435	3,5635e-10	4,685	3,4586e-11	4,935	2,9698e-12
4,190	3,1124e-09	4,440	3,4052e-10	4,690	3,2969e-11	4,940	2,8240e-12
4,195	2,9813e-09	4,445	3,2537e-10	4,695	3,1425e-11	4,945	2,6852e-12
4,200	2,8555e-09	4,450	3,1089e-10	4,700	2,9953e-11	4,950	2,5531e-12
4,205	2,7349e-09	4,455	2,9703e-10	4,705	2,8548e-11	4,955	2,4274e-12
4,210	2,6192e-09	4,460	2,8378e-10	4,710	2,7207e-11	4,960	2,3077e-12
4,215	2,5084e-09	4,465	2,7110e-10	4,715	2,5928e-11	4,965	2,1939e-12
4,220	2,4021e-09	4,470	2,5898e-10	4,720	2,4708e-11	4,970	2,0855e-12
4,225	2,3002e-09	4,475	2,4739e-10	4,725	2,3545e-11	4,975	1,9825e-12
4,230	2,2025e-09	4,480	2,3630e-10	4,730	2,2435e-11	4,980	1,8844e-12
4,235	2,1088e-09	4,485	2,2570e-10	4,735	2,1376e-11	4,985	1,7910e-12
4,240	2,0191e-09	4,490	2,1557e-10	4,740	2,0366e-11	4,990	1,7023e-12
4,245	1,9330e-09	4,495	2,0588e-10	4,745	1,9403e-11	4,995	1,6178e-12

Cuadro B.10: Función complementaria del error, $\operatorname{erfc}(x)$. Argumentos de 4,000 a 4,995.

x	$\operatorname{erfc}(x)$	x	$\operatorname{erfc}(x)$	x	$\operatorname{erfc}(x)$	x	$\operatorname{erfc}(x)$
5,000	1,5375e-12	5,250	1,1310e-13	5,500	7,3578e-15	5,750	4,2321e-16
5,005	1,4610e-12	5,255	1,0722e-13	5,505	6,9578e-15	5,755	3,9922e-16
5,010	1,3883e-12	5,260	1,0163e-13	5,510	6,5792e-15	5,760	3,7656e-16
5,015	1,3192e-12	5,265	9,6334e-14	5,515	6,2208e-15	5,765	3,5518e-16
5,020	1,2534e-12	5,270	9,1307e-14	5,520	5,8817e-15	5,770	3,3499e-16
5,025	1,1909e-12	5,275	8,6538e-14	5,525	5,5608e-15	5,775	3,1593e-16
5,030	1,1314e-12	5,280	8,2014e-14	5,530	5,2572e-15	5,780	2,9795e-16
5,035	1,0749e-12	5,285	7,7723e-14	5,535	4,9699e-15	5,785	2,8097e-16
5,040	1,0211e-12	5,290	7,3653e-14	5,540	4,6980e-15	5,790	2,6495e-16
5,045	9,6993e-13	5,295	6,9792e-14	5,545	4,4408e-15	5,795	2,4983e-16
5,050	9,2131e-13	5,300	6,6131e-14	5,550	4,1975e-15	5,800	2,3556e-16
5,055	8,7508e-13	5,305	6,2658e-14	5,555	3,9673e-15	5,805	2,2209e-16
5,060	8,3113e-13	5,310	5,9365e-14	5,560	3,7496e-15	5,810	2,0939e-16
5,065	7,8935e-13	5,315	5,6243e-14	5,565	3,5436e-15	5,815	1,9740e-16
5,070	7,4963e-13	5,320	5,3282e-14	5,570	3,3488e-15	5,820	1,8609e-16
5,075	7,1188e-13	5,325	5,0474e-14	5,575	3,1645e-15	5,825	1,7541e-16
5,080	6,7599e-13	5,330	4,7812e-14	5,580	2,9903e-15	5,830	1,6535e-16
5,085	6,4189e-13	5,335	4,5288e-14	5,585	2,8255e-15	5,835	1,5585e-16
5,090	6,0947e-13	5,340	4,2895e-14	5,590	2,6696e-15	5,840	1,4689e-16
5,095	5,7866e-13	5,345	4,0627e-14	5,595	2,5222e-15	5,845	1,3844e-16
5,100	5,4938e-13	5,350	3,8477e-14	5,600	2,3828e-15	5,850	1,3047e-16
5,105	5,2156e-13	5,355	3,6438e-14	5,605	2,2511e-15	5,855	1,2295e-16
5,110	4,9512e-13	5,360	3,4506e-14	5,610	2,1265e-15	5,860	1,1586e-16
5,115	4,7000e-13	5,365	3,2675e-14	5,615	2,0087e-15	5,865	1,0917e-16
5,120	4,4613e-13	5,370	3,0940e-14	5,620	1,8973e-15	5,870	1,0286e-16
5,125	4,2346e-13	5,375	2,9295e-14	5,625	1,7920e-15	5,875	9,6916e-17
5,130	4,0191e-13	5,380	2,7736e-14	5,630	1,6925e-15	5,880	9,1308e-17
5,135	3,8145e-13	5,385	2,6259e-14	5,635	1,5984e-15	5,885	8,6020e-17
5,140	3,6200e-13	5,390	2,4859e-14	5,640	1,5095e-15	5,890	8,1035e-17
5,145	3,4354e-13	5,395	2,3533e-14	5,645	1,4255e-15	5,895	7,6335e-17
5,150	3,2599e-13	5,400	2,2277e-14	5,650	1,3460e-15	5,900	7,1904e-17
5,155	3,0933e-13	5,405	2,1086e-14	5,655	1,2710e-15	5,905	6,7727e-17
5,160	2,9351e-13	5,410	1,9958e-14	5,660	1,2000e-15	5,910	6,3789e-17
5,165	2,7848e-13	5,415	1,8890e-14	5,665	1,1330e-15	5,915	6,0078e-17
5,170	2,6421e-13	5,420	1,7878e-14	5,670	1,0697e-15	5,920	5,6579e-17
5,175	2,5065e-13	5,425	1,6919e-14	5,675	1,0098e-15	5,925	5,3282e-17
5,180	2,3779e-13	5,430	1,6011e-14	5,680	9,5325e-16	5,930	5,0174e-17
5,185	2,2557e-13	5,435	1,5151e-14	5,685	8,9982e-16	5,935	4,7245e-17
5,190	2,1396e-13	5,440	1,4336e-14	5,690	8,4935e-16	5,940	4,4485e-17
5,195	2,0295e-13	5,445	1,3565e-14	5,695	8,0166e-16	5,945	4,1884e-17
5,200	1,9249e-13	5,450	1,2834e-14	5,700	7,5662e-16	5,950	3,9434e-17
5,205	1,8256e-13	5,455	1,2142e-14	5,705	7,1407e-16	5,955	3,7124e-17
5,210	1,7314e-13	5,460	1,1487e-14	5,710	6,7389e-16	5,960	3,4949e-17
5,215	1,6419e-13	5,465	1,0867e-14	5,715	6,3593e-16	5,965	3,2899e-17
5,220	1,5570e-13	5,470	1,0280e-14	5,720	6,0008e-16	5,970	3,0968e-17
5,225	1,4764e-13	5,475	9,7236e-15	5,725	5,6622e-16	5,975	2,9149e-17
5,230	1,3999e-13	5,480	9,1972e-15	5,730	5,3425e-16	5,980	2,7435e-17
5,235	1,3273e-13	5,485	8,6988e-15	5,735	5,0406e-16	5,985	2,5821e-17
5,240	1,2584e-13	5,490	8,2271e-15	5,740	4,7555e-16	5,990	2,4300e-17
5,245	1,1931e-13	5,495	7,7805e-15	5,745	4,4863e-16	5,995	2,2868e-17

Cuadro B.11: Función complementaria del error, $\operatorname{erfc}(x)$. Argumentos de 5,000 a 5,995.

x	$\operatorname{erfc}(x)$	x	$\operatorname{erfc}(x)$	x	$\operatorname{erfc}(x)$	x	$\operatorname{erfc}(x)$
6,000	2,1520e-17	6,250	9,6722e-19	6,500	3,8421e-20	6,750	1,3488e-21
6,005	2,0250e-17	6,255	9,0789e-19	6,505	3,5976e-20	6,755	1,2598e-21
6,010	1,9053e-17	6,260	8,5215e-19	6,510	3,3684e-20	6,760	1,1766e-21
6,015	1,7927e-17	6,265	7,9980e-19	6,515	3,1536e-20	6,765	1,0989e-21
6,020	1,6866e-17	6,270	7,5063e-19	6,520	2,9524e-20	6,770	1,0262e-21
6,025	1,5868e-17	6,275	7,0444e-19	6,525	2,7639e-20	6,775	9,5834e-22
6,030	1,4928e-17	6,280	6,6107e-19	6,530	2,5873e-20	6,780	8,9489e-22
6,035	1,4042e-17	6,285	6,2033e-19	6,535	2,4219e-20	6,785	8,3561e-22
6,040	1,3209e-17	6,290	5,8208e-19	6,540	2,2669e-20	6,790	7,8021e-22
6,045	1,2424e-17	6,295	5,4615e-19	6,545	2,1218e-20	6,795	7,2845e-22
6,050	1,1686e-17	6,300	5,1242e-19	6,550	1,9858e-20	6,800	6,8009e-22
6,055	1,0991e-17	6,305	4,8075e-19	6,555	1,8585e-20	6,805	6,3490e-22
6,060	1,0336e-17	6,310	4,5101e-19	6,560	1,7392e-20	6,810	5,9270e-22
6,065	9,7206e-18	6,315	4,2310e-19	6,565	1,6276e-20	6,815	5,5326e-22
6,070	9,1410e-18	6,320	3,9689e-19	6,570	1,5230e-20	6,820	5,1643e-22
6,075	8,5955e-18	6,325	3,7228e-19	6,575	1,4250e-20	6,825	4,8203e-22
6,080	8,0822e-18	6,330	3,4919e-19	6,580	1,3333e-20	6,830	4,4989e-22
6,085	7,5992e-18	6,335	3,2751e-19	6,585	1,2475e-20	6,835	4,1988e-22
6,090	7,1447e-18	6,340	3,0716e-19	6,590	1,1671e-20	6,840	3,9185e-22
6,095	6,7170e-18	6,345	2,8806e-19	6,595	1,0918e-20	6,845	3,6567e-22
6,100	6,3146e-18	6,350	2,7014e-19	6,600	1,0213e-20	6,850	3,4123e-22
6,105	5,9360e-18	6,355	2,5332e-19	6,605	9,5536e-21	6,855	3,1840e-22
6,110	5,5799e-18	6,360	2,3753e-19	6,610	8,9362e-21	6,860	2,9708e-22
6,115	5,2448e-18	6,365	2,2272e-19	6,615	8,3582e-21	6,865	2,7718e-22
6,120	4,9297e-18	6,370	2,0882e-19	6,620	7,8172e-21	6,870	2,5860e-22
6,125	4,6332e-18	6,375	1,9578e-19	6,625	7,3109e-21	6,875	2,4125e-22
6,130	4,3544e-18	6,380	1,8354e-19	6,630	6,8370e-21	6,880	2,2506e-22
6,135	4,0921e-18	6,385	1,7206e-19	6,635	6,3935e-21	6,885	2,0994e-22
6,140	3,8455e-18	6,390	1,6129e-19	6,640	5,9785e-21	6,890	1,9583e-22
6,145	3,6135e-18	6,395	1,5119e-19	6,645	5,5902e-21	6,895	1,8266e-22
6,150	3,3953e-18	6,400	1,4171e-19	6,650	5,2268e-21	6,900	1,7036e-22
6,155	3,1902e-18	6,405	1,3282e-19	6,655	4,8868e-21	6,905	1,5889e-22
6,160	2,9973e-18	6,410	1,2448e-19	6,660	4,5687e-21	6,910	1,4818e-22
6,165	2,8160e-18	6,415	1,1666e-19	6,665	4,2711e-21	6,915	1,3818e-22
6,170	2,6454e-18	6,420	1,0932e-19	6,670	3,9927e-21	6,920	1,2885e-22
6,175	2,4851e-18	6,425	1,0245e-19	6,675	3,7322e-21	6,925	1,2015e-22
6,180	2,3344e-18	6,430	9,5995e-20	6,680	3,4886e-21	6,930	1,1203e-22
6,185	2,1927e-18	6,435	8,9946e-20	6,685	3,2607e-21	6,935	1,0445e-22
6,190	2,0595e-18	6,440	8,4275e-20	6,690	3,0475e-21	6,940	9,7383e-23
6,195	1,9343e-18	6,445	7,8957e-20	6,695	2,8482e-21	6,945	9,0787e-23
6,200	1,8167e-18	6,450	7,3970e-20	6,700	2,6617e-21	6,950	8,4634e-23
6,205	1,7061e-18	6,455	6,9296e-20	6,705	2,4873e-21	6,955	7,8894e-23
6,210	1,6021e-18	6,460	6,4913e-20	6,710	2,3243e-21	6,960	7,3540e-23
6,215	1,5044e-18	6,465	6,0805e-20	6,715	2,1718e-21	6,965	6,8546e-23
6,220	1,4126e-18	6,470	5,6954e-20	6,720	2,0292e-21	6,970	6,3887e-23
6,225	1,3264e-18	6,475	5,3344e-20	6,725	1,8959e-21	6,975	5,9543e-23
6,230	1,2453e-18	6,480	4,9960e-20	6,730	1,7713e-21	6,980	5,5491e-23
6,235	1,1692e-18	6,485	4,6789e-20	6,735	1,6547e-21	6,985	5,1712e-23
6,240	1,0976e-18	6,490	4,3817e-20	6,740	1,5458e-21	6,990	4,8188e-23
6,245	1,0304e-18	6,495	4,1032e-20	6,745	1,4440e-21	6,995	4,4902e-23

Cuadro B.12: Función complementaria del error, $\operatorname{erfc}(x)$. Argumentos de 6,000 a 6,995.

x	$\operatorname{erfc}(x)$	x	$\operatorname{erfc}(x)$	x	$\operatorname{erfc}(x)$	x	$\operatorname{erfc}(x)$
7,000	4,1838e-23	7,250	1,1467e-24	7,500	2,7766e-26	7,750	5,9397e-28
7,005	3,8981e-23	7,255	1,0657e-24	7,505	2,5743e-26	7,755	5,4932e-28
7,010	3,6318e-23	7,260	9,9047e-25	7,510	2,3865e-26	7,760	5,0799e-28
7,015	3,3835e-23	7,265	9,2047e-25	7,515	2,2124e-26	7,765	4,6975e-28
7,020	3,1520e-23	7,270	8,5537e-25	7,520	2,0508e-26	7,770	4,3437e-28
7,025	2,9362e-23	7,275	7,9483e-25	7,525	1,9009e-26	7,775	4,0163e-28
7,030	2,7350e-23	7,280	7,3854e-25	7,530	1,7619e-26	7,780	3,7135e-28
7,035	2,5475e-23	7,285	6,8621e-25	7,535	1,6330e-26	7,785	3,4333e-28
7,040	2,3727e-23	7,290	6,3755e-25	7,540	1,5135e-26	7,790	3,1740e-28
7,045	2,2098e-23	7,295	5,9231e-25	7,545	1,4026e-26	7,795	2,9342e-28
7,050	2,0580e-23	7,300	5,5026e-25	7,550	1,2998e-26	7,800	2,7124e-28
7,055	1,9165e-23	7,305	5,1116e-25	7,555	1,2045e-26	7,805	2,5072e-28
7,060	1,7847e-23	7,310	4,7482e-25	7,560	1,1161e-26	7,810	2,3175e-28
7,065	1,6619e-23	7,315	4,4104e-25	7,565	1,0341e-26	7,815	2,1420e-28
7,070	1,5474e-23	7,320	4,0965e-25	7,570	9,5811e-27	7,820	1,9796e-28
7,075	1,4407e-23	7,325	3,8047e-25	7,575	8,8766e-27	7,825	1,8295e-28
7,080	1,3414e-23	7,330	3,5335e-25	7,580	8,2235e-27	7,830	1,6907e-28
7,085	1,2488e-23	7,335	3,2815e-25	7,585	7,6181e-27	7,835	1,5624e-28
7,090	1,1625e-23	7,340	3,0473e-25	7,590	7,0569e-27	7,840	1,4437e-28
7,095	1,0822e-23	7,345	2,8297e-25	7,595	6,5367e-27	7,845	1,3340e-28
7,100	1,0073e-23	7,350	2,6274e-25	7,600	6,0545e-27	7,850	1,2325e-28
7,105	9,3763e-24	7,355	2,4396e-25	7,605	5,6077e-27	7,855	1,1387e-28
7,110	8,7270e-24	7,360	2,2650e-25	7,610	5,1935e-27	7,860	1,0520e-28
7,115	8,1222e-24	7,365	2,1028e-25	7,615	4,8097e-27	7,865	9,7185e-29
7,120	7,5590e-24	7,370	1,9522e-25	7,620	4,4541e-27	7,870	8,9776e-29
7,125	7,0345e-24	7,375	1,8122e-25	7,625	4,1245e-27	7,875	8,2927e-29
7,130	6,5460e-24	7,380	1,6822e-25	7,630	3,8192e-27	7,880	7,6597e-29
7,135	6,0912e-24	7,385	1,5615e-25	7,635	3,5362e-27	7,885	7,0747e-29
7,140	5,6677e-24	7,390	1,4493e-25	7,640	3,2741e-27	7,890	6,5341e-29
7,145	5,2734e-24	7,395	1,3451e-25	7,645	3,0313e-27	7,895	6,0344e-29
7,150	4,9063e-24	7,400	1,2484e-25	7,650	2,8063e-27	7,900	5,5727e-29
7,155	4,5645e-24	7,405	1,1585e-25	7,655	2,5979e-27	7,905	5,1461e-29
7,160	4,2463e-24	7,410	1,0751e-25	7,660	2,4048e-27	7,910	4,7519e-29
7,165	3,9501e-24	7,415	9,9764e-26	7,665	2,2260e-27	7,915	4,3876e-29
7,170	3,6743e-24	7,420	9,2570e-26	7,670	2,0604e-27	7,920	4,0511e-29
7,175	3,4177e-24	7,425	8,5891e-26	7,675	1,9070e-27	7,925	3,7402e-29
7,180	3,1788e-24	7,430	7,9690e-26	7,680	1,7649e-27	7,930	3,4530e-29
7,185	2,9565e-24	7,435	7,3933e-26	7,685	1,6334e-27	7,935	3,1877e-29
7,190	2,7496e-24	7,440	6,8588e-26	7,690	1,5115e-27	7,940	2,9426e-29
7,195	2,5570e-24	7,445	6,3627e-26	7,695	1,3987e-27	7,945	2,7163e-29
7,200	2,3778e-24	7,450	5,9022e-26	7,700	1,2943e-27	7,950	2,5072e-29
7,205	2,2110e-24	7,455	5,4747e-26	7,705	1,1976e-27	7,955	2,3141e-29
7,210	2,0559e-24	7,460	5,0779e-26	7,710	1,1080e-27	7,960	2,1358e-29
7,215	1,9115e-24	7,465	4,7097e-26	7,715	1,0251e-27	7,965	1,9711e-29
7,220	1,7772e-24	7,470	4,3679e-26	7,720	9,4838e-28	7,970	1,8190e-29
7,225	1,6523e-24	7,475	4,0507e-26	7,725	8,7734e-28	7,975	1,6786e-29
7,230	1,5360e-24	7,480	3,7564e-26	7,730	8,1158e-28	7,980	1,5489e-29
7,235	1,4279e-24	7,485	3,4833e-26	7,735	7,5071e-28	7,985	1,4292e-29
7,240	1,3273e-24	7,490	3,2299e-26	7,740	6,9437e-28	7,990	1,3187e-29
7,245	1,2337e-24	7,495	2,9948e-26	7,745	6,4223e-28	7,995	1,2166e-29

Cuadro B.13: Función complementaria del error, $\operatorname{erfc}(x)$. Argumentos de 7,000 a 7,995.

x	$\operatorname{erfc}(x)$	x	$\operatorname{erfc}(x)$	x	$\operatorname{erfc}(x)$	x	$\operatorname{erfc}(x)$
8,000	1,1224e-29	8,250	1,8736e-31	8,500	2,7623e-33	8,750	3,5971e-35
8,005	1,0355e-29	8,255	1,7241e-31	8,505	2,5357e-33	8,755	3,2938e-35
8,010	9,5520e-30	8,260	1,5865e-31	8,510	2,3275e-33	8,760	3,0159e-35
8,015	8,8111e-30	8,265	1,4598e-31	8,515	2,1364e-33	8,765	2,7613e-35
8,020	8,1272e-30	8,270	1,3432e-31	8,520	1,9608e-33	8,770	2,5281e-35
8,025	7,4961e-30	8,275	1,2358e-31	8,525	1,7996e-33	8,775	2,3145e-35
8,030	6,9136e-30	8,280	1,1370e-31	8,530	1,6515e-33	8,780	2,1188e-35
8,035	6,3761e-30	8,285	1,0460e-31	8,535	1,5156e-33	8,785	1,9396e-35
8,040	5,8801e-30	8,290	9,6221e-32	8,540	1,3907e-33	8,790	1,7754e-35
8,045	5,4224e-30	8,295	8,8511e-32	8,545	1,2761e-33	8,795	1,6251e-35
8,050	5,0000e-30	8,300	8,1415e-32	8,550	1,1709e-33	8,800	1,4874e-35
8,055	4,6104e-30	8,305	7,4884e-32	8,555	1,0743e-33	8,805	1,3613e-35
8,060	4,2509e-30	8,310	6,8873e-32	8,560	9,8564e-34	8,810	1,2458e-35
8,065	3,9192e-30	8,315	6,3342e-32	8,565	9,0423e-34	8,815	1,1401e-35
8,070	3,6132e-30	8,320	5,8252e-32	8,570	8,2951e-34	8,820	1,0433e-35
8,075	3,3310e-30	8,325	5,3569e-32	8,575	7,6092e-34	8,825	9,5464e-36
8,080	3,0706e-30	8,330	4,9259e-32	8,580	6,9798e-34	8,830	8,7349e-36
8,085	2,8305e-30	8,335	4,5294e-32	8,585	6,4020e-34	8,835	7,9920e-36
8,090	2,6090e-30	8,340	4,1646e-32	8,590	5,8718e-34	8,840	7,3120e-36
8,095	2,4047e-30	8,345	3,8290e-32	8,595	5,3853e-34	8,845	6,6894e-36
8,100	2,2163e-30	8,350	3,5203e-32	8,600	4,9388e-34	8,850	6,1196e-36
8,105	2,0426e-30	8,355	3,2363e-32	8,605	4,5291e-34	8,855	5,5980e-36
8,110	1,8824e-30	8,360	2,9751e-32	8,610	4,1532e-34	8,860	5,1206e-36
8,115	1,7346e-30	8,365	2,7348e-32	8,615	3,8083e-34	8,865	4,6837e-36
8,120	1,5984e-30	8,370	2,5138e-32	8,620	3,4918e-34	8,870	4,2839e-36
8,125	1,4728e-30	8,375	2,3105e-32	8,625	3,2015e-34	8,875	3,9180e-36
8,130	1,3570e-30	8,380	2,1236e-32	8,630	2,9352e-34	8,880	3,5832e-36
8,135	1,2503e-30	8,385	1,9517e-32	8,635	2,6909e-34	8,885	3,2768e-36
8,140	1,1519e-30	8,390	1,7936e-32	8,640	2,4668e-34	8,890	2,9965e-36
8,145	1,0612e-30	8,395	1,6483e-32	8,645	2,2613e-34	8,895	2,7400e-36
8,150	9,7754e-31	8,400	1,5146e-32	8,650	2,0728e-34	8,900	2,5054e-36
8,155	9,0046e-31	8,405	1,3917e-32	8,655	1,8999e-34	8,905	2,2907e-36
8,160	8,2942e-31	8,410	1,2788e-32	8,660	1,7413e-34	8,910	2,0943e-36
8,165	7,6395e-31	8,415	1,1749e-32	8,665	1,5959e-34	8,915	1,9147e-36
8,170	7,0361e-31	8,420	1,0794e-32	8,670	1,4626e-34	8,920	1,7503e-36
8,175	6,4800e-31	8,425	9,9164e-33	8,675	1,3403e-34	8,925	1,6001e-36
8,180	5,9676e-31	8,430	9,1096e-33	8,680	1,2282e-34	8,930	1,4626e-36
8,185	5,4954e-31	8,435	8,3680e-33	8,685	1,1255e-34	8,935	1,3369e-36
8,190	5,0604e-31	8,440	7,6865e-33	8,690	1,0312e-34	8,940	1,2219e-36
8,195	4,6595e-31	8,445	7,0600e-33	8,695	9,4483e-35	8,945	1,1168e-36
8,200	4,2902e-31	8,450	6,4844e-33	8,700	8,6563e-35	8,950	1,0206e-36
8,205	3,9500e-31	8,455	5,9553e-33	8,705	7,9304e-35	8,955	9,3269e-37
8,210	3,6365e-31	8,460	5,4692e-33	8,710	7,2649e-35	8,960	8,5231e-37
8,215	3,3478e-31	8,465	5,0225e-33	8,715	6,6550e-35	8,965	7,7881e-37
8,220	3,0819e-31	8,470	4,6120e-33	8,720	6,0959e-35	8,970	7,1162e-37
8,225	2,8369e-31	8,475	4,2349e-33	8,725	5,5836e-35	8,975	6,5019e-37
8,230	2,6113e-31	8,480	3,8884e-33	8,730	5,1140e-35	8,980	5,9404e-37
8,235	2,4035e-31	8,485	3,5701e-33	8,735	4,6838e-35	8,985	5,4271e-37
8,240	2,2121e-31	8,490	3,2777e-33	8,740	4,2895e-35	8,990	4,9579e-37
8,245	2,0359e-31	8,495	3,0091e-33	8,745	3,9282e-35	8,995	4,5290e-37

Cuadro B.14: Función complementaria del error, $\operatorname{erfc}(x)$. Argumentos de 8,000 a 8,995.

x	$\operatorname{erfc}(x)$	x	$\operatorname{erfc}(x)$	x	$\operatorname{erfc}(x)$	x	$\operatorname{erfc}(x)$
9,000	4,1370e-37	9,250	4,2020e-39	9,500	3,7692e-41	9,750	2,9857e-43
9,005	3,7788e-37	9,255	3,8286e-39	9,505	3,4258e-41	9,755	2,7069e-43
9,010	3,4514e-37	9,260	3,4883e-39	9,510	3,1134e-41	9,760	2,4540e-43
9,015	3,1522e-37	9,265	3,1780e-39	9,515	2,8294e-41	9,765	2,2246e-43
9,020	2,8788e-37	9,270	2,8951e-39	9,520	2,5712e-41	9,770	2,0166e-43
9,025	2,6290e-37	9,275	2,6374e-39	9,525	2,3365e-41	9,775	1,8279e-43
9,030	2,4008e-37	9,280	2,4024e-39	9,530	2,1230e-41	9,780	1,6568e-43
9,035	2,1922e-37	9,285	2,1883e-39	9,535	1,9290e-41	9,785	1,5016e-43
9,040	2,0017e-37	9,290	1,9931e-39	9,540	1,7526e-41	9,790	1,3609e-43
9,045	1,8276e-37	9,295	1,8153e-39	9,545	1,5923e-41	9,795	1,2334e-43
9,050	1,6686e-37	9,300	1,6532e-39	9,550	1,4465e-41	9,800	1,1177e-43
9,055	1,5234e-37	9,305	1,5056e-39	9,555	1,3141e-41	9,805	1,0128e-43
9,060	1,3907e-37	9,310	1,3711e-39	9,560	1,1937e-41	9,810	9,1774e-44
9,065	1,2695e-37	9,315	1,2485e-39	9,565	1,0843e-41	9,815	8,3155e-44
9,070	1,1588e-37	9,320	1,1368e-39	9,570	9,8482e-42	9,820	7,5341e-44
9,075	1,0578e-37	9,325	1,0351e-39	9,575	8,9446e-42	9,825	6,8258e-44
9,080	9,6545e-38	9,330	9,4238e-40	9,580	8,1235e-42	9,830	6,1838e-44
9,085	8,8114e-38	9,335	8,5796e-40	9,585	7,3773e-42	9,835	5,6019e-44
9,090	8,0416e-38	9,340	7,8106e-40	9,590	6,6994e-42	9,840	5,0745e-44
9,095	7,3387e-38	9,345	7,1102e-40	9,595	6,0835e-42	9,845	4,5965e-44
9,100	6,6969e-38	9,350	6,4722e-40	9,600	5,5239e-42	9,850	4,1633e-44
9,105	6,1109e-38	9,355	5,8913e-40	9,605	5,0156e-42	9,855	3,7708e-44
9,110	5,5759e-38	9,360	5,3622e-40	9,610	4,5538e-42	9,860	3,4151e-44
9,115	5,0875e-38	9,365	4,8803e-40	9,615	4,1343e-42	9,865	3,0928e-44
9,120	4,6417e-38	9,370	4,4416e-40	9,620	3,7533e-42	9,870	2,8008e-44
9,125	4,2347e-38	9,375	4,0421e-40	9,625	3,4072e-42	9,875	2,5362e-44
9,130	3,8632e-38	9,380	3,6783e-40	9,630	3,0929e-42	9,880	2,2966e-44
9,135	3,5241e-38	9,385	3,3471e-40	9,635	2,8074e-42	9,885	2,0794e-44
9,140	3,2146e-38	9,390	3,0456e-40	9,640	2,5482e-42	9,890	1,8827e-44
9,145	2,9322e-38	9,395	2,7711e-40	9,645	2,3128e-42	9,895	1,7045e-44
9,150	2,6744e-38	9,400	2,5212e-40	9,650	2,0990e-42	9,900	1,5431e-44
9,155	2,4392e-38	9,405	2,2938e-40	9,655	1,9049e-42	9,905	1,3969e-44
9,160	2,2245e-38	9,410	2,0867e-40	9,660	1,7286e-42	9,910	1,2645e-44
9,165	2,0287e-38	9,415	1,8983e-40	9,665	1,5686e-42	9,915	1,1446e-44
9,170	1,8500e-38	9,420	1,7268e-40	9,670	1,4233e-42	9,920	1,0360e-44
9,175	1,6869e-38	9,425	1,5707e-40	9,675	1,2915e-42	9,925	9,3771e-45
9,180	1,5382e-38	9,430	1,4286e-40	9,680	1,1717e-42	9,930	8,4867e-45
9,185	1,4025e-38	9,435	1,2993e-40	9,685	1,0631e-42	9,935	7,6804e-45
9,190	1,2787e-38	9,440	1,1817e-40	9,690	9,6441e-43	9,940	6,9504e-45
9,195	1,1657e-38	9,445	1,0747e-40	9,695	8,7487e-43	9,945	6,2895e-45
9,200	1,0627e-38	9,450	9,7726e-41	9,700	7,9361e-43	9,950	5,6911e-45
9,205	9,6878e-39	9,455	8,8865e-41	9,705	7,1986e-43	9,955	5,1494e-45
9,210	8,8309e-39	9,460	8,0804e-41	9,710	6,5293e-43	9,960	4,6590e-45
9,215	8,0494e-39	9,465	7,3470e-41	9,715	5,9220e-43	9,965	4,2152e-45
9,220	7,3366e-39	9,470	6,6798e-41	9,720	5,3708e-43	9,970	3,8134e-45
9,225	6,6867e-39	9,475	6,0730e-41	9,725	4,8708e-43	9,975	3,4497e-45
9,230	6,0940e-39	9,480	5,5210e-41	9,730	4,4170e-43	9,980	3,1206e-45
9,235	5,5536e-39	9,485	5,0189e-41	9,735	4,0054e-43	9,985	2,8227e-45
9,240	5,0609e-39	9,490	4,5622e-41	9,740	3,6319e-43	9,990	2,5532e-45
9,245	4,6116e-39	9,495	4,1469e-41	9,745	3,2931e-43	9,995	2,3092e-45

Cuadro B.15: Función complementaria del error, $\operatorname{erfc}(x)$. Argumentos de 9,000 a 9,995.

B.8. Calidad en ASK

La Probabilidad de error de símbolo en ASK coherente se puede calcular mediante la expresión:

$$P_s = \frac{M-1}{M} \operatorname{erfc} \left(\sqrt{\frac{3}{M^2-1} \frac{E_s}{N_0}} \right)$$

De forma general, para cualquier modulación, la probabilidad de error de bit (BER o P_b) se puede derivar de P_s cuando la codificación es de tipo Gray. En este caso, y despreciando la probabilidad de confundir un símbolo con otro no contiguo, la relación entre calidades depende únicamente del número de bits por símbolo, $k = \log_2(M)$:

$$P_b \approx \frac{P_s}{k}$$

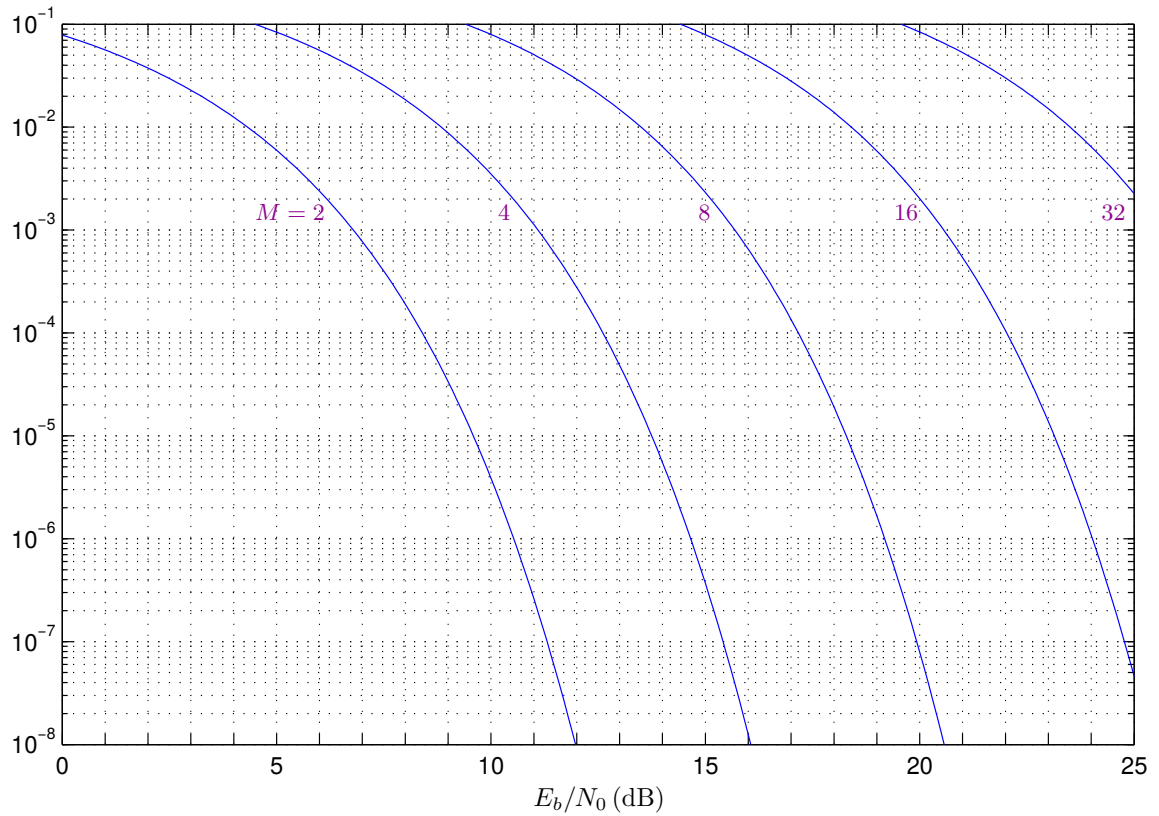


Figura B.3: Probabilidad de error de símbolo (P_s) de ASK coherente, en función de E_b/N_0 (dB).

B.9. Calidad en PSK

La Probabilidad de error de símbolo en PSK coherente se puede acotar mediante la expresión:

$$\operatorname{erfc} \left[\sqrt{\frac{E_s}{N_0}} \sin \left(\frac{\pi}{M} \right) \right] \geq P_s \geq \frac{1}{2} \operatorname{erfc} \left[\sqrt{\frac{E_s}{N_0}} \sin \left(\frac{\pi}{M} \right) \right]$$

Si se cumple que $E_b/N_0 \gg 1$ (en unidades naturales), entonces podemos aproximar la calidad mediante la expresión cerrada:

$$P_s \approx \operatorname{erfc} \left[\sqrt{\frac{E_s}{N_0}} \sin \left(\frac{\pi}{M} \right) \right]$$

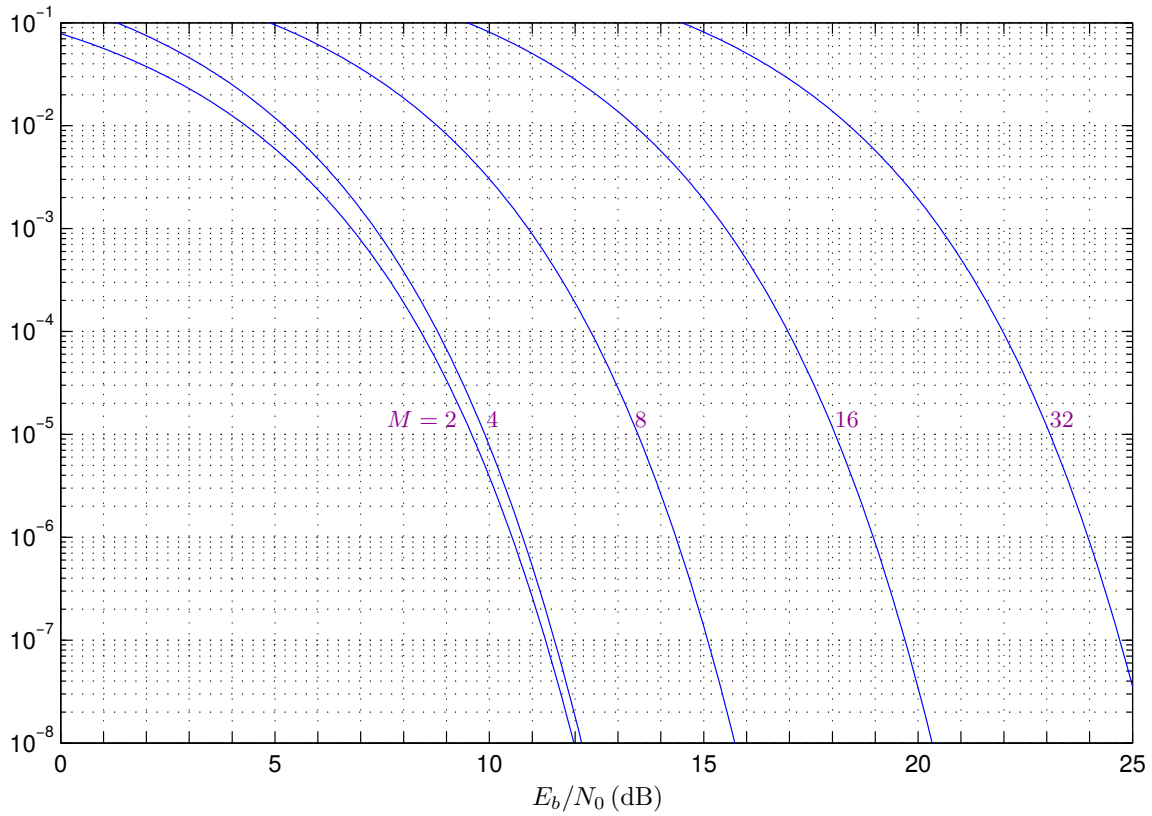


Figura B.4: Probabilidad de error de símbolo (P_s) de PSK coherente, en función de E_b/N_0 (dB).

B.10. Calidad en QAM

La Probabilidad de error de símbolo en QAM coherente se puede acotar o calcular mediante las siguientes expresiones, dependientes del valor de $k = \log_2(M)$:

- k par:

$$P_s < 2 \operatorname{erfc} \left[\sqrt{\frac{3 \log_2(M)}{2(M-1)}} \frac{E_b}{N_0} \right]$$

- k impar:

$$P_s = 1 - (1 - p)^2; \quad p = \left(\frac{\sqrt{M} - 1}{\sqrt{M}} \right) \operatorname{erfc} \left[\sqrt{\frac{3 \log_2(M)}{2(M-1)}} \frac{E_b}{N_0} \right]$$

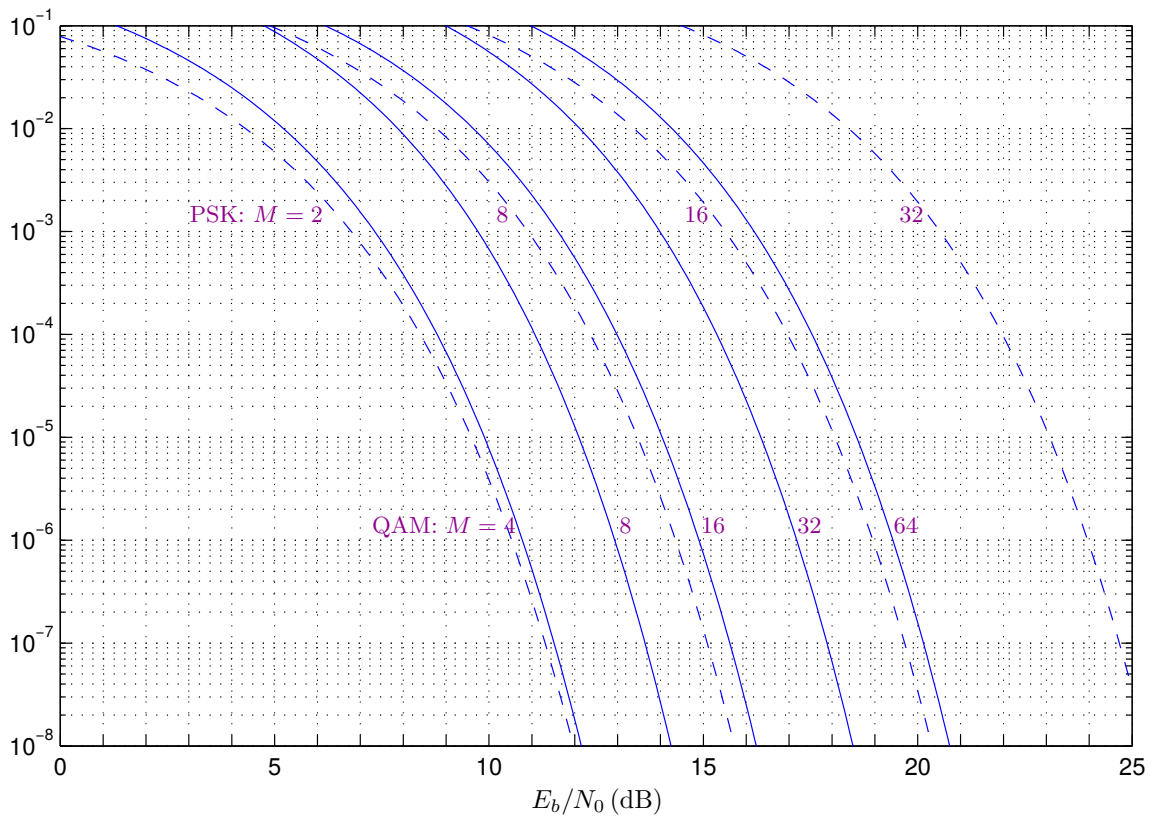


Figura B.5: Probabilidad de error de símbolo (P_s) de QAM coherente, en función de E_b/N_0 (dB). Las gráficas de PSK aparecen en línea discontinua para comparar. 4QAM y 4PSK (QPSK) se superponen.

B.11. Calidad en APK

Las modulaciones APK son modulaciones híbridas de amplitud y fase, sin ninguna restricción respecto a las constelaciones obtenidas. De manera equivalente, una APK es el resultado de componer dos modulaciones de amplitud ortogonales con amplitudes cualesquiera.

La calidad está acotada entre los siguientes límites:

$$\frac{1}{M} \operatorname{erfc}\left(\frac{d_{\min}}{2\sqrt{N_0}}\right) \leq P_s \leq \frac{M-1}{2} \operatorname{erfc}\left(\frac{d_{\min}}{2\sqrt{N_0}}\right)$$

Donde el parámetro fundamental es la distancia mínima entre símbolos de la constelación, d_{\min} .

B.12. Calidad en FSK

La Probabilidad de error de bit en FSK coherente se puede acotar mediante la expresión:

$$P_b \leq \frac{M}{4} \operatorname{erfc} \left[\sqrt{\frac{E_b}{2N_0} \log_2(M)} \right]$$

Como en FSK no tiene sentido una asignación de tipo Gray (todos los símbolos son contiguos), para intercambiar valores entre las gráficas de la figura B.6 debemos usar la relación trivial $(E_s/N_0) = (E_b/N_0) \log_2(M)$ y la expresión:

$$P_b = \frac{M}{2(M-1)} P_s$$

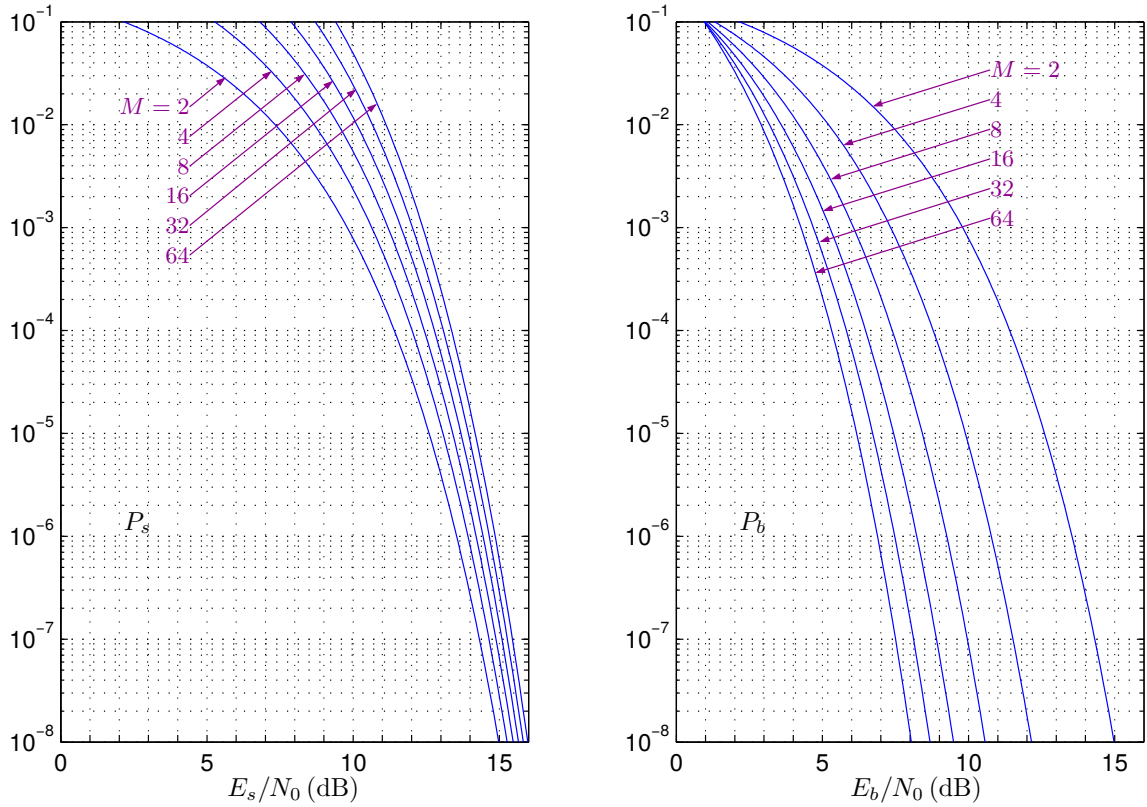


Figura B.6: Calidad en FSK coherente: Probabilidad de error de símbolo (P_s) en función de E_s/N_0 (dB) a la izquierda, y probabilidad de error de bit (P_b) en función de E_b/N_0 (dB) a la derecha.

B.13. Calidad en las modulaciones digitales

Para poder establecer comparaciones con mayor facilidad, en la figura B.7 se pueden observar juntas las curvas de calidad de las diferentes modulaciones digitales ya presentadas.

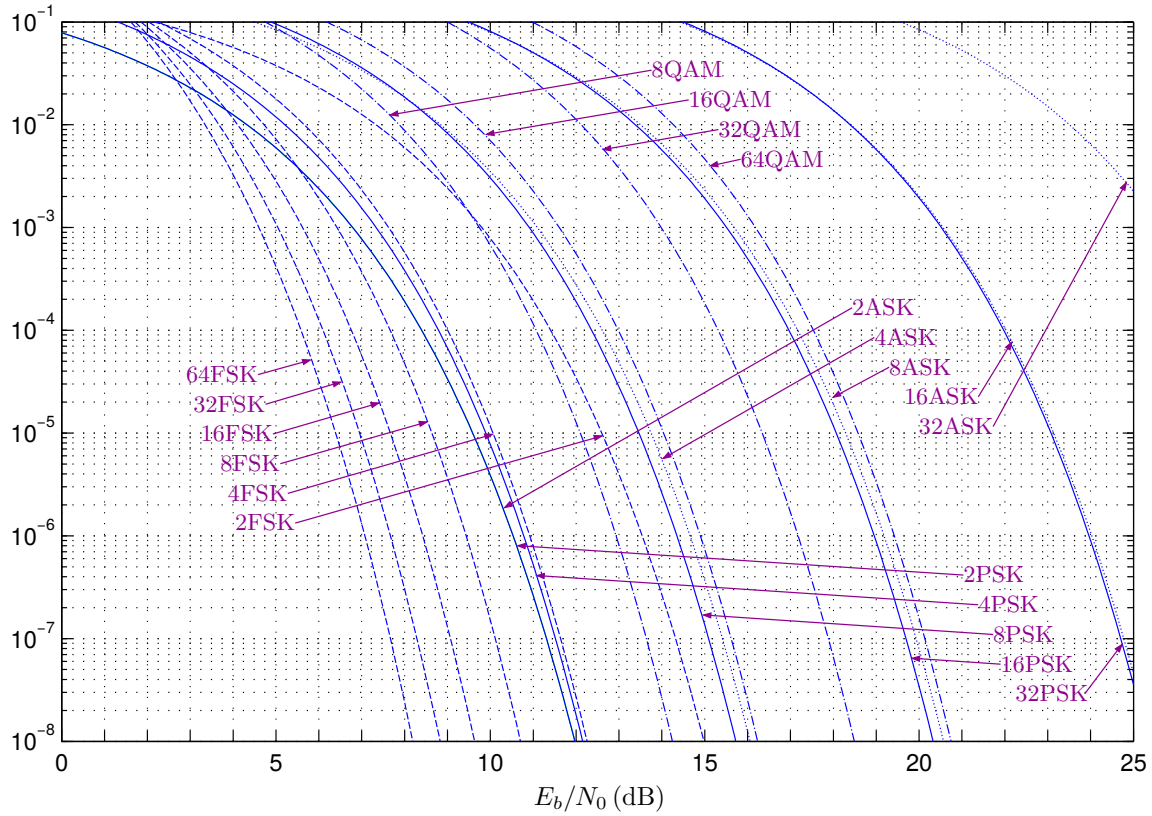


Figura B.7: Probabilidad de error de símbolo (P_s) en función de E_b/N_0 (dB) para diferentes modulaciones.